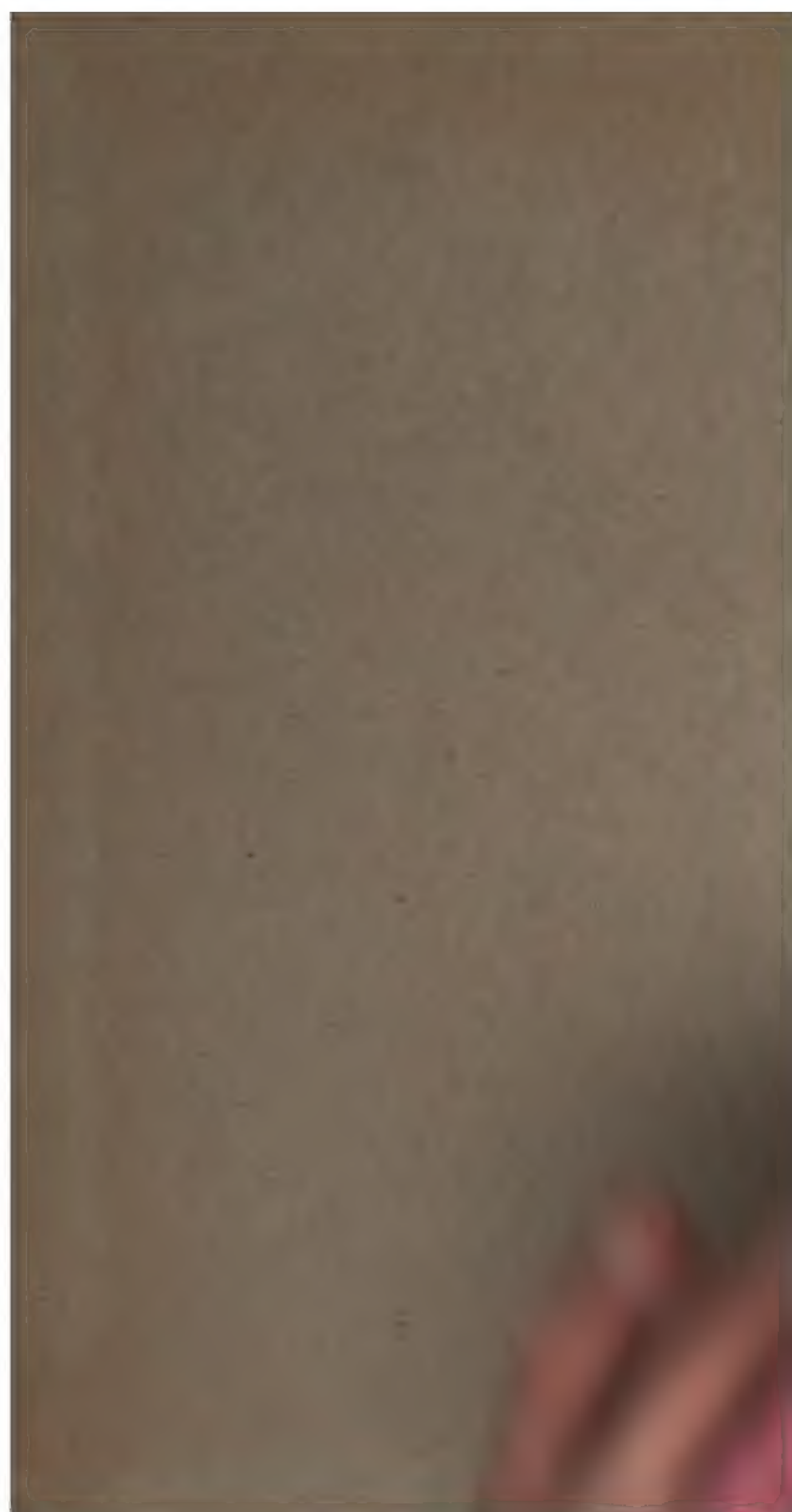



RESEARCH LIBRARIES
33 06634998 0

Jahrbu

OE



Jahrbuch
OEN

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Max Henoch und **Emil Lampe.**

Band XVII.

Jahrgang 1885.

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1888.



Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. VI, VII.

Act. Soc. Fenn.: Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors. 4°.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.

Amst. Jaarb.: Jaarboek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam. XXIV.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. (5), I, II.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Dumas etc. Paris. Masson. 8°.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'instruction publique par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris. Gauthier-Villars. 4°. (3) II.

Ann. Hydr.: Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. Berlin. 4°. XIII, XIV.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann u. Co. New York.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Offiziere des Deutschen Reichsheeres.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4°.

Astr. Viertelj.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, H. Seliger. Leipzig. W. Engelmann. 8°.

Bad. Schulb.: Badische Schulblätter. Organ für die Interessen der Erziehung und des Unterrichts, redigirt von Bähler. Karlsruhe. H. Reuter.

Bayr. Bl.: Blätter für das bayrische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°.

Batt. G.: Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XXIII.

Belg. Ann.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez. LI.

Belg. Ann.: Annales de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) IX, X.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Mém. S. E.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 4°.

Berl. Abh.: Mathematisch physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1885.

Berl. phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Berlin. G. Reimer. 8°. 1885.

Bern Mitt.: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1885. Bern. Huber u. Co.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von G. Eneström. Stockholm. 1885.

Bibl. un.: Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève.

Böklen Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen herausgegeben von Dr. O. Böklen. Tübingen. Fr. Fues. I.

Bologna Mem.: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (4) IV, V, VI.

Bologna Rend.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.

Bonc. Bull.: Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°. XVII, XVIII.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (3) I, II.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati. Milano. 4°. (2) XIII.

Brit. Ass. Rep.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B). IX.

Camb. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Camb. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Cas.: Časopis. Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag 8°. (Böhmisch.) XIV.

Centrbl. d. Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und K. Schäfer. Berlin. Ernst u. Korn. V.

Chark. Ges.: Sammlung der Mittheilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.)

Christiania Forh.: Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 8°.

Christ. G. d. W.: Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania. Christiania.

Civiling.: Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung einer Redactions-Commission herausgegeben von Dr. E. Hartig. Jahrg. 1885. (Der neuen Folge Bd. XXXI.) Leipzig. Arthur Felix. 4°.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. C. CI.

Cron. cient.: Crónica científica, revista internacional de ciencias, fundador propietario y director D. Rafael Roig y Torres. Barcelona. 8°.

Darb. Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, J. Hoüel et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Battaglini etc., sous la direction de la Commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8°. (2) IX.

Dtsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin. E. Toeche. XIX.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXVIII.

D. Versz.: Deutsche Versicherungszeitung. 1885.

Edinb. Math. Soc. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. III.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XII, XIII.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. XXXII.

Ed. Times: Mathematical questions with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times". Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. Francis Hodgson. XLII, XLIII.

Elektrot. Z.: Elektrotechnische Zeitschrift. Herausgegeben vom elektrotechnischen Verein. Berlin. 4°.

Erlang. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°. XVI.

Ermakow J.: Journal der elementaren Mathematik, herausgegeben von Ermakow. Kiew. (Russisch.) I u. II.

Exner Rep.: Repertorium der Physik, herausgegeben von Exner. München und Leipzig. gr. 8°. XXI.

Franç. Ass.: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles.

Gen. Mém.: Mémoires de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Genève. 4°. Librairie H. Georg.

Genova G.: Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova. 8°. 1885.

Gött. Abh. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°.

Gött. N. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1885.

Hamb. Mitt. Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°. 1885. No. 5.

Hannov. Zeitschr.: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, redigirt von Keck. Hannover. Schmorl u. Seefeld. XXXI.

Helsingf. Vet. soc. Acta. Acta societatis scientiarum Fennicae. 4°. XIV.

Helsingf. Vetensk. soc. Öfv.: Öfversigt af finska vetenskaps-societetens förhandlingar. Helsingfors. 8°.

Hoffmann Z. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XVI.

Hoppe Arch. Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°. (2) II. III.

J. de l'Éc. Pol. Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°. Cah. LIV. LV.

J. el. math. S. Ermakow J.

J. Hopkins circ.: Johns Hopkins University Circulars.

Jordan J. Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié de 1875 à 1884 par H. Resal. Publié par C. Jordan avec la collaboration de G. Halphen, E. Laguerre, M. Levy, A. Mannheim, É. Picard, H. Resal. Paris. (4) I.

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungskunde, herausgegeben von W. Jordan. XIV.

Kasan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kazan.

Kazan Ges. Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kazan. (Russisch.) II. III.

Kazan Nachr. Nachr. der Kaiserlichen Universität zu Kazan.

Kjöb. Skrift. Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen.

Klein Ann. Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. VonderMühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XXV. XXVI. XXVII.

Kopenh. Overs. Oversigt over Videnskabs Selskabet Forhandlingar. Kopenhagen.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.) XIII.

Krak. Denkschr. Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) X.

Kronecker J. Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. Mit thätiger Beförderung hoher Königl. Preussischer Behörden. Fortsetzung des von A. L. Crelle (1826-1856) und C. W. Borchardt (1856-1880) herausgegebenen Journals. Berlin. G. Reimer. 4°. XCVIII. IC.

Leip. Abh. Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Leip. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig. 1885.

Lie Arch.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8°. X.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. XI. XII.

Lisb. J.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturales publicados sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lisb. Mem.: Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XVIII.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. XVI. XVII.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXVI.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. XXXVII-XXXIX.

Lund Årsskr.: Lunds Universitets Årsskrift. Lund. XXI.

Manch. Mem.: Memoirs of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Mathesis: Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand, Hoste. Paris, Gauthier-Villars. 8°. V.

Mem. R. Astr. S.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mess.: The Messenger of Mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8°. (2) XIV, XV.

Met. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der Oestreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. W. Koeppen. Berlin. I, II.

Modena Mem.: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena.

Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 8°.

Moscou Mém.: Nouveaux Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. XIV.

Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) XII.

Mosk. Nachr.: Nachrichten der Moskauer Universität. Moskau. (Russisch).

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Gesellschaft der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°.

Nap. Rend.: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4°. XXII, XXIII, XXIV.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London. XXXI-XXXII.

Neerl. Arch.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8°. XX, XXI.

Newcomb Am. J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. VII, VIII.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Amsterdam. 8°. XII.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°. (3) IV.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch). VI.

Odessa Nachr.: Nachrichten von der Universität Odessa. Odessa.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Paris Mém. prés.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Petersburg. (Russisch) LI.

Pétersb. Mél. math.: Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg.

Phys. Ges. St. Pet.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St.-Petersburg.

Phys. Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Kane, Thomson, Francis. London. 8°. (5) XIX, XX, XXI.

Phil. Trans.: → Lond. Phil. Trans.

Pr. = Programmabhandlung, Gymn. = Gymnasium, Realgymn. = Realgymnasium, etc.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8. 1884.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8°. XX, XXI.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. XXV, XXVI.

Rev. d. qu. sc.: Revue des questions scientifiques. XXVII.

Revista Scientifica: Revista scientifica do Porto.

Revue de l'instr. p.: Revue de l'instruction publique de Belgique. Gand. 8°.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma. 4°. (4) I.

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°. (4) I.

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti della Accademia Pontifica dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. XXXVII.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°. XXX.

Hl. A.: Historisch-litterarische Abteilung (besonders paginirt).

Sil. J.: The American Journal of science. Editors: J. D. and E. S. Dana. New Haven.

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. XIII.

Stockh. Handl.: Handlingar af Kongl. Svenska Vetenskaps Akademiens. Stockholm.

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. XLII.

Stockh. Vetensk. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Stockholm. 8°. IX, X.

Techn. Inst. St. Pet.: Die Mitteilungen des Technologischen Instituts in St.-Petersburg.

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. VI, VII.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XX.

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. XXXVII.

Toul. Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Toulouse. Douladoure-Privat. 8°. (8) VII.

Ups. N. Act.: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4°. (3) XII.

Ven. At. Atti: Atti dell' Ateneo Veneto. Venezia. Cecchini. 8°.

Ven. At. Riv.: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. (9) I.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (6) III.

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia.

Wash. Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. VII, VIII.

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. (2) XXIV, XXV, XXVI.

Wiedemann Beibl.: Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben unter Mitwirkung befreundeter Physiker von G. und E. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. IX.

Wien. Allg. Bauztg.: Allgemeine Bauzeitung gegründet von Chr. L. Förster. Redigirt unter Mitwirkung der Architekten E. v. Förster, Th. v. Hansen, Fr. Schmidt von A. Köstlin. Wien. R. v. Waldheim. L.

Wien. Anz.: Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 8°. 1885.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. XC, XCI, XCII.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4°. II, L, LI.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXIX, XXX.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. Berlin. 4°. XXIX.

Zeuthen T.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af J. P. Gram og H. G. Zeuthen. Kopenhagen. 8°. (5) III.

Z. Realsch.: Zeitschrift für das Realschulwesen. X.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

Seite

B Geschichte einzelner Disciplinen

Capitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

Seite

B Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

tel 1 Gleichungen Allgemeine Theorie Besondere algebraische Gleichungen

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1. Niedere Arithmetik.

Capitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

B. Theorie der Formen

Seite

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima.)

Capitel 3. Integralrechnung

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

B. Elliptische Functionen.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen

D. Kugel- und verwandte Functionen.

Achter Abschnitt [illegible] mentare und synthetische

[illegible] metrie.

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen

Capitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie)

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Seite

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

Seite

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde

D. Abzählende Geometrie.

Seite

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Lehrbücher. Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Rau[illegible] [illegible]ten Grades

Seite

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.)

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

Seite

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

B. Elasticitätstheorie.

C. Geometrische Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre

A. Mechanische Wärmetheorie.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

Capitel 2. Astronomie.

Capitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Seite

Anhang.

Verzeichnis

der Herren, welche für den siebzehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A. Herr Prof. August in Berlin.
B. „ Prof. Bruns in Leipzig.
Cly. „ Prof. Cayley in Cambridge.
Dk. „ Prof. Dyck in München.
Dn. „ Dickstein in Warschau.
E. „ Prof. G. Eneström in Stockholm.
E. K. „ Dr. E. Kötter in Berlin.
El. „ Dr. Engel in Leipzig.
F. K. „ Dr. F. Kötter in Berlin.
G. „ Prof. v. Geer in Leiden.
Gbs. „ Prof. Gibson in Glasgow.
Glr. „ Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm. „ Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr. „ Prof. Günther in München.
H. „ Prof. Hoppe in Berlin.
Hch. „ Dr. Henoch in Berlin.
Hk. „ Prof. Hauck in Berlin.
Hr. „ Prof. Hamburger in Berlin.
Hz. „ Prof. Hurwitz in Königsberg i. Pr.
Js. „ Dr. Jolles in Aachen.
Kr. „ Dr. Krazer in Würzburg.
L. „ Prof. Lie in Leipzig.
La. „ Prof. Loria in Genua.
Lbg. „ Dr. Lorberg in Strassburg.
Lg. „ Dr. Lange in Berlin.
Lp. „ Prof. Lampe in Berlin.
Ls. Herr Lazarus in Hamburg.
M. „ Prof. F. Müller in Berlin.
Mi. „ Dr. Michaelis in Berlin.
Mn. „ Prof. Mansion in Gent.
My. „ Prof. F. Meyer in Tübingen.
Mz. „ Dr. Maynz in Ludwigslust.
N. „ Prof. Neumann in Leipzig.
Nt. „ Prof. Netto in Giessen.
P. „ Dr. Petzold in Hannover.
Rdt. „ Dr. Reinhardt in Meissen.
R. M. „ Dr. R. Müller in Berlin.
Rs. „ Dr. Rosochatius in Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Dr. Schlegel in Hagen.
Schn. „ Prof. Schumann in Berlin.
Scht. „ Prof. Schubert in Hamburg.
Se. „ Prof. Segre in Turin.
Sn. „ Dr. Simon in Berlin.
St. „ Prof. Stolz in Innsbruck.
Std. „ Prof. Studnička in Prag.
Sz. „ Prof. Schwarz in Göttingen.
T. „ Dr. Toeplitz in Breslau.
Tx. „ Prof. Teixeira in Porto.
Vi. „ Dr. Vivanti in Mantua.
Wn. „ Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St. „ Prof. W. Stahl in Aachen.
Wi. „ Dr. A. Wassilieff in Kazan.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. Max Henoch, Berlin W, Victoriastr. 29.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Bibliographisch-Literarisches.

M. Marie. Histoire des sciences mathématiques et physiques. T. VI. Onzième période: De Newton à Euler. T. VII. Onzième période: De Newton à Euler. Paris. Gauthier-Villars.

G. Valentin. Vorläufige Notiz über eine allgemeine mathematische Bibliographie. Bibl. Math. 90-92.

Bericht über eine allgemeine mathematische Bibliographie, die von Herrn Valentin geplant worden ist, und die etwa 100,000 Büchertitel enthalten wird. E

Habbe und Starkoff. Die russische Bibliographie der Mathematik, Mechanik, Astronomie, Physik und Meteorologie für das Jahr 1884. Odessa

W. W. Bobynin. Russische physiko-mathematische Bibliographie (vom Anfange der Buchdruckerkunst bis 1726). Moskau.

Mélanges Graux. Recueil de travaux d'érudition classique dédiés à la mémoire de Charles Graux. Paris.

Nach dem Referate über diese Sammlung in Darboux Bull. (2) IX. 224-225 sind folgende Beiträge über die Geschichte der Mathematik beigesteuert worden: 1) F. Blass, einige mathematische Bruchstücke vom alten Pythagoreer Archytas von Tarent. 2) J. L. Heiberg, Rückübersetzung der Archimedischen Abhandlung: über die auf dem Wasser schwimmenden Dinge, in das Griechische nach den lateinischen Publicationen von 1543 und 1565. Durch diese Rückübersetzung sollen manche im Lateinischen unverständliche Wendungen erst klar werden. 3) Bouché-Leclerq, astrologische Chorographie, über die Beziehungen, welche die Astrologen zwischen den Zeichen des Tierkreises und den irdischen, ihrem Einflusse unterworfenen Gegenden aufstellten. 4) A. de Rochas d'Aiglun, französische Uebersetzung des Tractatus über die Maschinen von Athenaeus. Lp.

G. Eneström. Notice sur les versions latines des éléments d'Euclide publiées en Suède. Bibl. Math. 1884 79-80.

Beschreibung der beiden lateinischen Euklides-Ausgaben von Gestrinius (Upsala 1637) und Klingenstjerna (Upsala 1741). E.

G. Eneström. Notice bibliographique sur les traductions en suédois des Éléments d'Euclide. Bonc Bull. XVIII 332-342.

Angabe sämtlicher seit 1744 in schwedischer Sprache erschienener Uebersetzungen des Euklid. Hch

G. Govi. L'ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio.
Torino. Paravia XLIX u 171 S.

Die Optik des Ptolemaeus ist nicht, wie man früher glaubte und wie noch Suter in seiner Geschichte der Mathematik angiebt, verloren gegangen: vielmehr existiren 14 verschiedene Handschriften einer lateinischen Uebersetzung derselben, die im 12. Jahrhundert von dem Sicilischen Schriftsteller Eugenius nach dem Arabischen angefertigt ist [cf. F. d. M. III 1871. p. 2, V. 1873. p. 5]. Von dieser Uebersetzung werden hier zum ersten Male nach den in der Ambrosianischen Bibliothek zu Mailand vorhandenen Codices die Bücher 2-5 veröffentlicht. Buch 1 ist verloren gegangen. Zur Erläuterung hat der Herausgeber sorgfältig entworfene Figurentafeln beigegeben sowie eine längere literarische Einleitung, in der es als zweifelhaft hingestellt wird, ob der Verfasser der Optik mit dem berühmten Astronomen Ptolemaeus identisch ist.

Wn.

G. Eneström. Notice sur une nouvelle édition de Diofantos préparée par M. Paul Tannery. Bibl. Math 1884. 47-48.

Enthält Notizen über die aufbewahrten Handschriften Diophant's und über die von Herrn P. Tannery beabsichtigte Herausgabe derselben. E.

P. Tannery. Sur l'époque où vivait Geminus.
Darb. Bull. (2) IX. 283-292.

Blass erblickt in des Geminos *Εἰσαγωγὴ εἰς τὰ φαινόμενα* nur einen Auszug aus dem Buche *Περὶ μετεώρων* des Poseidonios; Tannery erklärt sich auf Grund sorgfältiger Prüfung der Ueberlieferung gegen diese Annahme und hält daran fest, dass Geminos im ersten Jahrhundert vor Christi Geburt gelebt habe.

Gr.

P. Tannery. Proclus et Geminus. Darb. Bull. (2) IX. 209-219.

Eine eingehende Untersuchung der Vorlagen, welche Proklos für seinen Euklid-Commentar benutzt hat. Geminos wird besonders häufig genannt, doch ist bei den verschiedenen Citaten wahrscheinlich ein und dieselbe Schrift des genannten Autors gemeint, deren Titel übrigens auch noch nicht als genau festgestellt gelten kann. Gr.

M. Steinschneider. Études sur Zarkali. Bonc. Bull. XVI. 493-504; XVII. 765-794; XVIII. 343-360.

Nachdem die arabischen und hebräischen Manuscripte der Schriften Zarkali's genau bibliographisch registrirt sind, wird ebenso die spanische Uebersetzung seines Hauptwerks und zugleich die nach dieser Version angefertigte Uebertragung ins Italienische einer eingehenden Analyse unterzogen. Auch lateinische Bearbeitungen des Tractates über das Astrolabium sind vorhanden. Nicht minder stützt sich das Werkchen „Instrumentum saphcae magistri Joannis de Lineriis“ auf die Vorarbeiten des Arzachel; dieser Johann de Lineriis war nach Steinschneider der Lehrer des von einzelnen Historikern erwähnten, aber sonst wenig bekannten deutschen Mathematikers Johann von Sachsen. Ueberhaupt lässt sich nachweisen, dass Arzachel mit seiner Anwendung des Astrolabs zur Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben für die ganze Folgezeit massgebend gewesen ist, so u. A. auch für Regiomontanus. Die weiteren Untersuchungen des Verfassers beziehen sich auf arabische und jüdische Gelehrte, die aus Zarkali schöpften; unter den ersteren begegnet uns beispielsweise der bekannte Arithmetiker Beha-Eddin.

Gr.

G. Eneström. Anteckningar om matematikern Petrus de Dacia och hans skrifter. I., II. Stockh. Öfv. XLII No. 3. 15-27, No. 8. 65-70.

Als Einleitung giebt der Verfasser eine kurze Uebersicht

über das Studium der Mathematik in Skandinavien während des Mittelalters. Dann folgen Notizen über den dänischen Mathematiker Petrus de Dacia und seine Schriften. Seine Lebensverhältnisse betreffend, weiss man nur, dass er Canonicus zu Ribe in Jylland war, 1290 eine mathematische Schrift verfasst hatte, 1326-1327 Rector der Pariser Universität war, und dass er 1347 noch lebte. Er wird häufig mit einem gleichnamigen schwedischen Dominicanermönch († 1288) verwechselt.

Die Schriften des Petrus de Dacia, die nur handschriftlich existiren, sind: ein Commentum super Algorismum prosaicum Johannis de Sacro Bosco, eine Tabula ad inveniendum propositionem cuiusvis numeri und ein computus ecclesiasticus (mit beigefügtem calendarium), enthaltend verschiedene canones und tabulae. Der Verfasser verzeichnet die ihm bekannten Handschriften dieser Arbeiten, giebt eine ausführlichere Beschreibung derjenigen, die er selbst gesehen hat, und referirt kurz über den Inhalt derselben. Zuletzt wird noch erwähnt, dass eine vaticanische Handschrift eine Summa artis geometriae valde bona edita a magistro Petro de Dacia enthält, welche mit der unter dem Namen des Bradwardin publicirten Geometria speculativa identisch ist, und die Wahrscheinlichkeit discutirt, dass Petrus de Dacia der wirkliche Verfasser dieser Schrift ist.

E.

G. Eneström, B. Boncompagni. Question 8. Bibl Math. 94. 196.

Betrifft die „geometria speculativa“ von Bradwardin. Herr Eneström lenkt die Aufmerksamkeit darauf, dass der vaticanische Codex Ottobon 1389 diese Arbeit dem dänischen Mathematiker Petrus de Dacia beilegt. Der Fürst Boncompagni beschreibt einen von ihm erworbenen Codex derselben Arbeit aus dem Jahre 1365, wo Petrus de Dacia ebenfalls als Verfasser angegeben worden ist.

E.

L. de Marchi. Di tre manoscritti del Maurolicio che si trovano nella Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma. Bibl. Math. 141-144, 193-195

Die Handschriften von Maurolicio (Maurolico), über welche Herr de Marchi hier berichtet enthalten vorzugsweise geometrische Arbeiten; die wichtigste ist eine Abhandlung „de figuris planis solidisque regularibus locum implentibus". Bekanntlich hat auch Regiomontanus über diese Frage eine jetzt verschollene Schrift verfasst, welche Maurolicio in der soeben genannten Abhandlung ausdrücklich erwähnt. E.

G. Eneström. Questions 1, 2, 4 und 5. P. Tannery. Questions 6-8 Bibl. Math. 48, 144, 199-200

Diese Anfragen beziehen sich auf verschiedene mathematisch-historische Gegenstände.

1) Es wird von drei kleinen mathematischen Abhandlungen des schwedischen Bischofs Månsson († 1534) berichtet, und gefragt, ob diese etwa nur Abschriften oder Compilationen seien.

2) Ueber das Leben des schwedischen Mathematikers J. P. Stengel, Verfasser einer „Gnomonica Universalis". (Augsburg, 1675).

4) Ueber eine Schrift von D. Melanderhjelm und P. Frisi.

5) Ueber ein Rechenbuch des norwegischen Gelehrten Hauk Erlendssön († 1334).

6) Ueber eine jetzt verschollene Schrift von Golius.

7) Ueber die Schraubenlinie Baliani's.

8) Ueber eine Handschrift von Proklos' „Commentarii in Nicomachi Geraseni Arithmeticam". E.

B. Boncompagni. Intorno alla vita ed ai lavori di Francesco Barozzi. Bonc. Bull. XVII 795-848.

Eine genaue Biographie des in vielen Beziehungen verdienten Geometers Barozzi hat uns bisher gefehlt. Aus einer vene-

tianischen Familie entsprossen, ward derselbe am 9. August 1537 auf der damals zu Venedig gehörenden Insel Kreta geboren; seine Bildung empfing er an der heimatlichen Hochschule zu Padua, und schon 1559 begann er auch an dieser als Lehrer der Mathematik aufzutreten. Von seinem sonstigen Leben ist uns nur sehr wenig überliefert; er lebte später teils in Candia teils in Venedig und erlag in letzterer Stadt am 23 November 1604 einem Schlaganfalle. Unter seinen ziemlich zahlreichen Arbeiten, welche nur zum Teile mit mathematischen Dingen sich beschäftigen, ragt hervor seine Proklos-Ausgabe, der einer der ersten Sachkenner, G. Friedlein, uneingeschränktes Lob zollte, ferner eine Kosmographie und die erste im Druck erschienene Monographie der Lehre von den Asymptoten (problema quod docet, duas lineas in eodem plano designare, quae nunquam invicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur). Den Pappos gedachte Barocius gleichfalls zu ediren; das bezügliche Manuscript befindet sich im Besitze der Pariser Nationalbibliothek. Auch sonst bemerkt man in seinem Nachlasse, wie hier des näheren ausgeführt wird, manch merkwürdiges Document, das wohl verdient hätte ans Licht zu kommen. Anhangsweise lässt Fürst Boncompagni einen Brief Barozzi's an Clavius, worin einige Mängel der Astronomie des Sacrobosco zur Sprache kommen, sowie die Sentenz abdrucken, welche das Inquisitionstribunal am Schlusse eines gegen Barozzi anhängig gewesenen, jedoch noch ziemlich glimpflich ausgegangenen Prozesses erlassen hatte.

Gr

A. Favaro. Conchiusioni sull' accademico incognito oppositore al discorso di Galileo intorno alle cose, che stanno in su l'acqua, o che in quella si muovono. Bonc. Bull. XVIII 321-326.

Unter dem Titel „Considerazioni etc." hatte ein „unbekannter Akademiker" eine Streitschrift gegen die berühmte Abhandlung Galilei's von den schwimmenden Körpern erscheinen lassen. Man hatte als Autor einen gewissen Palmerini in Verdacht, allein

nach Favaro's Studien war es nicht dieser, sondern der damalige Oberaufseher (Provveditore) der Universität Pisa, Arthur Pannochieschi d'Elci. Ein von ihm unterm 27. August 1612 an den Kardinal Borromeo gerichtetes Schreiben dient als wichtigstes Beweismittel. Gr.

A. Favaro. Ragguaglio dei manoscritti Galileiani nella collezione Libri-Ashburnham presso la biblioteca mediceo-laurenziana di Firenze. Bonc. Bull. XVII. 849-878

Die zum Teil mit höchst bedenklichen Mitteln zusammengebrachte Handschriftensammlung Libri's, des bekannten Verfassers der „Histoire des sciences mathématiques en Italie", kam in Besitz des Bibliophilen Lord Ashburnham, und als dieser im Jahre 1878 verstarb, erwarb der italienische Staat mit beträchtlichen Kosten von dessen Erben jene literarischen Schätze. Herr Favaro hat sich nun der Aufgabe unterzogen, im Interesse der von ihm angebahnten Gesamt-Ausgabe der Werke Galilei's die Sammlung nach Manuscripten des grossen Naturforschers zu durchsuchen, und erstattet hier Bericht von den Ergebnissen seiner Nachforschung. Sowohl in Bezug auf Galilei'sche Werke als auch auf Briefe, die von ihm und seinen Schülern herrühren, und endlich auch in Bezug auf den berühmten Inquisitionsprocess enthält die Ashburnham-Sammlung vieles Material; wenn dasselbe auch grossenteils durch ältere Veröffentlichungen bereits bekannt ist, so gewährt doch vieles darunter geschichtliches Interesse.

Gr.

A. Favaro. Notice sur les manuscrits de mathématiques de la collection Libri-Ashburnham achetée par le gouvernement italien. Bibl. Math. 41-46

Herr Favaro giebt hier Auskunft über mehrere mathematische, astronomische und astrologische Handschriften, die der Libri-Ashburnham'schen Sammlung gehören und jetzt in der

Biblioteca Laurenziana in Florenz aufbewahrt werden. Die meisten stammen aus dem Mittelalter her. E.

A. Favaro. Documenti inediti per la storia dei manoscritti Galileiani nella biblioteca di Firenze pubblicati ed illustrati. Bonc. Bull. XVIII. 1-112, 151-230.

Diese äusserst sorgfältig gearbeitete Abhandlung des bekannten Galilei-Forschers enthält neue und wichtige Beiträge zur literarischen Kenntnis der Periode, welche durch den Namen des grossen Mannes gekennzeichnet ist. Von Einzelheiten zu reden ist hier nicht der Ort; erwähnt mag nur werden, dass eine grosse Anzahl von Briefen von Galilei's Lieblingsschüler Viviani neu zu Tage gefördert worden ist. Gr.

C. Reinhardt. Mag. Georg Samuel Dörffel. Ein Beitrag zur Geschichte der Astronomie im XVII. Jahrhundert. Plauen i V. F E Neupert.

Die vorstehende, sehr verdienstliche Leipziger Inauguraldissertation klärt mehrere wichtige Punkte in der Geschichte der theoretischen Astronomie auf. Ihr Held ist der kursächsische Pfarrer Dörffel, der am 11. October 1643 (neuen Stils) zu Plauen geboren ward, in Leipzig Theologie, in Jena unter E. Weigel's Leitung Philosophie und Mathematik studirte und von 1667 bis zu seinem am 6. August 1686 eingetretenen Tode verschiedene Kirchenämter teils in seiner Vaterstadt teils in dem wenig entfernten Weida bekleidete. Das Wenige, was sich von seinen äusseren Lebensverhältnissen ermitteln liess, wird gewissenhaft beigebracht. Wohl in Jena hatte Dörffel jene Neigung zur Sternkunde erfasst, welche ihn durch sein ganzes Leben begleitete; trotz Ueberhäufung mit Berufsgeschäften widmete er dieser Neigung seine Nächte und scheute keine Kosten, um die erforderlichen Hülfsmittel für den Betrieb astronomischer Studien herbeizuschaffen. Seine Bibliothek, deren Katalog uns erhalten blieb,

weist einen sehr stattlichen Bestand gut gewählter Bücher auf; hinsichtlich der Fortschritte seiner Wissenschaft hielt ihn eine mit dem Berliner Hofastronomen Kirch gewechselte Correspondenz auf dem Laufenden, und für Beobachtungen standen ihm neben einem Fernrohr, dessen geringe Güte sein unglaublich scharfes Auge paralysirte, zwei Quadranten und ein Jacobsstab zu Gebote, welchen letzteren er mit Vorliebe und grossem Geschick gebraucht zu haben scheint. Ausser einigen theologischen Abhandlungen veröffentlichte Dörffel neun Arbeiten, von denen sechs selbständig erschienen, während Kirch zwei kleinere Noten über Sonnenfinsternisse in seine „Ephemeriden" und Mencke eine ebensolche über Parallaxenberechnung in die „Acta Eruditorum" aufnahm. Fünf der in die erste Kategorie gehörigen Schriften haben es mit Fragen der kometarischen Astronomie zu thun, und da ist es nun von hohem Interesse, zu constatiren, wie die Erkenntnis des Verfassers stufenweise fortschreitet. Während er sich bei seinen ersten Versuchen nämlich mehr auf reine Beschreibung der Erscheinungen beschränkt und dabei auch dem herrschenden Aberglauben seinen Zoll entrichtet, veranlasst ihn der berühmte Schweifstern von 1680, der Bewegung und Bahnform solcher Himmelskorper nachzuspüren, und indem er seine sämtlichen Beobachtungen vor und nach dem Periheldurchgang sammelte und ordnete, gelangte er zur Stellung und Bejahung der von ihm selbst in folgende Worte gefassten Frage: „Ob nicht dieses (und der andern) Cometen Bewegungslinie eine Parabole sey, dero Focus in das Centrum der Sonnen zu setzen"? Herr Reinhardt untersucht nun auch weiter, ob irgend einer der Autoren, die von verschiedenen Geschichtschreibern als Concurrenten Dörffel's hingestellt wurden, wirklich schon vor letzterem die gleiche Entdeckung gemacht habe; er verneint dies mit Recht und weist insbesondere aus Hevel's Schriften überzeugend nach, dass dieser Astronom über die Trajectorie der Kometen sich in höchst unsicherer Weise ausgesprochen habe. Dörffel's Leistungen sind jedoch hiermit nicht zu Ende. Derselbe hat nämlich unter anderen handschriftlich ausgearbeiteten Abhandlungen von sachlich geringerer Bedeutung auch eine völlig druckfertige „Consideratio globi

ardentis, Lipsiae, Francofurti ad Viadr. et Jenae A. 1683 d. 12. (22.) Aug. resp. observati" hinterlassen; hier zeigt er mittels strenger Construction und Rechnung, wie sich die Bahn eines von verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten beobachteten Metorits objectiv bestimmen lasse. Er erweist sich hier als einen gründlichen Kenner der sphärischen Trigonometrie und der logarithmischen Rechnung. Gr.

G. Eneström. Notice bibliographique sur un traité de perspective publié par Desargues en 1636. Bibl. Math. 89-90.

Bekanntlich ist die erste Schrift von Desargues: „Exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L. Touchant la pratique de la perspective" (1636) von Chasles, Poudra, Hoefer u. a. als ganz verschollen bezeichnet. Der Verfasser hat jedoch ein Exemplar dieser Schrift in der Bibliothek der „Scuola d'applicazione per gl'ingegneri" in Rom gefunden und giebt hier eine Beschreibung dieses Exemplars. E.

P. G. Tait. Note on a singular passage in the Principia. Edinb Proc. XIII 72-78.

Die Note soll zeigen, dass das auf Mariotte angewandte Epitheton „clarissimus" an einer Stelle der Principia ironisch gemeint ist. Cly. (Lp.)

C. J. Gerhardt. Ueber neu gefundene Manuscripte von Leibniz. Berl. Ber. 19-23, 133-143.

Die in Hannover 1884 aufgefundenen Manuscripte enthalten 1) eine Vergleichung der Metaphysik des Aristoteles und des Descartes, 2) Bemerkungen über die Gesetze der Dynamik, 3) Erwiderung auf einen Artikel „Remarques critiques", der in der Histoire critique de la république des lettres über die prästabilirte Harmonie erschienen war. In No. 2 bemerkt Leibniz, dass

er anfangs die Gesetze der Dynamik rein geometrisch behandelt habe, dass aber ausserdem noch metaphysische Begriffe zu Hülfe genommen werden müssten, die in der Natur der Sache selbst lägen. Er zeigt hier den Ursprung des Gesetzes über die Erhaltung der Kraft, dass in der Welt nicht die Bewegungsgrösse, sondern die Grösse der Kraft unverändert bleibt; hiermit griff er bekanntlich zuerst die Dynamik der Cartesianer an.

Lp.

G. Eneström. Notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. Bibl. Math. 1884. 15-16.

Die betreffende Abhandlung, bisher ganz unbekannt, ist anonym herausgegeben, und weder Druckort noch Jahr des Buches sind angegeben. Ein einziges Exemplar ist aufbewahrt (in der Bibliothek in Linköping in Schweden). Die Summation der Reihen wird hauptsächlich mit Hülfe der Differenzenrechnung ausgeführt.

E.

G. Eneström. Notice bibliographique sur un écrit de Condorcet intitulé „Essais d'analyse“. Bibl. Math. 191-192

Es wird gezeigt, dass die betreffende Schrift aus vier früher (1765 - 1768) von Condorcet separat herausgegebenen Abhandlungen zusammengesetzt worden ist.

E.

D. Bierens de Haan. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis-en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Amst. Versl. en Meded. (3) 1. 224-244

Fortsetzung der historischen Studien des Verfassers über die Mathematik und die Naturwissenschaften in den Niederlanden (siehe F. d. M. XVI 1884. 21).

XXVIII. Einiges über Dominicus Bothnia van Burmania.

Dieser Naturforscher (dessen Name eigentlich Douwe Bothma van Burmania ist) wurde am 14. Februar 1664 in Friesland geboren, wo er am 4. April 1726 starb. Er ist bekannt durch seine meteorologischen Studien; er geriet dabei in Streit mit den Professoren jener Zeit, welche von ihren Kathedern hochmütig auf jemand heruntersahen, der hauptsächlich die Praktik zur Richtschnur gewählt hatte, ohne sich an die wissenschaftlichen Formen zu halten. Seine Schriften werden sodann aufgezählt und besprochen. Sie handeln über Wettervorhersagungen, Eisbildung, Gebrauch des Barometers und andere meteorologische Gegenstände, dabei sind sie in verständlicher Sprache geschrieben.

XXIX. Wissenschaftliches Inventar von R. Descartes. Dies Inventar ist durch den Verfasser unter den Papieren von Chr. Huygens, mit deren Untersuchung er sich schon so lange beschäftigt, gefunden. Auf welche abenteuerliche Weise dasselbe unter diese Papiere kam, wird ausführlich erzählt und sodann das Inventar selbst abgedruckt, welches in französischer Sprache aufgestellt ist. Der Verfasser fügt einige Bemerkungen hinzu.

G.

Register, naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken von het wiskundig genootschap „een onvermoeide arbeid komt alles te boven" gedurende het tijdsverloop van 1818-1882. Amsterdam. J. F. Sekken. 445 Seiten.

Die mathematische Gesellschaft „een onvermoeide arbeid komt alles te boven", welche ihren Sitz in Amsterdam hat und Mitglieder in allen Provinzen der Niederlande zählt, feierte im Jahre 1879 das Fest ihres hundertjährigen Bestehens (siehe F. d. M. XI. 1879. S. 13). Jetzt hat die Gesellschaft das obige Register veröffentlicht, welches alle Arbeiten, die durch die Gesellschaft in der Zeit von 1818-1882 herausgegeben worden sind, aufzählt; vielleicht folgt später das entsprechende Register der früheren Arbeiten. Nicht weniger als 3937 Aufsätze werden genannt welche sich über alle Teile der Mathematik erstrecken; alle sind,

gehörig nach den Gegenständen eingeteilt und geordnet, ebenso wie dies in den F. d. M. auch geschieht. Die meisten dieser Aufsätze enthalten Auflösungen von Aufgaben verschiedener Art, welche durch die Gesellschaft alljährlich ausgeschrieben werden. Ferner findet man den Titel aller Arbeiten, welche in die Schriften der Gesellschaft aufgenommen sind, u. a. die der acht ersten Jahrgänge der jetzigen Zeitschrift „Nieuw Archief voor Wiskunde", welche regelmässig fortgesetzt wird.

Das Register ist auf das sorgfältigste durch den Secretär der Gesellschaft, Herrn Bierens de Haan, und die Mitglieder Herrn v. d. Berg und Herrn van Lankeren Matthes zusammengestellt. Eine Liste der Verfasser der Abhandlungen und Aufsätze ist beigefügt. In derselben findet man die Namen fast aller mathematischen Schriftsteller, welche während der genannten Periode in den Niederlanden lebten oder daselbst noch wirken. G.

G. Eneström. Notice sur les écrits mathématiques d'auteurs étrangers publiés en Suède ou traduits en Suédois. Bibl. Math. 45-47, 92-94.

Genaue bibliographische Notitzen über 8 französische und 11 englische Arbeiten, die in Schweden erschienen oder ins Schwedische übersetzt worden sind. Schluss folgt im nächsten Jahrgang der Bibliotheca Mathematica. E.

C. A. Bjerknes. Niels-Henrik Abel, sa vie et son action scientifique. Bord. Mém. (3) I. 1-365.

G. Brunel. Vie de Niels-Henrik Abel par Bjerknes. Darb. Bull. (2) IX. 141-153.

Bertrand. Vie de Niels-Henrik Abel par Bjerknes. Darb. Bull. (2) IX. 190-202.

Im Jahre 1880 veröffentlichte Herr Bjerknes in der „Skandinavischen Revue" in schwedischer Sprache eine Reihe von

Aufsätzen über das Leben Abel's. Herr Hoüel unterzog sich der Mühe einer Uebersetzung ins Französische, der Verfasser selbst einer Neubearbeitung und Erweiterung seiner Abhandlungen, und so entstand ein Werk, welches in biographischer wie auch in wissenschaftlicher Hinsicht Interesse verdient. An Material ist so ziemlich alles zusammengetragen, was erreichbar gewesen ist; aber freilich ist die Gruppirung desselben nach vorgefassten Meinungen erfolgt und wie Herr Bertrand sich ausdrückt: „Das Buch führt zu dem Schlusse einer Verurteilung Jacobi's, und es ist vielleicht in dieser Absicht geschrieben". Die gleichzeitigen Erfolge Abel's und Jacobi's in der Theorie, oder vielmehr in der Begründung der Theorie der elliptischen Functionen glaubte man bisher dem gleichzeitigen Wirken zweier gleichbedeutender Genies verdanken zu müssen: Herr Bjerknes versucht den Nachweis, dass seinem Landsmanne Abel allein der Kranz gebühre, dass Jacobi, schlicht herausgesagt, ein Plagiator gewesen sei.

Es ist mit Freuden zu begrüssen, dass Herr Bertrand in seiner Besprechung der Bjerknes'schen Arbeit, das Unhaltbare solcher Behauptungen, das völlig Unzulängliche der versuchten Beweise klar dargelegt hat. Die Aeusserungen Abel's selbst über seinen grossen Rivalen, die Briefe Jacobi's an Legendre, der Eindruck, den Abel von der Lectüre der Jacobi'schen Notiz in den „Astronomischen Nachrichten" empfing, — und den Herr Bjerknes nicht zu beachten scheint, — die weiteren Entdeckungen des Ueberlebenden, wie die Einführung der Θ-Reihen, die Behandlung der elliptischen Integrale dritter Gattung u. s. f. — alles dies und vieles andere spricht lauter und klarer, als die Anschuldigungen, die Herr Bjerknes auszusprechen für gut befunden hat. Noch ist nicht alles vorhandene Material in dieser Frage publicirt; aber es steht zu hoffen, dass dies bald geschehen werde, und es ist gewiss, dass dasselbe dem jungen Norweger ebenbürtig den Deutschen zur Seite stellen wird.

No.

A. Cauchy. Oeuvres complètes. Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le ministre de l'instruction publique. Ire série, T. V. Paris. Gauthier-Villars. 508 S. 4°.

Dieser Band bringt, als Fortsetzung zu Band IV. (F. d. M. XVI. 1884. 25), alle Noten und Artikel, die Cauchy in den Comptes rendus vom 18. November 1839 bis zum 14. December 1840 veröffentlicht hat (No. 69—111). Lp.

A. F. Möbius. Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Erster Band mit einem Bildnisse von Möbius. Herausgegeben von R. Baltzer. Leipzig. J. Hirzel. XX. u. 634 S.

Mehrere gelehrte Gesellschaften haben sich in den letzten Jahren der Aufgabe unterzogen eine Gesamtausgabe der Werke derjenigen hervorragenden Mathematiker zu veranstalten, die ihnen als Mitglieder angehört haben. Es soll dadurch dem mathematischen Publicum Gelegenheit geboten werden, einerseits die in Originalausgaben kaum noch zu beschaffenden Hauptwerke der bedeutendsten Koryphäen der mathematischen Wissenschaft aus der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts zu erwerben, andererseits die in mathematischen Zeitschriften zerstreuten Abhandlungen derselben in organischem Zusammenhang kennen zu lernen. Um auch Möbius ein solches Ehrendenkmal zu setzen, beauftragte die Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig die Herren Baltzer, Klein und Scheibner damit, die gesammelten Werke Möbius' neu herauszugeben. Der erste Band, dessen Herausgabe Herr Baltzer, ein Schüler von Möbius und der bedeutendste Kenner seiner Schriften, besorgt hat, liegt jetzt vor. Derselbe ist mit einem vortrefflichen Stahlstichbildnis von Möbius geschmückt und enthält in erster Linie das Hauptwerk von Möbius, den Barycentrischen Calcul, hiernach diejenigen Abhandlungen, welche mit ihm in Zusammen-

hang stehen und insbesondere die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften zum Gegenstand haben, also an den zweiten Abschnitt des barycentrischen Calculs sich anschliessen, der von den Verwandtschaften der Figuren und den daraus entspringenden Klassen geometrischer Aufgaben handelt und von Möbius selbst des öfteren als der Hauptteil seines Werkes bezeichnet worden ist. Der Text ist mit grosser Sorgfalt revidirt, die Figuren, die in der Originalausgabe auf besonderen Figurentafeln vereinigt waren, in den Text eingereiht worden. Als ganz besonders wertvolle Zugabe muss die von Herrn Baltzer geschriebene „Vorrede über Möbius" bezeichnet werden. Sie giebt zunächst eine biographische Skizze über Möbius' äussere Lebensverhältnisse und enthält dann eine gedrängte, aber überaus reichhaltige Darstellung und Charakteristik seiner wissenschaftlichen Arbeiten in ihrer chronologischen Reihenfolge, in ihrem Verhältnis zu einander und zu den gleichzeitigen Entdeckungen zeitgenössischer Mathematiker.

Der zweite Band wird die analytische Sphärik, die Theorie der Grundformen der Curven 3. O., die Kreisverwandtschaft, eine Reihe Abhandlungen über Symmetrie und Involution und endlich die Elementarverwandtschaft und die Theorie der Polyeder enthalten. Der dritte Band soll die Statik und die daran sich reihenden Abhandlungen statischen und rein geometrischen Inhalts, der vierte Band die Mechanik des Himmels und eine Anzahl astronomischer Abhandlungen umfassen.

Rdt.

R. Baltzer. Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. Leipz. Ber. 1-6.

Vgl. Abschn. VIII. Cap. 2.

E. Schering. Briefwechsel zwischen G. Lejeune-Dirichlet und Herrn Leopold Kronecker. Gott. Nachr. 361-382.

Die zehn Briefe gehören ausser dem ersten der Zeit von

Dirichlet's Aufenthalt in Göttingen an. Beide Gelehrte machen sich Mitteilungen über die Probleme, mit denen sie gerade beschäftigt sind: Herr Kronecker über die Theorie der algebraischen Gleichungen, die zahlentheoretischen Formen, die complexen Einheiten, die complexe Multiplication der elliptischen Functionen, die Beziehungen zwischen den quadratischen Formen, der Algebra und den elliptischen Functionen, zum Teil Gegenstände, die erst in den letzten Jahren veröffentlicht sind. Dirichlet's Antworten beziehen sich zunächst auf die ihm mitgeteilten Ideen des jüngeren Freundes, sodann aber schreibt er über den Plan zu einer hydrodynamischen Abhandlung, über den Zusammenhang zwischen den quadratischen Formen von negativer Determinante und den elliptischen Functionen für den Fall einer Primzahl Determinante von der Form $4n+3$, endlich über die Summe $\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{n}{s}\right]$, wo [ ] nach Gauss das grösste Ganze bezeichnet.

Lp.

G. van der Mensbrugghe. Joseph-Antoine-Ferdinand Plateau. Belg. Annuaire LI. 389-486.

Joseph Plateau, geb. zu Brüssel d. 14. October 1801, gest. zu Gent d. 15. September 1883, Professor der Physik an der Universität Gent von 1835—1883, erblindet seit 1843, von welchem Jahre an er keine Vorlesungen mehr gehalten hat. In der Physik hat er eine grosse Anzahl Abhandlungen und Notizen geschrieben über die subjectiven Gesichtserscheinungen, über das Gleichgewicht der dem Einflusse der Schwere entzogenen Flüssigkeiten, über die Messung der Empfindungen u. s. w. Einen Teil seiner Untersuchungen hat er in dem grossen Werke zusammengefasst: „Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires“. (Gand. 1873. 2 vol.) Man findet in ihm manche Entwickelungen bezüglich der Theorie der Minimalflächen oder Elassoide; in dieser Beziehung interessirt jenes Buch auch die Mathematiker. Ausserdem hat Plateau einige rein mathematische Noten verfasst. Er hat diejenigen singulären

Punkte der transcendenten Curven entdeckt, die Verdoppelungspunkte (points de dédoublement) genannt werden (F. d. M. IX. 1877. 304-305). Eine vollständige Liste der Arbeiten Plateau's schliesst die Biographie des Herrn Van der Mensbrugghe.

Mn. (Lp.)

G. B. Biadego. Intorno alla vita ed ai lavori di Alberto Castigliano. Bonc. Bull XVIII. 293-320.

Carlo Alberto Castigliano, geb. 8. November 1847, gest. 25. October 1884, arbeitete sich mit grosser Energie aus beschränkten Verhältnissen heraus, studirte die Ingenieur-Wissenschaft und war zuletzt „Capo dell' ufficio d'arte" der Eisenbahnen Ober-Italiens. Seine wissenschaftlichen Arbeiten betreffen die Theorie der Elasticität. Ausser verschiedenen kleinen Abhandlungen hat er an grösseren Werken veröffentlicht: Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Turin. A. F. Negro 1879-1880. Manuale pratico per gli ingegneri. 3 vol. Torino. A. F. Negro. 1882-1884. Teoria delle molle. Torino. A. F. Negro. 1884. Die von Herrn Biadego mit Wärme geschriebene Skizze schildert Castigliano's Lebenslauf und die Entstehung seiner wissenschaftlichen Arbeiten. In einem zweiten Teile soll der Einfluss der letzteren auf den Fortschritt der Wissenschaften gewürdigt werden. Eine von Herrn Boncompagni zusammengestellte Liste aller Veröffentlichungen des jung gestorbenen Gelehrten befindet sich am Schlusse des Aufsatzes. Lp.

G. Teixeira. J. A. Martins da Silva. Teixeira VI. 194-196.

Biographische Notizen über diesen Mathematiker (geb. zu Lissabon d. 22. August 1858, gest. d. 12. November 1885). Verzeichnis seiner Arbeiten. Tx (Lp.)

G. Cantor. Ludwig Scheeffer (1859-1885). Necrolog. Bibl Math 197-199

Enthält biographische Notizen, ein Schriftenverzeichnis und einige Bemerkungen über die wissenschaftlichen Leistungen des allzu früh verschiedenen jungen Mathematikers Ludwig Scheeffer (geboren in Königsberg den 1. Juni 1859, gestorben in München den 11. Juni 1885). E.

C. Jordan, O. Bonnet, H. Faye, E. Renan. Discours prononcés aux funérailles de M. Serret le jeudi 5 mars 1885 C. R. C. 647-681, Darb. Bull. (2) IX. 123-132.

Joseph Alfred Serret, geb. d. 30. August 1819 zu Paris, 1838 Schüler der École Polytechnique, 1848 Examinator für die Aufnahme in diese Schule, 1849 an Stelle von Francoeur auf dem Lehrstuhl für Algebra an der Sorbonne, 1856 an Stelle von Leverrier auf dem für Astronomie ebenda, Professor der Himmelsmechanik am Collège de France, für Differential- und Integralrechnung an der Sorbonne, Mitglied des Bureau des Longitudes, 1860 (19. März) Nachfolger von Poinsot in der Section für Geometrie im Institut. Im Jahre 1872 zu Strassburg schwer erkrankt, blieb er leidend und unfähig zu fernerer productiver Thätigkeit bis zu seinem Tode zu Versailles am 2. März 1885. Lp.

J. Bertrand, Ch. Hermite, J. Tannery. Discours prononcés aux obsèques de M. Bouquet. C. R. CI. 585-588, Darb. Bull. (2) IX. 301-305.

Reden gehalten zum Gedächtnis des am 9. September 1885 verstorbenen bekannten französischen Mathematikers. Derselbe war während siebzehn Jahre Lehrer an der École Normale und seit 1875 Mitglied de l'Académie des Sciences.

Hch.

Zienger. Erinnerungen an A. J. Dawidoff. Moskau. (Russisch)

Nekrolog für A. J. Dawidoff, Professor an der Universität zu Moskau, gestorben im Jahre 1885. Derselbe war ein besonders in Russland wegen seiner wissenschaftlichen und pädagogischen Thätigkeit sehr geschätzter Mathematiker. Wi.

A. W. Wassilieff. Die Bedeutung des Herrn Professor Weierstrass in der gegenwärtigen Entwickelung der reinen Mathematik. Phys. math. Wiss. (B.) I. 225-231, 257-264. (Russisch.)

Eine Rede gehalten von dem Verfasser in der physiko-mathematischen Gesellschaft zu Kasan zur Feier des vollendeten siebzigsten Lebensjahres des Herrn Weierstrass. Wi.

P. Mansion. Discours sur les travaux mathématiques de M. Eugène-Charles Catalan. Liège Mém. XII. 1-38; Mathesis V. Suppl. II. 1-38.

Rede, gehalten bei der Beförderung des Herrn Catalan in den Ruhestand. I. Einleitung: Catalan, geb. zu Brügge 1814, aus der École Polytechnique 1835 entlassen, Assistent (répétiteur adjoint) in dieser Schule 1838. II. Wahrscheinlichkeitsrechnung; Theorie der Combinationen. III. Determinanten, vielfache Integrale. IV. Verschiedene Untersuchungen aus der Analysis. V. Untersuchungen über die Minimalflächen (Elassoide), andere geometrische Abhandlungen. VI. Herr Catalan und der Staatsstreich 1851; er verlässt die École Polytechnique und zieht sich auf den Privatunterricht zurück. VII. Didaktische Werke: Geometrie, Lehrbuch über Reihen. VIII. Verschiedene Untersuchungen: Theorie der halbregelmässigen Polyeder. IX. Ernennung zum Professor an der Universität zu Lüttich (1865). X. Arbeiten seit 1865: Zahlentheorie, Functionen X_n, elliptische Functionen. (Untersuchungen über einige unendliche Producte), Theorie der Regelflächen, Studien über die Wellenfläche. Mn. (Lp.)

E. Catalan. Mélanges mathématiques. Tome I. Liège Mem. XII 1-407 Paris Gauthier-Villars.

Bericht erfolgt im Jahrgange 1886, vereinigt mit dem über Bd. II., der den Bd. XIII der Mémoires de la Société Royale de Liège bildet. Mn. (Lp.)

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

P. Tannery. Le vrai problème de l'histoire des mathématiques anciennes. Darb. Bull. (2) IX. 104-120.

Der Verfasser lässt in diesem an scharfsinnigen Betrachtungen reichen Aufsatze die Errungenschaften auf dem Gebiete der mathematischen Geschichtsforschung vor unserm Auge vorüberziehen, charakterisirt die methodischen Fortschritte in der Neuzeit und signalisirt die Punkte, welche noch besonders der Aufhellung bedürfen. Namentlich hebt er die Bedeutung des von Proklos zum ersten Buche der euklidischen Elemente ausgearbeiteten Commentars hervor; es gelte jetzt, den Quellen nachzuforschen, aus denen Proklos geschöpft habe, denn die Geschichte der Geometrie des Eudemus habe er allem Anschein nach nicht im Originale gekannt. Gr.

P. Tannery. Le classement des mathématiques, d'après Geminus. Darb. Bull. (2) IX. 261-276.

Die erste eingehendere Klassification der mathematischen Disciplinen rührt, dem Berichte des Proklos zufolge, von Geminos her; ausser für Proklos ist Geminos auch für den etwas früheren Alexandriner Anatolios massgebend gewesen. Danach zerfällt die reine Mathematik in Arithmetik (modern: Zahlentheorie) und Geometrie, die angewandte in Logistik (modern: Rechenkunst), Geodäsie, Optik, Kanonik (modern: Akustik), Mechanik und Astronomie. Diese Einteilung, Anatolios will auch

den mathematischen Teil der militärischen Wissenschaften hinzugenommen haben, ist jedenfalls vollkommener und schärfer, als die bis dahin in Geltung stehende, welche auf Pythagoras zurückgeführt wird. Gr.

Die philosophische, wissenschaftliche und pädagogische Bedeutung der Geschichte der Mathematik. Phys.-math. Wiss. (A) I 1-16, 97-121. (Russisch.

Der Ursprung, die Entwickelung und der heutige Zustand der Geschichte der Mathematik. Phys.-math. Wiss. (A) I. 195-216. (Russisch.)

Historische Skizzen zur Entwickelung der physikomathematischen Kenntnisse in Russland. Phys.-math. Wiss (A) I. 17-33, 97-112, 217-240. (Russisch.)

Historische Studien über die russische mathematische Litteratur der XVII. Jahrhunderts. Wi.

J. Thurion. Histoire de l'arithmétique. Bruxelles, Vromant. VIII u. 164 S. 8°.

Uebersicht über die Geschichte der Arithmetik im Altertum (Griechen und Römer) und im Mittelalter. 1. Zählen an den Fingern; das Zählen in der Schrift (Hieroglyphen, Herodianische Zählung). 2. Klassische Zählungsart der Griechen (mit 27 Zeichen geschrieben; des Archimedes Sandbrett). 3. Brüche. Die Teilungsarten in Griechenland und in Egypten; sexagesimale Brüche. 4. Praktische Arithmetik: Abacus; Multiplication nach dem Verfahren von Apollonius; Conjectur über das Archimedische Verfahren zur Quadratwurzel-Ausziehung. 5. Pythagoras und Plato. 6. Euklides (gelegentlich Eratosthenes, Theon, Nikomachus, Jamblichus, Thymaridas). 7. Diophantus. 8. Die Römer. 9. Boetius. 10. Die Inder (22 Seiten, eins der besten Capitel des

Buches). 11. Die Araber. Der Verfasser lässt die Authenticität der Geometrie des Boetius zu, den Uebergang der indischen Ziffern ohne die Null zu den Neupythagoreern, dann zu den abendländischen Arabern; die Null kam danach von den Indern zu den morgenländischen Arabern. 12. Das früheste Mittelalter; Gerbert. 13. Abacisten und Algorithmistiker. Decimalbrüche und Logarithmen. 14. Bibliographische Notizen. Eine Tafel giebt die Ziffern Indiens zu verschiedenen Epochen, die der Araber und des Mittelalters. Mn. (Lp.)

R. Klimpert. Kurzgefasste Geschichte der Arithmetik und Algebra. Eine Ergänzung zu jedem Lehrbuche der Arithmetik und Algebra. Hannover. C. Meyer.

Der vom Verfasser angestrebte Zweck kann als im allgemeinen erreicht betrachtet werden. Im einzelnen freilich hat der Umstand so manchen Nachteil mit sich gebracht, dass ganz gleichmässig aus guten und schlechten Quellen geschöpft wurde. Gr.

P. Tannery. Sur l'arithmétique Pythagoricienne. Darb. Bull. (2) IX. 69-89.

Der arithmetische Tractat des Jamblichos ist nach der rein wissenschaftlichen Seite hin durch Nesselmann und Cantor genügend erörtert, wogegen er als Fundgrube geschichtlicher Nachrichten noch weniger gewürdigt ward. Die vorliegende Arbeit dient zur Ausfüllung dieser Lücke. Die sogenannten „Theologumena arithmetices“ von unbekanntem Verfasser liefern eine Ergänzung zu dem nicht vollständig auf uns gekommenen Buche des zuerst genannten Neupythagoreers. Gewisse Andeutungen beider Schriften machen es wahrscheinlich, dass die altpythagoreische Schule die theoretische Arithmetik in dem Sinne behandelte, dass zuerst die Zahlen im ganzen studirt, dann aber die charakteristischen Eigenschaften für jede der zehn ersten Zahlen im besondern untersucht wurden. Von den Persönlich-

keiten der pythagoreischen Richtung und von den individuellen Leistungen derselben erfahren wir folgendes. Pythagoras definirte den Zahlbegriff, entdeckte die nach ihm benannten rechtwinkligen Dreiecke, die befreundeten Zahlen (284 und 220) und die drei Hauptgattungen der Proportionen; Archytas bildete die Proportionenlehre weiter aus, worin ihm Eudoxos, Myonides und Euphranor nachfolgten; Klinias unterschied scharf die vier mathematischen Fundamentaldisciplinen; Thymaridas bildete und löste das durch die n Gleichungen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = s; \quad x_1 + x_i = a_{i-1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

charakterisirte lineare System („Epanthem"). Dieser Thymaridas darf als einer der wenigen Griechen gelten, die über Arithmetik nicht bloss speculirt, sondern dieselbe auch in ernster und reeller Weise vorwärts gebracht haben. Gr.

W. Schoenborn. Die von Diophant überlieferten Methoden der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln. Schlömilch Z. Hl.-A. XXX 81-90.

Verfasser glaubt in der zwölften und folgenden Aufgabe des fünften Buchs von Diophant's Ἀριθμητικά den Schlüssel zu der Methode aufgefunden zu haben, deren sich die Alten bei der angenäherten Berechnung quadratischer Irrationalitäten bedienten, und deren Reconstruction so vielfach versucht ist. Diophant zerlegt eine Zahl a je nach den Umständen in eine Summe von 2, 3, 4 Quadraten, deren Differenzen Grössen werden, die <1, und deren Seitenzahlen dem Ausdruck $\sqrt{a}$ annähernd gleich sind. Ein Beispiel wird den Gedankengang des Verfassers am besten klarstellen. Um $\sqrt{58 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}}$ zu ermitteln, vereinigt der Verfasser, was allerdings dem griechischen Geiste nicht völlig entspricht, und findet $\frac{1}{4}\sqrt{935}$. Aus der Relation $935x^2 + 1 = (31x - 1)^2$ folgt $x = \frac{31}{13}$, also $\sqrt{935} = 31 - \frac{13}{31} = 30 + \frac{18}{31} = 28 + \frac{80}{31}$,

somit $\frac{1}{4}\sqrt{935} = 7 + \frac{20}{31}$, was mit dem heronischen Werte $7 + \frac{2}{3}$ sich ziemlich deckt. Jedenfalls verdient dieser Gedanke und nicht minder das, was von der Lösung der Pell'schen Gleichung gesagt wird, alle Beachtung. Gr.

S. A. Christensen. Indförelsen af Regning med Decimalbröker i Danmark. Zeuthen T. (5) IV. 149-162.

Der Verfasser macht die Thatsache bekannt, dass die Anwendung der Decimalbrüche, welche zum ersten Mal von Stevin in seiner Schrift La Disme 1585 entwickelt war, schon im Jahre 1602 dem dänischen Publikum bekannt gemacht wurde, indem ein in diesem Jahre erschienenes Rechenbuch von Christoffer Dybvad, betitelt „Decarithmia, ded er Thinde Regnskab“ in dänischer Sprache geschrieben, eine ausführliche Darstellung der Lehre von den Decimalbrüchen enthielt. Gm.

O. Baumgart. Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. Eine vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheoremes in der Theorie der quadratischen Reste und der denselben zu Grunde liegenden Principien. Schlömilch Z. Hl.-A. XXX. 169-236, 241-277.

Eine umfassende historische und kritische Zusammenstellung aller bezüglichen Arbeiten bis zum Jahre 1885. Es wird zunächst das vorhandene Material übersichtlich geordnet und (zur Bequemlichkeit des Lesers in möglichst einheitlicher Bezeichnung) vollständig dargestellt; sodann folgt die Charakteristik der einzelnen Beweise und die genauere Vergleichung der dabei in Frage kommenden Principien.

Der erste Teil gibt die „Darstellung der Beweise für das quadratische Reciprocitätsgesetz“. I. Capitel. Vorarbeiten von Fermat bis Legendre. Bachet de Meziriac, Fermat (1658), Frenicle (1641) als Vorläufer. Erste Formulirungen des Gesetzes

durch Euler (1783) und Legendre (1785). Jacobi's Verallgemeinerung des Legendre'schen Symbols. — II. Capitel. Gauss' Beweis durch vollständige Induction in der von Dirichlet gegebenen Form dargestellt. — III. Capitel. Beweise durch Reduction: 1. Gauss' dritter Beweis. 2. Gauss' fünfter Beweis. 3. Eisenstein's geometrischer Beweis (Crelle 28). 4. Beweis von Genocchi (Mém. des sav. étr. XXV, 1852). 5. Beweis von Stern (Gött. Nach. 1870). 6. Beweis von Zeller (Berl. Ber. 1872). 7. Beweis von Kronecker (Berl. Ber. 1876). 8. Beweis von Buniakoffsky (Bull. de St. Petersb. Bd. 22, 1876). 9. Beweis von Schering (Gött. Nachr. 1879, C. R. Bd. 88). 10. Beweis von Petersen (Am. J. Bd. 2, 1879, Zeuthen T. 1879). 11. Beweis von Voigt (Schlömilch Bd. 26, 1881). 12. Beweis von Busche (Göttinger Dissertation 1888). — IV. Capitel. Eisenstein's Beweis durch functionentheoretische Sätze (Crelle 29, 1845). — V. Capitel. Beweise durch Sätze aus der Lehre von der Kreisteilung: 1. Beweis von Gauss und Lebesgue (C. R. 51). 2. Gauss' vierter Beweis. 3. Gauss' sechster Beweis. 4. Beweis von Cauchy-Jacobi-Eisenstein (Bull. de Férussac 12, 1829; Mém. de l'Inst. 18, 451; Crelle 28, 1844). 5. Zweiter Beweis von Eisenstein (Crelle 27, 1844). 6. Beweis von Liouville (C. R. 24, 1847). 7. Erster Beweis von Lebesgue (Liouville J. 12, 1847). — VI. Capitel. Beweise durch Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen: 1. Gauss' zweiter Beweis. 2. Kummer's erster Beweis, und: 3. Kummer's zweiter Beweis (beide in den Abh. d. Berl. Akad. 1861). — VII. Capitel. Die Ergänzungssätze des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und das verallgemeinerte Reciprocitätsgesetz. Auch für die Ergänzungssätze

$$\text{(I)}\quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{und} \quad \text{(II)}\quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

werden alle obigen Beweisformen vorgeführt. 1. Beweis für Formel (I) durch „verwandte Reste" (Euler), für Formel (II) durch vollständige Induction (Gauss). 2. Beweis der Ergänzungssätze durch Reduction (Petersen). 3. Mit Hülfe der Theorie der quadratischen Formen (Gauss). — In betreff des verallgemeinerten Reciprocitätsgesetzes werden Arbeiten von Schering, Kronecker

und Genocchi erwähnt, welche eine Verallgemeinerung des Gauss'schen μ Lemmas geben, bezw. verwerten. — VIII. Capitel. Algorithmen zur Bestimmung des quadratischen Rest- oder Nichtrestcharakters einer Zahl in Bezug auf eine andere: 1. Methode von Gauss; 2. Algorithmen von Eisenstein (Crelle 27, 1844), Lebesgue (Liouv. J. 12, 1847); 3. Die Algorithmen von Gegenbauer (Wiener Ber. 1880); 4. ein Algorithmus von Kronecker (Berl. Ber. 1884).

Der zweite Teil enthält sodann eine genaue Analyse der obigen Beweisen zu Grunde liegenden Principien in fünf Capiteln, welche den Capiteln II bis V des ersten Teils entsprechen, und deren Grundgedanken also durch die oben angeführten Ueberschriften im allgemeinen bezeichnet sind. Die Bedeutung des Beweises durch vollständige Induction, „der nirgend das Gebiet der Congruenzen zweiten Grades verlässt", wird gebührend hervorgehoben. Die zwölf „Beweise durch Reduction" werden in ihren Berührungspunkten und ihren Unterschieden genau geprüft. Die analytischen Voraussetzungen und Grundlagen für Eisenstein's Beweis durch functionentheoretische Sätze, wie auch der Beweise mit Hülfe von Sätzen aus der Theorie der Kreisteilung finden sich in möglichster Vollständigkeit angeführt, besonders die Geschichte der „Summe von Gauss" in ihrer Einzelwendung verfolgt.

Die Schlussbemerkungen geben ein chronologisches Verzeichnis der 25 Beweise und im Anschluss daran Erörterungen über die Art des Eingreifens der einzelnen Forscher in die Entwicklungsgeschichte dieser Theorien. Sn.

E. Narducci. Trattatello sulle divisioni, secondo il sistema dell' abbaco, scritto in Italia innanzi al secolo XII. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 563-566.

Zu den in Summa noch nicht sehr zahlreichen mittelalterlichen Lehrbüchern des Abacusrechnens, deren Kenntnis man Chasles, Friedlein, Olleris, Treutlein, Narducci und Don Balth. Boncompagni verdankt, tritt diese neue Anleitung zum Dividiren

als eine erwünschte Gabe hinzu. Der Autor ist ein Italiener aus Olibanum; welcher der drei mit diesem Namen belegten Oerter in Frage kommt, ist freilich nicht zu bestimmen. Die Zahlzeichen, deren sich der Autor bedient, weichen von den sonst bekannten Formen mehrfach ab. Gr.

G. Eneström. Sur l'origine du symbole x employé comme signe d'une quantité inconnue. Bibl. Math. 41-44.

Es wird gezeigt, dass x nicht, wie Herr P. de Lagarde behauptet hat, den Anfangsbuchstaben des arabischen Wortes šai (Sache) wiedergiebt, da erst Descartes (1637) die Buchstaben x, y, z angewandt hat, um unbekannte Grössen zu bezeichnen. E.

H. B. Nixon and J. C. Fields. Bibliography of linear differential equations. Newcomb Am. J. VII 353-363.

H. G. Zeuthen. Kegelsnitslären i Oldtiden. Kjöbenhavn. Höst & Son.

H. G. Zeuthen. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen. Höst und Sohn. 1886 XIV und 511 S. 8°.

Der competenteste Gelehrte auf dem Gebiete der Geschichte der griechischen Mathematik, Herr P. Tannery, dessen bedeutende Beiträge zum Verständnisse der griechischen Mathematik Herrn Zeuthen, wie er in der Vorrede sagt, oft zur Führung gedient haben, urteilt in seiner Anzeige dieses Buches (Darboux Bull. (2) X. 263), bis jetzt sei die Geschichte der Kegelschnitte im Altertume unverstanden gewesen, und Herr Zeuthen liefere uns nicht nur den Schlüssel dazu, sondern führe uns so, dass wir nicht mehr in die Irre gehen können; noch lange werde es

unmöglich sein von den Kegelschnitten im Altertum zu sprechen, ohne auf dies Meisterwerk zurückzukommen.

Als Zweck der Schrift bezeichnet der Verfasser, „eine geometrische Wiederherstellung des Inhaltes und des Zusammenhanges der antiken Lehre von den Kegelschnitten zu geben und zu begründen".

„Der Darstellungsform der Alten fehlten die Eigenschaften, welche dieselbe zu einem bequemen Mittel hätte machen können, den reichen Inhalt der griechischen Geometrie, geschweige denn die Arbeitsweise derselben, auf spätere Geschlechter zu übertragen. Trotz des Eifers, mit dem die Mathematiker der Renaissancezeit sich auf das Studium der Mathematik geworfen hatten, konnten sich dennoch während der ganzen neueren Zeit neue Einflüsse von Seiten der griechischen Geometrie noch geltend machen. . . . In unserer Zeit fahren dieselben Ursachen fort ihre Wirkung auszuüben, und selbst der, welcher sich einige Bekanntschaft mit den Schriften der Alten erworben hat, wird kaum geneigt sein, die in diesen gewonnenen Resultate genügend hoch zu würdigen. . . . Die Geometrie bei den Alten wurde nicht bloss ihrer selbst wegen entwickelt, sondern diente als Organ für die Grössenlehre."

Im ersten Abschnitte beschäftigt sich der Verfasser mit den Voraussetzungen und Hülfsmitteln, den Proportionen und der geometrischen Algebra. „Die Hülfsmittel sind, wenn auch der Begriff Coordinatensystem nicht aufgestellt wird, dieselben, welche wir benutzen, nämlich rechtwinklige und schiefwinklige Coordinaten, welche die Griechen überdies mit grösserer Freiheit anzuwenden verstanden, als es im 17. und 18. Jahrhundert der Fall war." Die geometrische Algebra, die in der antiken Lehre von den Proportionen ihr Fundament besass, „hatte zu Euklid's Zeiten eine solche Entwickelung erreicht, dass sie dieselben Aufgaben bewältigen konnte wie unsere Algebra, solange diese nicht über die Behandlung von Ausdrücken zweiten Grades hinausgeht, ein Gebiet, welches sie auch in ihrer Anwendung auf die Lehre von den Kegelschnitten ausgefüllt hat. Eine solche Anwendung entspricht der Anwendung unserer Algebra in der analy-

tischen Geometrie. . . . Insofern man jedoch im Altertum keine negativen Grössen kannte, musste man das, was wir in einer gemeinsamen algebraischen Entwickelung vereinigen können, in verschiedene Sätze mit den zugehörigen Beweisen zerlegen." Da es nicht möglich ist, den reichen Inhalt des Buches hier zu zergliedern, so muss eine allgemeine Uebersicht genügen. Es zerfällt in 22 Abschnitte und einen Anhang I.: Apollonius' Vorrede zur Schrift über die Kegelschnitte, II.: Pappus' Mitteilungen über Apollonius' 8 Bücher über die Kegelschnitte, im Urtexte und in Uebersetzung. Die Behandlung schliesst sich vorzugsweise an die sieben erhaltenen Bücher des Apollonius über den Gegenstand an, benutzt ferner die Abschnitte aus Euklid's Elementen, welche besondere Anwendung finden, ferner die Schriften von Archimedes und die anderen Arbeiten des Apollonius. Endlich aber wird alles, was durch die ausschliessliche Rücksichtnahme der Alten auf logische Vollständigkeit verdeckt wird, hervorgesucht und durch Benutzung moderner Darstellungsmittel ans Licht gebracht. Zur Lösung dieser schwierigen Aufgabe hat sich Herr Zeuthen durch ein langjähriges Studium so vorbereitet, dass er sich in die Darstellungsform der antiken Geometer völlig eingelebt hat, dass er deshalb Proben von ihrer Anwendung auf die Lösung geometrischer Aufgaben liefert. Indem er nun den Nachweis führt, dass das Lehrbuch des Apollonius durchaus nicht den gesamten Inhalt seines Wissens über die Kegelschnitte giebt, sondern eben nur ein kunstvolles Lehrgebäude zur Einführung in die Kenntnisse dieser Curven darstellt, ähnlich wie Euklid's Elemente ein Lehrbuch zur Einführung in die Elementar-Geometrie sind, wird es notwendig, an der Hand der oben angegebenen Quellen Vermutungen darüber aufzustellen, wie weit das Wissen der Alten auf diesem Gebiete überhaupt gereicht habe. Die vorsichtige und scharfsinnige Entwickelung der hierzu erforderlichen Schlussreihen machen das Studium des Werkes zu einem höchst genussreichen, und selbst wenn Einzelheiten durch Specialuntersuchungen berichtigt werden sollten, wird das Buch als umfassende Darstellung der hochentwickelten griechischen Lehre von den Kegelschnitten und als geistvoll und ansprechend

geschriebenes Werk, in welchem nach Herrn Tannery eine antike Methode wieder aufgefunden ist, noch auf lange hin wertvoll sein. Lp.

P. Tannery. Les applications de la géométrie dans l'antiquité. Darb. Bull. (2) IX. 311-324.

Es werden hier gewisse Anwendungen der Geometrie auf Astronomie und Mechanik namhaft gemacht, welche den griechischen Mathematikern geläufig waren. Zur Sprache kommen erstlich Heron's Methode, geodätische Messungen mit Hülfe des als „Diopter" bezeichneten Universalinstruments anzustellen, sodann die „Meteoroskope" des Geminos und Ptolemäus, mittelst deren Sternhöhen auch ausserhalb des Meridians zu nehmen waren, ferner die verschiedenen Sonnenuhren der Alten, die Optik und deren Verwendung für scenographische (Kulissen-)Darstellung. Die Mechanik machte von geometrischen Hülfssätzen vielfach Gebrauch bei der Anfertigung von Kriegsmaschinen und Automaten; in der theoretischen Mechanik war freilich nur Archimedes glücklich, Pappos scheiterte vollständig bei dem Versuche, das statische Grundgesetz der schiefen Ebene zu begründen, und es ist als eine starke Uebertreibung zu rügen, dass man in antiken Werken eine Vorahnung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten hat finden wollen. Gr.

S. A. Christensen. Et Bevis hos Archimedes. Zeuthen T. (5) IV. 47-50.

Darstellung der Archimedischen Exhaustionsmethode in ihrer Anwendung auf die Kubatur der Rotationskörper. Gm.

H. G. Zeuthen. Nogle Bestemmelser af Pyramidens Volumen. Zeuthen T. (5) IV. 175-179.

Zusammenstellung der von Euklid und von Archimedes benutzten Methoden, um das Volumen einer Pyramide zu bestimmen, nebst den modernen Darstellungen der nämlichen Aufgabe. Gm.

S. Günther. Die Erfindung des „Baculus Geometricus". Bibl Math 137-140.

Man hat bisher geglaubt, dass der „Baculus Geometricus" von Regiomontanus erfunden worden ist. Herr Günther zeigt hier, dass dies Instrument schon in einem um das Jahr 1450 verfassten Aufsatze De baculo geometrico beschrieben ist und also jedenfalls vor Regiomontanus bekannt war. E.

H. Hankel. Esquisse historique sur la marche du développement de la nouvelle géométrie. Traduit de l'allemand par Ed. Dewulf. Paris. Gauthier-Villars

M. Zwerger. Die lebendige Kraft und ihr Mass. Ein Beitrag zur Geschichte der Physik. München Lindauer'sche Buchhandlung (Schöpping), IV u. 291 S. 8°

Der Streit zwischen den Anhängern von Leibniz und denen von Descartes über das Mass der lebendigen Kraft (1686—1754) wird in dem vorliegenden Buche quellengemäss dargestellt. Die einzelnen Schriften werden in chronologischer Folge vorgeführt, nicht bloss weil diese Behandlung dem Verfasser als die natürlichere erscheint und Wiederholungen, welche bei der getrennten Darstellung der beiden Richtungen notwendig eintreten müssten, vermeiden lässt, sondern insbesondere weil sie ein lebendigeres Bild des Kampfes bietet. Hauptsächlich bilden daher längere Auszüge solcher Art aus den sich folgenden Streitschriften, welche am besten die Ansichten der einzelnen Gelehrten kennzeichnen, den Inhalt des Buches, das somit dem Leser die Mühe des Aufsuchens und Nachschlagens abnimmt. Kritische Bemerkungen fügt der Verfasser nur da hinzu, wo ihm dies nötig und zulässig erschien. Zuweilen war dies überflüssig, nämlich dann, wenn die Arbeit des einen Autors selbst eine Kritik des anderen enthielt. An den Schluss des Werks sind die den Streit beendigenden Arbeiten von d'Alembert (1743) und Kant (1747) gestellt,

obschon auch noch nach ihnen mehrere Abhandlungen, ohne von ihnen Notiz genommen zu haben, erschienen sind. Jener brachte bekanntlich dadurch den Kampf zur Ruhe, dass er den Streitenden nachwies, der Streit drehe sich um Wörter, denen ein verschiedener Sinn zukomme, in der späteren Terminologie um die „Bewegungsgrösse" und die „lebendige Kraft" oder „kinetische Energie"; zuweilen lief auch wohl das Missverständnis der „bewegenden Kraft" mit unter. Aus Kant's Schrift: „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte" etc. werden S. 256—289 Beweisstellen abgedruckt; doch kann der Referent nicht in das unbedingte Lob mit einstimmen, welche dieser Jugendarbeit des Königsberger Philosophen sonst von anderen und auch hier vom Verfasser gespendet ist. Denn in dem Mitgeteilten ist nicht nur vieles unklar, sondern manches entschieden falsch. Lp.

J. Henrici. Die Erforschung der Schwere durch Galilei, Huygens, Newton, als Grundlage der rationellen Kinematik und Dynamik historisch-didaktisch dargestellt. Pr. Gymn. Heidelberg. 40 S. 4°.

Der Verfasser untersucht zuerst, „was uns von diesen ersten Quellen der Mechanik übrig bleibt, wenn wir den Kraftbegriff ständig beiseite lassen und nur die Bewegungserscheinungen ins Auge fassen, sodann aber, wie sich die Begriffe Kraft und Masse bei denselben Forschern entwickelt haben". Auf die zur Zeit auftauchenden Hypothesen über die Schwere wird nicht eingegangen. Unter fortwährender Beziehung auf die Originalschriften der drei im Titel genannten Physiker und mit Berücksichtigung der Ansichten der Historiker auf diesem Gebiete (Poggendorff, Dühring, Mach, Günther u. s. w.) spürt der Verfasser jedem Fortschritte in der Entwickelung der Grundvorstellungen der Mechanik nach, wie sich dieselben an der Schwere allmählich aufgebaut haben. Bei dem Massenbegriff hätte Referent ein genaueres Eingehen auf die Einheiten gewünscht, insbesondere eine schärfere Sonderung der durch den Namen Kilogramm unzweideutig defi-

nirten Masse und der im Technischen nicht ganz scharf damit bezeichneten Kraft. Eine Erläuterung dieses Unterschiedes ist ja gegeben; indessen würde die Zurückführung auf die jetzt eingeführten Einheiten die Klarheit der doch auch für Schüler bestimmten interessanten Auseinandersetzungen gefördert haben. Der in zehn Paragraphen gegliederte Inhalt behandelt der Reihe nach die Fallbewegung, die Wurfbewegung, den Fall auf der schiefen Ebene und die Pendelbewegung, die Centralbeschleunigung, die gegenseitigen Beschleunigungen aller Körper, das Beharrungsgesetz, das Gewicht als beschleunigende Kraft und als bewegte Masse, die Veränderlichkeit der Masse, Kraft und Masse in der theoretischen Mechanik. Lp.

M. Rühlmann. Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik. Leipzig. Baumgärtner.

H. Servus. Die Geschichte des Fernrohrs bis auf die neueste Zeit. Berlin. J. Springer. VI und 135 S.

In Bezug auf die vorliegende Schrift muss sich Referent dem Urteil anschliessen, das Herr Czapski in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1886 gefällt und begründet hat. Danach ist die Schrift keine Originalarbeit, wie man nach Titel, Vorrede und nach verschiedenen Stellen des Inhalts glauben könnte, sondern lediglich eine Reproduction aus älteren und neueren bekannten Werken, denen sie grossenteils sogar dem Wortlaute nach entlehnt ist. Die Darstellung ist nicht geeignet, ein klares Bild der Erfindung und der Geschichte des Fernrohrs zu geben. Bei der Besprechung der neueren Zeit werden Ansichten reproducirt, die vor 60 Jahren als berechtigt angesehen werden konnten, die aber heute nur der sich aneignen kann, der die seitherigen Fortschritte der Theorie und Praxis völlig ignorirt.

Wn.

P. G. Tait. Hooke's anticipation of the kinetic theory and of synchronism. Edinb. Proc. XIII. 118.

Macht auf die sehr merkwürdige Schrift von Robert Hooke aufmerksam: Lectures de potentia restitutiva or of spring (London 1678). In ihr ist eine klare Feststellung des Princips des Synchronismus enthalten, das von Stokes auf die Erklärung der Grundlage der Spectralanalyse angewandt ist; ausserdem eine bemerkenswerte Aufstellung der elementaren Principien der modernen mechanischen Theorie der Gase, deren erste Erwähnung gewöhnlich sechzig Jahre später gesetzt und dem D. Bernoulli in seiner Hydrodynamica zugeschrieben wird. Cly. (Lp.)

E. Hoppe. Historische Mitteilungen zur Elektricitätslehre und Potentialtheorie. Hamb. Mitt. No. 5. 97-98.

Der kurze Auszug des ausführlichen Vortrags enthält bloss die Endresultate der geschichtlichen Forschung. Danach bliebe Franklin, Oersted und Ampère je die Ehre ihrer Hauptentdeckung (Blitzableiter, Elektromagnetismus, Richten der stets vorhandenen Molecularströme durch den Magnetisirungsprocess) unverkürzt, wogegen Davy das Verdienst, den ersten galvanischen Flammenbogen hergestellt zu haben, an Ritter und De la Rive abzutreten hätte. Hinsichtlich der Fortschritte der Lehre vom Potential wird dargethan, wie aus den Einzelleistungen eines Green, Laplace, Poisson, W. Thomson, Gauss, Dirichlet, Riemann und Clausius das heutige umfassende Wissensgebäude sich aufbaute.

Gr.

P. Riccardi. Cenni sulla storia della geodesia in Italia dalle prime epoche fin' oltre la metà del secolo XIX. Bologna Mem. (4) IV. 441-506; (4) V. 585-682.

Die äusserst sorgfältige Geschichte der praktischen Geometrie in Italien, welche Riccardi in Bologna nach einem grossen Massstabe zu schreiben unternommen, über deren erste, bis zum

Jahre 1600 reichende Abteilung Referent schon früher berichtet hat, wird hier in zwei Capiteln zu Ende geführt. Unter den dem vorigen Jahrhundert angehörigen Lehrbüchern der Geodäsie zeichnen sich durch wissenschaftlichen und systematischen Geist diejenigen von Ximenes, Alberti, Lecchi und Marinoni aus. Zugleich treten mannigfache Verbesserungen an den gebräuchlichen Instrumenten hervor, namentlich zwingen die in Italien immer wichtiger werdenden Wasserbauten zur Vervollkommnung der Nivellirmethoden. Das topographische Zeichnen wird im XVII. und XVIII. Jahrhundert eifrig unter einem mehr wissenschaftlichen Gesichtspunkte betrieben; unter den dafür geschriebenen Anleitungen ist besonders Capelli's „Breve compendio di operazioni geometriche da farsi colla sola riga e compasso“ bemerkenswert. Ferner erhält sich diese ganze Periode hindurch ein sehr lebhaftes Interesse an den Abkürzungen des Rechnens, welche sich durch mechanische, durch instrumentelle Hülfsmittel ermöglichen lassen, und in Marinoni's Tractat „De re ichnometrica“ findet sich denn auch die erste Idee zu der heute mit so grossem Erfolge betriebenen Flächenmessung durch sogenannte Planimeter. Die höhere Geodäsie spielt dagegen in dem uns hier beschäftigenden Zeitraum noch eine ganz untergeordnete Rolle. Einen neuen Anstoss geben die Veröffentlichungen des trefflichen Mascheroni, dessen „Probleme für die Feldmesser“ (Pavia 1793) heute noch als eine Fundgrube für Uebungen in der „Geometrie des Lineals“ gelten, und daneben wird fast gleichzeitig (1809) die analytische Polygonometrie durch Magistrini als selbständige Disciplin in Italien eingeführt. Ein reger Eifer ist auch für die Verfeinerung der Winkelmessinstrumente thätig, der berühmte Amici erfindet eine neue Wasserwage, und Barbanti folgt ihm auf diesem Wege mit neuen Gedanken. Nicht minder hat auch die Lehrbücherlitteratur tüchtige Proben zu verzeichnen, unter denen hier die Werke von Poletti und Pozzo genannt sein mögen; wie für Italien charakteristisch, nehmen sich auch jetzt wieder mit den verbesserten Hülfsmitteln der Neuzeit verschiedene Schriftsteller der schon von den älteren Geometern gerne behandelten Aufgabe an, die Alluvionen an den Ufern zu Ueberschwemmungen geneigter

Wasserläufe richtig zu teilen. Die didaktischen Leistungen, welche der zweiten Hälfte des laufenden Jahrhunderts angehören, und worunter sich manche bedeutende Erscheinung befindet, werden vom Verfasser genau registrirt; derselbe wendet sich sodann den Anwendungen zu, welche von allgemein-geodätischen Wahrheiten neuerdings auf praktische Fragen (Distanzmessung aus einem Stande für militärische Zwecke, Tachymetrie, mechanische Planimetrie, Katasterbestimmung, Markscheidekunst, Erdmassenberechnungen bei der Anlegung von Eisenbahnen u. s. w.) gemacht worden sind, indem er sich dabei bemüht, auch von der kleinsten Abhandlung, welche über irgend einen dieser Punkte von einem Verfasser italienischer Zunge geschrieben worden ist, den Titel und die Quintessenz des Inhalts anzugeben. Zum Schlusse geht er auch noch auf die Aussichten ein, welche sich weiteren Fortschritten der geodätischen Wissenschaft und Praxis eröffnen; die Fachschulen, die gelehrten Versammlungen, die Fachzeitschriften werden besprochen und in ihrem Zusammenhange mit den oben geschilderten höheren Zielen gewürdigt.

Gr.

J. Oppert. Die astronomischen Angaben der assyrischen Keilinschriften. Wien. Ber. XCI. 894-906.

Im Anschlusse an die von v. Haerdtl durchgeführte Berechnung aller für die altassyrische Geschichte irgend in Betracht kommenden Verfinsterungen werden durch Oppert gewisse bedeutende Ereignisse genau chronographisch festgestellt. Aus den Inschriften ersieht man auch, dass dann und wann eine Finsternis erwartet wurde, die aber nicht eintraf; man hatte eben richtig nach dem Saros die cyklische Berechnung angestellt, allein das Land der Beobachtung blieb ausserhalb der Sichtbarkeitsgrenzen. Fünf Finsternisse in dem Zeitraum von 930-651 vor Christo sind samt den an sie geknüpften historischen Daten jetzt als gesichert zu betrachten. In die mesopotamische Astronomie beginnt man jetzt erst allmählich einzudringen; die Namen

für Capella, Regulus, Sirius, Antares und α Ursae minoris sind uns bekannt. Gr.

E. Glaser. Die Sternkunde der südarabischen Kabylen. Wien Ber. XCI. 89-99.

Das chronologische System der Südaraber ist wesentlich dem eigenartigen meteorologischen Charakter des Landes angepasst und bildet eine Vermischung solarer und lunarer Zeitrechnung, für welche die Conjunction des Mondes mit den Plejaden massgebend erscheint. Von den 12 Monaten des Jahres werden nur neun, und zwar durch gewisse Zahlwörter, bezeichnet, drei Monate sind namenlos. Jene Bezeichnung hat folgenden Sinn. Legt der Mond durchweg im Tage einen Weg $= n$ zurück, und ist am ersten des fraglichen Monats die Distanz von Sonne und Siebengestirn $= m.n$, so erhält der Monat die Zahl m als Charakteristik. Die drei übrigen Monate decken sich mit der heissen Zeit, welche scheinbar als ein der näheren Einteilung nicht bedürftiges Ganzes gilt. Des weitern bestimmt der Verfasser die den Eingeborenen geläufigen Sternnamen. Als Begründer ihrer Sternkunde bezeichnen die Araber den Ali ben Zâid, der angeblich schon vor Mahommed gelebt hat. Gr.

E. Gelcich. Die mathematischen Instrumente des Brescianer Grafen Giambattista Suardi. Schlömilch Z. Hl.-A. XXX 1-6.

Diese Werkzeuge sind in einem sehr seltenen, 1752 zu Brescia erschienenen Werke beschrieben. Es ist unter denselben ein Curvenzeichner für Epi- und Hypocykloiden, ferner ein Apparat zur Verzeichnung der Konchoide, Cissoide und Quadratrix, endlich ein loxodromischer Zirkel, der auch in der Ebene gebraucht werden kann und dann die logarithmische Spirale, das stereographische Abbild der Kugelloxodrome, liefert. Gr.

G. Eneström. Notice sur les premières tables de logarithmes publiées en Suède. Bibl Math. 1884. 121-124

Die Logarithmentafeln, die hier beschrieben sind, wurden von P. Elvius 1698 in Upsala herausgegeben. Sie enthalten nur die Zahlen 1-1000 und die Sinus höchstens für jeden Zehntelgrad. Nur 5 Decimalen sind angegeben. E.

Capitel 2.

Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

C. Perry. Premiers éléments de physiologie mathématique. Paris. Gauthier-Villars.

R. Bauch. Der Satz der Identität. Versuch einer Kritik des menschlichen Bewusstseins in theoretischer Beziehung, im Anschluss an die Wissenschaftslehre des Aristoteles. Erster Teil: Der menschliche Geist und seine Bewusstseinsursache. Pr Gymn Doberan. 11 u. 20 S. 4°.

Die Schrift bildet die Fortsetzung der Programmabhandlung desselben Verfassers von 1884: „Das speculative Princip der Aristotelischen Kategorien“. Ursprünglich sollte es „den Nachweis und zugleich eine Berichtigung meiner teilweise sehr unklaren Behauptungen erbringen .... Als ich nun bemerkte, dass alle in mathematischen Schlüssen vorkommenden Sätze reine Identitätsurteile sind, fuhr mir der Gedanke durch den Kopf ... Ist es nicht der Geist des Mathematikers, der den Punkt in Bewegung setzt, so dass eine gerade Linie entsteht, der Anfang aller mathematischen Synthese? ... Ich habe, da ich die Arbeit zum Druck abliefern muss, alles so stehen lassen müssen, wie ich es ursprünglich niedergeschrieben hatte und nur einige Male

durch Anmerkungen und Nachträge meine später gewonnene Ueberzeugung angedeutet. Es schadet aber auch nichts; gerade so mag sie veranschaulichen, wie ich, von der Weltanschauung des Aristoteles ausgehend, durch die innere Consequenz eines richtigen Gedankens mit Notwendigkeit weitergetrieben, zur Annahme eines unbedingten Weltschöpfers, genau so wie ihn das Christentum lehrt, gelangt bin". Da die Arbeit auf S. 20 mitten im Satze abbricht, so werden wohl noch weitere Fortsetzungen mit „Berichtigungen teilweise sehr unklarer Behauptungen" folgen.

Lp.

D. Biddle. Ratio rationis: Or that primary faculty of human nature which finds exercise alike in logic, in induction, and in various processes of mathematics. Ed. Times XLII. 125-141.

In dieser Skizze über die Anfänge der Erkenntnis und des Schlussvermögens wird als eins der Hauptgesetze der Vernunft das der Substitution hingestellt: „Dinge, welche in einer gegebenen Beziehung gleich sind, sind in jener Beziehung äquivalent und dürfen für einander substituirt werden, wenn die gegebene Beziehung allein in Betracht kommt". Der Verfasser versucht zu zeigen, dass zwölf Axiome des ersten Buchs im Euklid unmittelbare Ausflüsse dieses Gesetzes sind. Da unter diesen auch das (als zwölftes gezähltes) Parallelen-Axiom ist, so geht daraus die Misslichkeit des vom Verfasser gebrauchten Verfahrens hervor. Bei der folgenden Erörterung der Möglichkeit der Schlussbildung werden alle 19 Formen der Syllogismen mit ihren mittelalterlichen Namen aufgezählt. Endlich wird wegen der Anwendung der schematischen Schlüsse auf Herrn Hugh McColl's Bezeichnungssystem verwiesen, das dieser „The calculus of equivalent statements" nennt und in verschiedenen zerstreuten Schriften veröffentlicht hat.

Lp.

A. Macfarlane. The logical spectrum. Phil. Mag. (5) XIX. 286-290.

Herr Macfarlane schlägt eine Methode vor, durch Diagramme in einer allgemeineren Art, als dies durch den Gebrauch der Euler'schen Kreise möglich ist, die Einteilung des Universums durch eine Anzahl von Marken darzustellen. Das Universum wird durch einen rechteckigen Streifen versinnbildlicht und die verschiedenen Klassen werden über den Streifen nach Art des Spectrums verteilt. Daher der Name für die Methode, „das logische Spectrum". Gbs. (Lp.)

H. Eichler. Dühring's Wertigkeitsrechnung. Zeitschr. f. Realsch. X. 513-517.

Der für das neue Werk Dührings begeisterte Verfasser giebt eine Inhaltsübersicht über dasselbe, vermeidet es aber, irgendwelche Aufschlüsse über den eigentlichen Charakter der von ihm so hoch gestellten Neuerungen beizubringen. Gr.

P. Mansion. Définition d'un nombre incommensurable. Mathesis V. 49-53.

Nach Dedekind: „Stetigkeit und irrationale Zahlen". (Braunschweig, 1872). Mn.

J. Carbonnelle. Les nombres et la philosophie. Rev. d. qu. sc. XXVII. 567-585.

Kritik des voranstehenden Artikels. Nach dem Verfasser kann man eine strenge Theorie der incommensurabeln Zahlen nicht geben, ohne von der Vorstellung der incommensurabeln Grössen auszugehen. Mn. (Lp.)

G. Cantor. Zum Problem des actualen Unendlichen.

G. Cantor. Ueber die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das actuale Unendliche. Zeitschr. f. Phil. und philos. Kritik von Fichte u. Ulrici LXXXVIII.

In einem kurzen Worte verteidigt Cantor seine Ansicht vom actualen Unendlichen den „Herren Herbartianern“ und Wundt gegenüber: Ersteren wird eine fehlerhafte, zu enge Definition des Unendlichen vorgeworfen, letzterer hat Cantor nicht richtig verstanden. Das potentiale und actuale Unendliche wird leider nur zu oft verwechselt und in den breiten Schichten der Wissenschaft ist ein Horror infiniti entstanden. Auch das Absolute und Transfinite werden vermengt und Kant hat mit seinen Antinomien zur Discreditirung der menschlichen Vernunft und ihrer Fähigkeiten am meisten beigetragen. Cantor verspricht „gelegentlich“ zu zeigen, dass es „diesem Autor“ nur durch einen vagen distinctlosen Gebrauch des Unendlichkeitsbegriffs gelungen sei, seinen Antinomien Geltung zu verschaffen etc.

In einem Schreiben vom 4. November 1885 an Eneström in Stockholm antwortet Cantor auf die Frage nach seiner Stellung zu Moigno's Schrift: Impossibilité du nombre actuellement infini etc. (Paris 1884). Er verwirft Moigno's Ansicht, die der Cauchy's und Gedil's nahe kommt. Cantor hält alle Beweise wider die Möglichkeit actual unendlicher Zahlen für fehlerhaft, weil sie von vorne herein denselben alle Eigenschaften der endlichen Zahlen aufdringen. Seine eigene Position ist die Bejahung der Actual-Unendlichen sowohl in concreto wie auch in abstracto. Mi.

G. Eneström. Om G. Cantor's uppsats: Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual-unendlichen Zahlen. Stockh. Öfv. XLII. No 10. 69-70.

Kurze Notiz über einige Schriften von Cauchy, Moigno und G. Cantor, die Lehre von den unendlichen Zahlen betreffend. E.

E. Franke. Untersuchungen über den Raum und sein Verhältnis zu den Dingen. Pr. Hirschberg.

Gegen Kant und Lotze polemisirend, an Dühring anknüpfend, aber über ihn hinausgehend, erklärt Franke den Raum für das einzig selbständig Existirende. Kraft, Materie, Empfindung sind ihm nur Wirkungen der Thätigkeit des einen unteilbaren und undurchdringlichen Raumes. Mi.

H. Vogt. Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik. Pr. Breslau.

Dasselbe Problem, das die höhere Mathematik durch den Begriff des Unendlichkleinen methodisch formulirt und löst, drängt sich schon in die Elementarmathematik, bei der Definition geometrischer Grundgebilde, bei der Messung gleichartiger Grössen durch einander, bei der Rectification und Quadratur des Kreises etc. ein. Eine Hineinziehung höherer Reihen, der Differential- und Integralrechnung, der analytischen Geometrie etc. in den Elementarunterricht ist unthunlich. Aber das Verhältnis des Stetigen und Unstetigen zu einander muss auch hier schon bestimmt werden. Der Selbsterhaltungstrieb des Geistes verlangt die Herstellung einer Beziehung zwischen den vollkommen verschiedenen Begriffen des Stetigen und Unstetigen. Durch den axiomatischen Grenzbegriff wird diese Forderung erfüllt. Der Grenzbegriff ist das discursive Correlat des in der Anschauung vorhandenen Stetigen, ja die Definition des Stetigen selbst.

Mi.

C. S. Peirce. On the algebra of logic. A contribution to the philosophy of notation. Newcomb Am. J. VII 180-202.

Peirce's Arbeit enthält neue Versuche zur Aufstellung eines den logischen Problemen entsprechenden Zeichensystems und einer darauf gegründeten eigenartigen Algebra. Die Arbeit verdient die Beachtung derjenigen, die die mathematisirte Logik zu würdigen verstehen. Mi.

H. Wehr. Die Subjectivität des Raumes und das XI. Euklidische Axiom. Wien. Pichler's Wwe. & Sohn.

W. Bosse. Kraft, Bewegung, Gravitation. Ausland No. 52. 1021-1023

Die bekannten Einwände gegen die Fernwirkung werden wiederholt. Danach wird ein unverständlicher Versuch gemacht, die Gravitation gegen die Erde aus ihrer Rotation und Revolution abzuleiten. Lp.

Bryant. On the ideal geometrical form of natural cell-structure. Lond. M. S. Proc. XVI. 311-315

Die ideelle und natürliche Formirung eines homogenen Stoffes unter constantem Drucke fordert zunächst regelmässige Lagerung der Elementarteile. Sind diese ursprünglich gleiche Kugeln, so giebt es drei Arten der Berührung, die man in den Berührungspunkten der Seiten, in den Ecken und in den Berührungspunkten der Kanten eines jeder Kugel um- resp. einbeschriebenen Würfels erhält. Die letzte giebt die dichteste Lagerung und lässt sich daher als einzig natürliche betrachten. Wird nun das ganze Kugelsystem gleichmässig zusammengedrückt, so dass die Kugeln in die leeren Räume ausweichen und dieselben anfüllen, so werden sie in Rhombendodekaeder deformirt. Die Zellen entstehen, indem sich die Dodekaeder durch Stoffabsorption vom Mittelpunkte aus aushöhlen. Der Artikel schliesst mit einer Betrachtung über die Bildung der Bienenzellen. H.

E. Dreher. Ueber den Begriff der Kraft mit Berücksichtigung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft. Berlin. Dümmler's Verlag

B. Pädagogik.

Wie studirt man Mathematik und Physik? Von einem Lehrer der Mathematik. Leipzig. Rossberg.

Das Buch handelt zuerst vom Studium der Mathematik überhaupt, dann von den Fächern, deren Studium zur allseitigen Ausbildung gehört und den Bildungsmitteln, danach vom examen pro facultate docendi in Sachsen, Preussen und Baiern, stellt ferner einen Studienplan mit Verteilung der Diciplinen auf die Semester auf und macht im Anhang Mitteilungen über die Universität Leipzig. H.

G. v. Britto. **Ueber einige Ursachen geringer Erfolge des mathematischen Unterrichts.** Zeitschr. f. Realsch. X. 587-600, 657-663.

Wir wissen nicht, ob die Methodik, gegen welche hier gekämpft wird, wirklich noch in vielen Anstalten unserer Zeit eine Heimstätte hat. Sollte es thatsächlich der Fall sein, so ist dieser Feldzug gegen eine veraltete und unüberlegte Didaktik wohl am Platze. Einzelheiten anzuführen, lohnt nicht.

Gr.

F. Villicus. **Eine Parallele zwischen dem neuen Gymnasiallehrplane und dem Normallehrplane der Realschulen mit Hinsicht auf die Rechnungsarten des socialen Lebens.** Zeitschr. f. Realsch. X. 401-408.

Diese Betrachtungen sind für österreichische Schulen zunächst interressant, doch eignen sich die Vorschläge des Verfassers, mühsame Schlussrechnungen mit Hülfe des Gleichungsansatzes zu vereinfachen, auch für andere Anstalten.

Gr.

A. Kallius. Bemerkungen zu dem Unterricht in den vier Species in ganzen Zahlen. Pr. Königstädtisches Gymn. Berlin. 32 S. 4°

Der Verfasser entwickelt seine bekannten Ansichten über den Unterricht in den vier Grundrechnungsarten in ausführlicher Darstellung, ohne etwas Neues hinzuzufügen. Lp.

S. Dickstein. Aus der mathematischen Methodologie. Negative Zahlen. Pädag. Revue. (Polnisch)

Methodologische Bemerkungen, die Einführung negativer Zahlen in den mathematischen Unterricht betreffend. Dn.

J. C. V. Hoffmann. Schopenhauer, der Philosoph, über die Euklidische Methode und die „Mausefallenbeweise." Hoffmann Z. XVI. 105-107.

Die vom Verfasser gestellte Frage, ob und wo Schopenhauer diesen Ausdruck, und zwar in Bezug auf Euklid's Beweis des Pythagoreers gebraucht habe, wird ihm von drei Seiten beantwortet. Hiernach kommt er vor in der Dissertation (1813) 3. Aufl. S. 139; dann: „Ueber die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde". S. 132; dann „Werke", Bd. I. S. 139. H.

F. Bergmann. Bemerkungen zum ersten Unterrichte in der Geometrie. Zeitschr. f. Realsch. X. 12-27.

Dieser Versuch, die Bedingungen psychologisch aufzuklären, unter welchen eine geometrische Propädeutik rationell betrieben werden kann, kann an sich als ein gelungener bezeichnet werden, obwohl im grossen und ganzen Aehnliches schon öfter gesagt worden ist. Die Thibaut'sche Beweisart für den Satz, dass die Summe der zusammengehörigen Aussenwinkel jeden Vielecks 360° beträgt, ist z. B. bekannt genug. Doch sind

namentlich die Ratschläge über die geeignete Verbindung von Lehrsätzen und Aufgaben beachtenswert. Gr.

Jetter. Ueber die Methode des Unterrichts in der ebenen Trigonometrie. Pr. Königl. Württ. ev.-theol. Seminar Blaubeuren. 20 S. 4°.

Der Verfasser entwickelt einen bis in alle Einzelheiten durchgearbeiteten Lehrgang für den Unterricht in der ebenen Trigonometrie auf Gymnasien, wo ein Semester mit zwei Wochenstunden hierfür verwandt wird, und stützt die von ihm vertretene Ansicht durch Abwägen der gegenüberstehenden Meinungen. Lp.

O. Herweg. Kleinigkeiten aus dem mathematischen Unterricht. Pr. Gymn. Kulm. 52 S. 4°.

Eine Anzahl Bemerkungen, die aus der Praxis des Schulunterrichts erwachsen sind, und in dem vorliegenden Teile das Rechnen betreffen. Es genügt, die Capitelüberschriften herzusetzen: 1. Was aus dem Wesen unseres Zahlensystems folgt. Decimalbrüche. 2. Aus der Praxis der Grundoperationen. 3. Gemeine Brüche. 4. Kleinigkeiten aus der allgemeinen Arithmetik. 5. Die Logarithmentafel. 6. Trigonometrische Aufgaben. Obgleich ein erfahrener Lehrer gewiss die hervorgehobenen Punkte und noch andere mehr beachtet, in manchen Beziehungen auch strenger verfährt, ist es für angehende Lehrer wohl vorteilhaft, auf die zu berücksichtigenden Umstände hingewiesen zu werden. Lp.

G. Korneck. Mathematische Kleinigkeiten aus Theorie und Praxis. Pr. Progymn. Kempen. Posen. 32 S. 4°.

1. Praktische Dreiteilung des Winkels: Von einem beliebigen Punkte B des einen Schenkels fälle man das Lot BC auf den andern und lege durch den Scheitel A eine Gerade so, dass

die Strecke auf ihr zwischen dem Lote BC und der durch B zu AC gezogenen Parallelen doppelt so gross wie AB ist. Obschon der Verfasser die kubische Gleichung abdruckt, von der die Trisection des Winkels abhängt, erklärt er dennoch, dass seine Lösung „durchweg nicht auf blossem Probiren beruht, also auch nicht rein mechanisch ist". Danach ist ihm wohl der Sinn dieser Worte nicht ganz klar. 2. Elementarer Beweis für die Existenz eines Grenzwertes von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bei unendlich wachsendem n (Unbedeutende Modification). 3. Zum Begriff „Grösse des Winkels". (Polemisirt gegen die Erklärung „Teil einer Ebene, begrenzt von zwei Geraden" etc.). 4. Zur Theorie der Parallellinien. „Zwei gerade Linien, welche in allen ihren Punkten gleiche Entfernung von einander haben, heissen parallel". 5. Definition von Rechteck und Rhombus. „Das genus proximum ist nicht Parallelogramm, sondern Viereck". 6. Bemerkungen zum Rechenunterricht (etwa wie Harms und Kallius).

Lp.

Klaas. Beiträge zum mathematischen Unterricht. Pr Realprogymn Rheydt. 11 S. 4°.

„Einige Vorschläge über die Behandlung etlicher Lehrgegenstände der Mathematik in der Schule": Die Congruenz der Figuren, Behandlung geometrischer Aufgaben, Modelle für die sphärische Trigonometrie, Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch und umgekehrt, Teilbarkeit der Zahlen durch 7, 13, 17 und 19. Regula falsi, Berechnung der trigonometrischen Functionen. Lp.

G. Helm. Der physikalische Unterricht auf dem Realgymnasium. Pr Annenschule. Dresden-Altstadt. 26 S. 4°.

Die „Elemente der Mechanik und mathematischen Physik" desselben Verfassers sind F. d. M. XVI. 1884. 750 angezeigt worden. Zunächst wird zum Zwecke der Entwickelung der

speciellen Methodik des physikalischen Unterrichts die Stellung dieses Unterrichtsgegenstandes im Schulorganismus erörtert, sein Eigenzweck in der Ausbildung einer wissenschaftlich begründeten Naturauffassung gefunden. Die drei charakteristischen Züge bei allen physikalischen Untersuchungen: Experiment, Mathematik und Speculation werden einzeln einer Besprechung unterzogen, die praktische Bedeutung der physikalischen Einsicht wird kurz berührt; dann wird ein Lehrgang für das sächsische Realgymnasium entwickelt, das in Obertertia den propädeutischen Cursus besitzt, der in Preussen gestrichen ist. Am Schlusse befindet sich ein Verzeichnis der dem Verfasser zugänglich gewesenen Schulprogrammarbeiten über physikalische Methodik. Die Arbeit enthält in dem aufgestellten Lehrplan manche beachtenswerte Neuerungen, zu deren Durchführung indes vor allem ein ihnen Rechnung tragendes Lehrbuch erforderlich wäre. Lp.

O. Schieck. Ueber die Neugestaltung des physikalischen Unterrichts. Pr. Gymn. Weimar. 18 S. 4°.

Mit Rücksicht auf die den naturwissenschaftlichen Fächern durch die Unterrichtsordnung von 1882 jetzt eingeräumten Lehrstunden auf den Gymnasien wird die Methode und der Umfang des physikalischen Unterrichts besprochen. Der Verfasser bevorzugt die zur Schärfung der Beobachtung dienende inductive Methode und will die mechanischen Partien dem Uebungsstoff für die Mathematik zugewiesen haben. Die Mechanik möchte er daher weniger extensiv betrieben wissen, damit sie der Physik so viel wie möglich Vorschub leiste und dieselbe ergänze. Ein ausführlicher Lehrplan der Physik für Gymnasien bildet den Schluss. Lp.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische Gleichungen).

R. Baltzer. Die Elemente der Mathematik. Erster Band. Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig. Hirzel. VI u. 340 S. 8°.

Zusätze sind in der neuen Auflage dieses geschätzten Lehrbuches gemacht worden namentlich bei der Einführung der irrationalen und der complexen Zahlen, bei den Determinanten, bei den figurirten Zahlen, sowie bezüglich der Bernoulli'schen Zahlen. Bei Einführung der Exponentialreihe ist die Einleitung über Convergenzgebiete von Reihen weiter ausgedehnt, wodurch auch die Binomialreihe und die Logarithmenreihe in helleres Licht gesetzt werden konnten. In der Algebra hat das lineare System eine neue Darstellung erhalten. Bei den Gleichungen dritten und vierten Grades wurden die bekannten Lösungen der vollständigen Gleichungen hinzugefügt. Bei der Frage nach den Wurzeln einer Gleichung ist der sogenannte Cauchy'sche Existenzbeweis aus den ersten Auflagen wiederhergestellt worden. Endlich

ist der kurze Entwurf einer Tabelle zur Geschichte der Mathematik mit kulturhistorischen Seitenblicken hinzugefügt. Lp.

H. Schubert. System der Arithmetik und Algebra als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen. Potsdam. Aug. Stein. VIII u. 222 S. 8°.

Dieser Leitfaden ist eine Bearbeitung des theoretischen Teils der F. d. M. XV. 1883 p. 990 besprochenen „Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben“ etc. desselben Verfassers; das „System der Arithmetik“ kann daher auch an solchen Lehranstalten benutzt werden, in denen eine besondere Aufgabensammlung in Gebrauch ist. Ausser den kleineren Verbesserungen und Ergänzungen ist ein neuer Paragraph hinzugekommen, der einen Ueberblick über die arithmetischen Operationen und Zahlarten enthält. Lp.

L. Schendel. Grundzüge der Algebra nach Grassmann'schen Principien. Halle a. S. H. W. Schmidt. 161 S.

Unter den verschiedenen Anwendungen der Ausdehnungslehre hat die auf die Determinanten bezügliche zuerst in weiteren Kreisen Beachtung und in zahlreichen Abhandlungen Verwendung gefunden, und die „Theorie der Determinanten“ von Scott (1880) benutzt principiell die Grassmann'sche Darstellungsweise. Einen ähnlichen Zweck wie das eben genannte Werk verfolgt auch das vorliegende Buch von Schendel. Es zeigt, wie aus verhältnismässig wenigen und einfachen Begriffen nicht nur die elementaren Eigenschaften der Determinanten, sondern auch zahlreiche fernerliegende, sehr allgemeine Sätze sich entwickeln lassen, aus denen verschiedene bekannte Sätze als specielle Fälle sich ergeben. So die Determinantensätze von Laplace, Sylvester, Kronecker, Cauchy, die Pfaff'sche Form u. s. w. An die Determinanten schliesst sich dann die Theorie der algebraischen Formen, in welcher alles Wesentliche etwa in den von Salmon innegehaltenen Grenzen erledigt wird. Als wesentliche und wich-

tige Neuerung ist hier die Ersetzung des Differentiations-Processes durch eine mit der Theorie der Grassmann'schen Lückenausdrücke zusammenhängende Symbolik zu erwähnen. Ein Schlusscapitel giebt zahlreiche Anwendungen auf n-dimensionale Geometrie. Viel Neues und Anziehendes findet sich an verschiedenen Stellen. Die Symbolik, hinsichtlich deren nur ein noch engerer Anschluss an Grassmann gewünscht werden könnte, ist da, wo sie Neues bietet, wohldurchdacht und zweckmässig, die Bezeichnung der gauche symmétrique als „combinatorisch-symmetrische" Determinante im Gegensatz zur „algebraisch-symmetrischen" bringt den Gegensatz beider Arten treffend zum Ausdruck. Auch die im letzten Capitel vorgenommenen Erweiterungen geometrischer Begriffe auf das mehrdimensionale Gebiet sind beachtenswert. Dass eine so grosse Menge von Gegenständen auf so kleinem Raum erledigt werden konnte, ist in erster Linie der angewandten Methode, in zweiter aber auch der ungemeinen Knappheit der Diction zuzuschreiben. Der Leser, welcher die Mühe, das kleine Buch ernstlich durchzuarbeiten, nicht scheut, wird durch dasselbe in ein reichhaltiges und fruchtbares Gebiet der Ausdehnungslehre eingeführt werden.

Schg.

J. A. Serret. Cours d'algèbre supérieure. 5e éd. Tome I Paris. Gauthier-Villars.

P. Cassani. Complementi d'algebra. Torino Bocca

Sc.

G. Moreno. Elementi d'algebra. 5a ediz. con un'appendice Torino.

O. Simony. Ueber zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen. Wien. Anz. 37-40.

Inhaltsangabe der grösseren, unter gleichem Titel in den Wien. Ber. publicirten Arbeit des Verfassers. Schg.

J. Bazala. Der arithmetische Unterricht in den untern Klassen der Mittelschulen. Zeitschr. f. Realsch. X. 459-466, 518-530.

Diese Erörterungen schliessen sich zu eng an den österreichischen Lehrplan an, als dass sie weitere Kreise zu interessiren vermöchten. Gr.

Hromádko-Strad. Sammlung von Aufgaben aus der Algebra. III. Aufl. Prag. 1884. (Böhmisch.)

Enthält eine methodisch geordnete Reihe von mehr als 3400 Aufgaben aus der Algebra, sowie sie dem Kreise der Mittelschule angepasst werden können; 130 derselben betreffen Determinanten. Std.

D. Selivanoff. Theorie der algebraischen Auflösung der Gleichungen. St.-Petersb. (Russisch.)

Die Arbeit verfolgt den Zweck, alle wichtigeren Resultate der Theorie der algebraischen Auflösung in systematischer Weise darzustellen und ist in vier Capitel geteilt.

I. Von der Irreductibilität. Der Verfasser schliesst sich eng an die Vorlesungen des Herrn Kronecker und dessen berühmtes Werk: „Arithmetische Theorie der algebraischen Grössen" an, erklärt den Begriff der Irreductibilität in einem gewissen Rationalitätsbereich und zeigt, wie man eine ganze Function als ein Product von irreductiblen Factoren darstellen kann. Einige Bespiele erleichtern das Verständnis der Theorie.

II. Die Eigenschaften der algebraischen Ausdrücke. Das Capitel enthält auch die Theorie der Auflösung der binomischen Gleichungen.

III. Auflösung der Buchstaben-Gleichungen. Nach einigen substitutionentheoretischen Betrachtungen, welche zum Beweise des Satzes führen, dass die alternirende Gruppe bei $n > 4$ einfach ist, folgt der Kronecker'sche Beweis des Theorems von der Un-

möglichkeit, algebraische Gleichungen von höherem Grade als dem vierten allgemein aufzulösen, und die Entwickelung der Bedingungen für die algebraische Auflösung der Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist.

IV. Algebraische Auflösung numerischer Gleichungen. Dieser Frage ist die besondere Aufmerksamkeit des Verfassers gewidmet. Vor allem studirt er die Besonderheiten, welche die numerischen Gleichungen von den Buchstabengleichungen in der Theorie der algebraischen Auflösung unterscheiden, und führt den Begriff der Gruppe der Gleichung ein. Dann kommt die Untersuchung der Bedingungen der algebraischen Auflösbarkeit numerischer Gleichungen, und am Ende zeigt der Verfasser wie man theoretisch mit Hülfe einer endlichen Anzahl von Operationen die Frage entscheiden kann, ob die gegebene Gleichung auflösbar ist. Wi.

E. Lampe. Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade. Pr. Luisenst. Ober-Realsch. 24 S. 4°.

Wegen der Erschöpfung des zur Verfügung stehenden Raumes ist nur der erste Teil mit den geometrischen Aufgaben abgedruckt, im ganzen 39 Nummern. Die ersten derselben (I-XII) behandeln die Berechnung von Sehnen- und Tangenten-Vielecken des Kreises aus gegebenen Seiten, XIII-XV goniometrische Aufgaben, XVI-XVII zwei planimetrische Probleme, XVIII-XXVI die Teilung von Körpern, die durch Flächen zweiten Grades und Ebenen begrenzt werden, XXVII-XXIX die Zerschneidung der Kreisfläche, XXX-XXXI die Oberfläche der Rotationsellipsoide, XXXII-XXXIII sind Kreisaufgaben, XXXIV-XXXVII gehören der analytischen Geometrie an, die beiden letzten der Planimetrie. Als gemeinsame Lösungsmethode der teils algebraischen, teils transcendenten Gleichungen wird die regula falsi empfohlen, ihre Anwendung bei einigen complicirteren Aufgaben angedeutet. Die Zahlenresultate sind beigefügt. Lp.

J. Molk. Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. Acta Math. VI 1-166.

Der Herr Verfasser hat es unternommen, einige der grundlegenden Begriffe, die Herr Kronecker in seiner Festschrift „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" eingeführt hat, des ausführlichen zu behandeln und dieselben zum Ausgangspunkte einer allgemeinen Eliminationstheorie zu machen. Hierher gehört an erster Stelle die Benutzung der Modulsysteme, als nothwendig für die Erweiterung des Begriffes der Division bei mehrere Variabeln; an zweiter Stelle die möglichste Vermeidung der als Gleichungswurzeln definirten algebraischen Grössen, (eine vollkommene, consequente Beseitigung war noch nicht durchführbar); an dritter Stelle die principielle Einführung unbestimmter Grössen behufs einfacher Zusammenfassung der invarianten Eigenschaften eines Systems von Functionen.

Nach einer Einleitung, in welcher die Gesichtspunkte besprochen, und als rein algebraische Methoden diejenigen gekennzeichnet werden, bei denen eine nur endliche Anzahl ausführbarer Operationen in Anspruch genommen wird, geht Herr Molk zur Behandlung der Divisoren der ganzen Functionen, der Resultanten und der Reductibilität solcher Functionen zunächst im natürlichen, dann in einem allgemeinen Rationalitätsgebiet über. In einem solchen wird die Zerlegung einer ganzen Function in ihre irreductiblen Factoren geleistet. Das nächste Capitel beschäftigt sich mit der Einführung der Divisorensysteme und liefert hier die Lösung des Problems, eine ganze Function in einem beliebigen Rationalitätsbereiche in ihre, nach einem gegebenen Modul irreductiblen Factoren zu zerlegen. Weiterhin behandelt der Herr Verfasser die Zerlegung von Divisorensystemen in einzelne einfachere Systeme, und zwar zuerst für den Fall von zwei Variablen, dann für den allgemeinen Fall. Im Schlusscapitel wird die allgemeine Theorie der Elimination nach den von Herrn Kronecker aufgestellten Principien dargelegt, die ein-

zelnen Factoren der Resolventen-Gleichung nach der Bedeutung ihrer Stufenzahl angeordnet, und damit wird der Weg gebahnt zur allgemeinen Darstellung von Gleichungssystemen und zur Untersuchung ihrer Reductibilität.

Wir konnten hier nur kurz den Gang der Untersuchung bei dieser umfangreichen Arbeit hervorheben, wollen aber nicht unterlassen, ausdrücklich auf die Bedeutung derselben hinzuweisen, insofern durch sie ein schätzenswerter Commentar zu einem Teile des Inhalts der Kronecker'schen Festschrift geliefert wird.

No.

D. Selivanoff. Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières. S. M. F. Bull. XIII. 119-131.

Zur Untersuchung, ob eine vorgelegte ganze Function zerlegbar sei oder nicht, werden Congruenzen verwandt. Für den Fall linearer Factoren hat Gauss Methoden gegeben; für Factoren höheren Grades gaben die Herren Runge und Hermite dem Herrn Verfasser Fingerzeige. Von besonderem Nutzen ist der Umstand, dass die Anzahl der irreductibeln Factoren für einen Primzahlmodul eine begrenzte ist (vgl. Serret, Algèbre supérieure, § 349).

Sn.

Albitzky. Die Untersuchung der Gleichungen zweiten Grades mit zwei Veränderlichen in Bezug auf ihre Zerlegbarkeit in zwei lineare Factoren. Petersb. Techn. Inst. (Russisch.)

L. Kronecker. Une équivalence algébrique. Mathesis V. 102.

Die Aequivalenz

$$x^3-2 \equiv \left(x-\frac{1}{18}Z^4\right)\left(x+\frac{1}{2}Z+\frac{1}{36}Z^4\right)\left(x-\frac{1}{2}Z+\frac{1}{36}Z^4\right),$$

vermehrt um ein Vielfaches von (Z^6+108) ersetzt die Betrachtung von $\sqrt[3]{2}$.

Mn. (Lp.)

F. Casorati. Sopra alcuni discriminanti. Lomb. Ist. Rend. XVIII. 108-111

Die Discriminante der sechs Grössen, welche aus

$$\varphi = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

durch alle Substitutionen der x unter einander entstehen, hat die Form

$$\Phi = \frac{1}{4} X^3 Y^3 (NX - MY)^2,$$

wobei zu setzen ist

$$X = (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2, \quad Y = (y_2 - y_3)^2 (y_3 - y_1)^2 (y_1 - y_2)^2,$$
$$M = (x_2 - x_3)^6 + (x_3 - x_1)^6 + (x_1 - x_2)^6,$$
$$N = (y_2 - y_3)^6 + (y_3 - y_1)^6 + (y_1 - y_2)^6.$$

No.

C. Runge. Ueber die Zerlegung ganzzahliger Functionen in irreductible Factoren. Kronecker J. IC. 89-97.

Herr Runge giebt zu einer von Herrn Kronecker (Kroneck. J. Bd. XCII. § 4) gelieferten Methode einige Zusätze, welche dieselbe zur praktischen Verwertung äusserst geeignet machen.

No.

Automari. Généralisation d'un théorème d'algèbre. Nouv. Ann. (3) IV 194-196.

Sind $f_m(x)$, $f_n(x)$ zwei Polynome der Grade m, n ohne gemeinsamen Teiler, dann können zwei Polynome $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_{m-1}(x)$ so bestimmt werden, dass die Summe

$$f_m \varphi_{n-1} + f_n \varphi_{m-1}$$

gleich einer gegebenen, nicht identisch verschwindenden Function des Grades $m + n - 1$ wird. No.

C. Runge Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten. Acta Math. VI. 305-318.

Sind $x_1, x_2, \dots x_n$ die Wurzeln der Gleichung, und setzt man $R_\lambda(z) = \Sigma(x_\nu - z)^{-\lambda} : \Sigma(x_\nu - z)^{-\lambda-1}$, so ist R_λ eine rationale Function von z und den Coefficienten der Gleichung, welche sich mit wachsendem λ der Grösse $x_1 - z$ nähert, falls x_1 näher an z liegt als alle anderen Grössen $x_2, x_3, \dots, x_n$. Das ergiebt

$$x_1 = z + R_1 + (R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + \cdots,$$

und diese Reihe hört nur an den Stellen z auf, gleichmässig zu convergiren, für welche einige Grössen x_ν, welche dem z näher liegen, als die übrigen x, gleich weit von z entfernt sind. Der Bereich der gleichmässigen Convergenz ist bei festem z und veränderlichen complexen Coefficienten, welche ein $2n$-fach ausgedehntes Gebiet liefern, ein in sich zusammenhängender, so dass man von jeder Stelle zu jeder andern kommen kann, ohne die Grenze zu berühren; diese zerfällt in eine endliche Anzahl von Teilen. No.

Fr. Meyer. Ueber die Reducibilität von Gleichungen, insbesondere derer vom fünften Grade, mit linearen Parametern. Münch. Ber. 415-451.

Fr. Meyer. Ueber die Reducibilität der Gleichungen fünften Grades mit zwei linearen Parametern. Vortr. i. d. Vers. deutscher Naturforscher u. Aerzte. Strassburg.

Die behandelte Aufgabe lautet für den Fall von Gleichungen fünften Grades: es sollen in der ganzen Function fünften Grades von λ mit allgemeinen Coefficienten

$$u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda) + u_3 f_3(\lambda)$$

für die Parameter u solche ganzen Functionen der Unbekannten μ, nämlich $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, $\varphi_3(\mu)$ der Grade ν_1, ν_2, ν_3 substituirt werden, dass die Function dadurch in rationale Factoren $F_\alpha(\lambda, \mu)$ zerfällt; und zugleich sollen die von den Coefficienten der f_i abhängenden Irrationalitäten angegeben werden, deren Adjunction erforderlich und hinreichend ist, um die Coefficienten der F_α wie der φ_α rational bekannt zu machen. Als Haupthülfsmittel der Untersuchung wird eine ein-eindeutige Abbildung der Ordnungscurve R_3

$$x_1 : x_2 : x_3 = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : f_3(\lambda)$$

auf eine allgemeine Fläche dritter Ordnung benutzt. Die Resultate der Untersuchung sind in drei Tabellen zusammengefasst.

No.

J. PERROT. Démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Kronecker J. 1C. 141-160.

Der Beweis schliesst sich an den ersten und vierten Gauss'schen Beweis an und beruht auf der Voraussetzung geometrischer Stetigkeit und der Existenz eines Maximums einer algebraischen Function.

No.

CH. MERAY. Démonstration analytique de l'existence et des propriétés des racines des équations binômes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 337-356.

Nachweis der Wurzelexistenz von

$$x^n = a + bi$$

durch Stetigkeitsbetrachtungen, sowie Ableitung der elementarsten Eigenschaften dieser Wurzeln auf demselben etwas umständlichen Wege.

No.

K. KÜPPER. Verwandlung des Polynoms

$$z^n - a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

in ein Product von geometrischen Längen. Cas XIV. pag. 28 (Böhmisch)

Sind z_k Werte, welche beliebige feste Punkte der Ebene repräsentiren, so erhält das Product

$$P_n \equiv (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

alle Werte, wenn z unbeschränkt veränderlich ist, und kann die Entwickelung desselben in

$$P_n = z^n - a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

als Product von n geometrischen Längen fester Anfangspunkte und gleichen Endpunktes auftreten.

Std.

E. Cesaro. Sur un théorème de M. Laguerre. Nouv. Ann. (3) IV. 321-327.

Wenn die Gleichung $f(z) = 0$ vom n^{ten} Grade nur reelle, einfache Wurzeln besitzt, dann hat $f^2(z) + k^2 f'^2(z) = 0$ bei reellem k nur imaginäre Wurzeln, für die der Coefficient von i dem absoluten Werte nach grösser als $k.n$ ist. Herr Cesaro liefert zu diesem Theorem den folgenden Zusatz: Wenn die Nullwerte einer Gleichung $f(z) = 0$ auf einer Geraden Δ liegen, so findet dasselbe mit denen von $f(z) + Mf'(z) = 0$ statt, wenn der Wert M auf einer zu Δ parallel durch den Nullpunkt gezogenen Geraden liegt. Zwischen je zwei Nullwerten der einen Function ist ein einziger der anderen Function enthalten. No.

E. Cesaro. Solution d'une question de M. Laguerre. Nouv. Ann. (3) IV. 328-330.

Sind α, β zwei auf einander folgende Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ des Grades n, welche nur für reelle Werte befriedigt wird, so liegt eine Wurzel von $f'(z) = 0$ zwischen den Grenzen

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \text{ und } \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n}.$$

No.

L. Mirmau. Sur les fonctions homogènes de deux polynômes U et V, premiers entre eux de même degré en x. Nouv. Ann. (3) IV. 173-176.

Sind U, V zwei Polynome m^{ten} Grades ohne gemeinsamen Teiler, und ist

$$f(U, V) = U^p + A_1 U^{p-1} V + \cdots A_{p-1} U V^{p-1} + A_p V^p,$$

dann sind die gemeinsamen Wurzeln von

$$UV' - VU' = 0, \; f(U, V) = 0$$

Doppelwurzeln der letzteren Gleichung. Umgekehrt sind die Doppelwurzeln von $f = 0$, die nicht die Form $(aU + bV)^p$ besitzen, gleichzeitig Wurzeln von $UV' - VU' = 0$. No.

T. J. Stieltjes. Sur quelques théorèmes d'Algèbre. C. R. C. 439-440.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln des gleich Null gesetzten Legendre'schen Polynoms, so machen diese den Ausdruck

$$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)\ldots(1-\xi_n^2)\Pi(\xi_k-\xi_i)^2$$

zu einem Maximum. Die Discriminante der x_i hat den Wert

$$\frac{2^2.3^4.4^6\ldots n^{2n-2}}{3^1.5^3.7^5\ldots(2n-1)^{2n-3}}.$$

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^n-1.n_2x^{n-2}+1.3.n_4x^{n-4}+\cdots=0,$$

so machen diese den Ausdruck

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}\Pi(\xi_k-\xi_i)^2$$

zu einem Maximum. Die Discriminante der x_i hat den Wert

$$2^2.3^3.4^4\ldots n^n.$$

No.

T. J. Stieltjes. Sur les polynômes de Jacobi. C. R. C. 620-622.

Benennt man das Polynom der Gleichung

$$F(-n, n+\alpha+\beta-1, \alpha, x)=0$$

X oder $\varphi(n, a, c)$, wobei $a=\alpha+n-1$, $c=\alpha+\beta+2n-2$ gesetzt ist, und bildet man die Sturm'sche Reihe

$$X, X_1=\frac{\partial X}{\partial x}, X_2, X_3, \ldots,$$

dann ist

$$X=\varphi(n, a, c),\ X_1=n\varphi(n-1, a, c),$$
$$X_2=\text{cst.}\varphi(n-2, a-1, c-2), \ldots$$
$$X_k=\text{cst.}\varphi(n-k, a-k+1, c-2k+2), \ldots,$$

und die $X, X_1, X_2, \ldots$ sind ferner bis auf constante Factoren gleich den aus den Wurzeln von $X=0$ gebildeten Sylvester'schen Determinanten. Wenn α und $\beta>0$ sind, dann liegen alle Wurzeln in dem Intervalle von 0 bis 1. No.

MIASSOJEDOFF. Directe Methoden der Bestimmung der niederen Grenze der positiven Wurzeln und der Grenzen der negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Mosk. Math. Samml. XII. 22-41 (Russisch.)

Enthält die Anwendung der früheren Untersuchungen des Verfassers (F. d. M. XVI. 1884. 75) auf die Bestimmung der Grenzen der Wurzeln. Wi.

MIASSOJEDOFF. Zur Theorie der Absonderung der Wurzeln. Mosk. Math. Samml. XII. 433-480. (Russisch.)

Es sei

$$V_0 = x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots + p_m$$

und

$$U_1 = xV_0' - V_0, \quad U_2 = xV_0' - 2V_0, \ldots, \quad U_m = xV_0' - mV_0.$$

Der grösste gemeinschaftliche Teiler zweier beliebigen U ist gleich dem grössten gemeinschaftlichen Teiler von V und V'. Aus dieser Bemerkung folgt eine neue Methode der Absonderung der mehrfachen Wurzeln, die in einigen Fällen schneller zum Resultate führt als die gewöhnliche. Hiernach beweist der Verfasser das folgende Theorem: „Es sei T_0 eine ganze rationale Function m^{ten} Grades; wenn wir aus T_0 die Function $U_m = xT_0' - mT_0$ bilden und sie mit T_1 bezeichnen, dann aus T_1 die Function $U_{m-1} = xT_1' - (m-1)T_1$ bilden und sie mit T_2 bezeichnen u. s. w., so haben die Functionen $T_0, T_1, \ldots, T_m$ die Eigenschaften, welche denen der Fourier'schen Functionen ähnlich sind. Wi.

MIASSOJEDOFF. Ueber die Functionen, welche den Sturm'schen analog sind. Mosk. Math. Samml. XII. 481-482. (Russisch.)

Wenn man anstatt der Derivirten von einer ganzen Function V des Grades m die Function $U_m = xV' - mV$ nimmt und dann das Sturm'sche Verfahren anwendet, so bekommt man eine Reihe von Functionen, welche alle Eigenschaften der Sturm'schen Functionen haben unter der Bedingung, dass man zwei gleichnamige Grenzen nimmt.

Die weiteren Entwickelungen beziehen sich auf die Bildung der Coefficienten dieser Functionen, sowie der der Sturm'schen selbst. Wi.

V. Mollame. Nuova serie di funzioni sostituibili a quelle di Sturm con vantaggio dei calcoli occorrenti per determinare il numero delle radici reali di un'equazione algebrica. Atti dell' Acc Gioenia di scienze naturali in Catania. (3) XVIII. 11-28; Nap Rend. XXII. 256-267; Relazione di Trudi, Fergola e Battaglini. Nap Rend XXII. 256.

Es handelt sich um eine Reihe von Functionen, die an Stelle der Sturm'schen Functionen in dem bekannten Satze über die Trennung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung weniger lange Rechnungen zu erheischen scheinen. Da jedoch die Fassung der Regel zur Bildung dieser Functionen sehr lang ist, müssen wir den Leser auf die Abhandlung selbst verweisen. (Cfr. den Bericht F. d M. XVI. 1884. 74. Se. (Lp.)

D. André. Sur le nombre des variations d'un polynôme entier en x, dont les coefficients dépendent d'un paramètre a. Ann. d. l'Éc Norm. (3) II. 75-92

Mit Hülfe einer Zeichnung, die als Hauptelemente die reellen positiven Wurzeln α der einzelnen Coefficienten von

$$f(x,\alpha)=x^n+g_1(\alpha)x^{n-1}+g_2(\alpha)x^{n-2}+\cdots$$

darstellt, kann man die Anzahl der Aenderungen in den Zeichenfolgen von $f(x,\alpha)$ gegen $f(x,0)$ ablesen. Das Schlusscapitel sucht die Anzahl der Variationen, die bei einer gegebenen Gleichung auftreten, durch Multiplication des Polynoms mit $x+\alpha$, oder $x^2+\alpha$, oder $x^3+\alpha$ bei geeigneter Wahl von α zu verringern, um dadurch die Descartes'sche Zeichenregel in der Präcision ihrer Angabe zu erhöhen. (Vgl. F. d. M. XV. 1883. p. 47.) No.

Ed. Weyr. Ueber die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen. (Cas. XIV pag 100 Böhmisch.)

Neben der bekannten Ableitung der Resultate unter Verwendung von Determinanten wird hauptsächlich auf besondere Fälle hingewiesen, welche Modificationen erheischen, denen Eigentümlichkeiten der Subdeterminanten zu Grunde liegen und die daher separat zu behandeln sind. Std.

V. Mollame. Sul sistema di equazioni costituito da una forma quadratica con n variabili uguagliata a zero e da 1 od $n-2$ equazioni lineari ed omogenee fra quelle variabili. Atti dell Acc. Gioenia di scienze naturali in Catania. (3) XVIII 43-59.

Der Verfasser beschäftigt sich damit, eine Lösung eines Systems homogener Gleichungen mit n Variabeln zu geben, von denen eine quadratisch ist und $n-2$ linear sind. Die von den bekannten Lösungen etwas abweichende kommt auf diejenige eines gewissen Systems linearer Gleichungen zurück, in welches die Quadratwurzel aus einer Determinante eingeht, die eine simultane Invariante der gegebenen Formen ist. Wir verstehen es nicht, warum der Verfasser am Schlusse erklärt, dass, wenn statt der $n-2$ linearen Gleichungen eine einzige gegeben wäre, dann das Verschwinden der simultanen Invariante von ihr und der gegebenen quadratischen Gleichung bedeute, diese beiden Gleichungen hätten statt unendlich vieler Lösungen eine einzige. Selbst wenn der Verfasser reelle Lösungen darunter verstanden hätte, wäre das nur für eine gewisse Art quadratischer Gleichungen wahr. Se. (Lp.)

Verebriusoff. Neue Methode der Wurzelausziehung und der Auflösung der Gleichungen jeden Grades. Chark (Russisch.)

A. N. Korkine. Die Absonderung der Wurzeln einer kubischen Gleichung. J. el. math. II. 306. (Russisch.)

Eine Aufgabe für die Mitarbeiter des Journals. Wi.

Minine. Zur Frage von der Unvereinbarkeit der Gleichungen ersten Grades. Moskau.

A. Cayley. Note on a cubic equation. Mess. XV. 62-64.

Der Verfasser betrachtet die Gleichung

$$x^3+3cx+d=0,$$

und indem er die Tschirnhausen-Hermite'sche Transformation

$$y=xT_1+(x^2+2c)T_2$$

ausführt, findet er die Bedingung dafür, dass die transformirte Gleichung

$$y^3+3cy+d=0$$

sei. Unter der Annahme $d^2+4c^3 \gtrless 0$ ist dieselbe:

$$1=T_1^3+3cT_1T_2^2+dT_2^3.$$

Der Verfasser nimmt auch die transformirende Gleichung in der Form an

$$y=A+Bx+Cx^2$$

und findet die Bedingung dafür, dass dies eine automorphe Transformation von $ax^3+bx^2+cx+d=0$ sei; ist nämlich ω eine imaginäre kubische Einheitswurzel und ∇ die Discriminante, so ist die Transformation:

$$\begin{aligned}\{(\omega-\omega^2)\sqrt{\nabla}\{2a(y+x)+3b\} = & -abd+4ac^2-3b^2c\\ & +x(-a^2d+7abc-6b^3)\\ & +x^2(2a^2c-2ab^2).\end{aligned}$$

Glr. (Lp.)

E. Oekinghaus. Zur Theorie der kubischen Gleichungen. Hoppe Arch. (2) III. 92-98.

Die Lösung von $x^3-ax^2+bx-c=0$ wird vermittelt durch die Substitution

$$\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}.$$

No.

G. H. HALPHEN. Formules d'algèbre. Résolutions des équations du troisième et du quatrième degré. Nouv. Ann. (3) IV. 17-35.

Bezeichnen f, φ zwei Polynome des Grades n, dann ist

$$(f, \varphi) = f\varphi^{(n)} - f'\varphi^{(n-1)} + f''\varphi^{(n-2)} - \dots$$

eine Constante. Mit Hülfe des Symbols (f, φ) gelingt es nun, die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades aufzulösen; Bedingungen (freilich immer nur als notwendige) abzuleiten für die Existenz einer gemeinsamen Wurzel zweier Gleichungen zweiten Grades und dafür, dass ein Polynom vierten Grades ein Quadrat sei; die Realität der Wurzeln bei Gleichungen dritten und vierten Grades zu discutiren u. s. w. No.

M. J. KOCH. Auflösungsmethoden algebraischer Gleichungen des dritten und vierten Grades mit einer Unbekannten. Wien Pichler's Ww u S. No.

H. AM ENDE. Ueber eine die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades umfassende Auflösungsmethode. Hoppe Arch. (2) III 103-106

Die Methode besteht in der Vergleichung der Gleichungspolynome mit resp.

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) = u^3 + v^3,$$

$$(u+v+w)^4 - 2(u^2+v^2+w^2)(u+v+w)^2 + (u^2+v^2+w^2)^2$$
$$- 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) + 8uvw(u+v+w).$$

No.

C. WELTZIEN. Bemerkung zur Descartes'schen Auflösung der biquadratischen Gleichung. Hoppe Arch. (2) III 107-108.

Nachweis, dass die Benutzung jeder der drei Wurzeln der Hülfsgleichung dritten Grades zu demselben Resultate führt.

No.

G. Borenius. Eine Methode Gleichungen, deren Gradzahl niedriger als fünf ist, aufzulösen. Stockh., Vetenskapsakademien, Bihang 9, 18 S.

Der Verfasser wendet die in der Note: „Eine allgemeine Form der Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung" (siehe F. d. M. XVI. 1884 S. 69) gegebene Methode an, um die Wurzeln der Gleichungen der vier ersten Grade darzustellen. Für die der drei ersten Grade ist diese Darstellung fast unmittelbar gefunden; für die Gleichungen vierten Grades benutzt der Verfasser eine von Kronecker gegebene Methode. E.

C. le Paige. Sur l'équation du quatrième degré. Cas. XIV. 26.

Enthält Bemerkungen zu einem Aufsatze von F. Studnička (F. d. M. XVI pag. 87) und zeigt, wie man unter Verwendung der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

die dort angeführte Resolvente ableiten kann. Schliesslich wird eine Eigenschaft der Determinante

$$D_1 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{vmatrix}$$

entwickelt, wo A, B, C ebenfalls cyklische Determinanten dritten Grades sind,

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} d & e & f \\ e & f & d \\ f & d & e \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} g & h & i \\ h & i & g \\ i & h & g \end{vmatrix},$$

wobei die bekannten Werte ε, ε^2 und $\varepsilon^3 = 1$ als Factoren auftreten. Std.

P. Gordan. Sur les équations du cinquième degré. Jordan J. (4) I. 455-458.

Es wird eine Reihe von Formeln gegeben, die zu einer Reduction der Gleichung fünften Grades auf eine solche führen, welche nur einen Parameter enthält. No.

C. Runge. Ueber die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5 + ux + v = 0$. Acta Math. VIII. 173-186.

Zunächst wird die Resolvente sechsten Grades aufgestellt, welcher eine gewisse, unter Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante sechswertige Function der Gleichungswurzeln genügt. Aus der Form der Resolvente ergiebt sich dann, dass, wenn man u, v auf alle ganzzahligen Werte beschränkt, deren absoluter Betrag nicht grösser ist als n, die Anzahl der unter diesen $(2n+1)^2$ Gleichungen enthaltenen auflösbaren mit wachsendem n gegen die Gesamtzahl beliebig klein wird. Endlich ergiebt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit innerhalb eines Rationalitäts-Bereiches die Form der irreductiblen Gleichung

$$x^5 + \frac{4\mu^4(4\lambda+3)}{\lambda^2+1}x + \frac{4\mu^5(2\lambda+1)(4\lambda+3)}{\lambda^2+1} = 0,$$

wo λ, μ irgend zwei Werte dieses Bereiches sind.

No.

Paxton Young. Solution of solvable irreducible quintic equations without the aid of a resolvent sextic. Newcomb Am. J. VII. 170-177.

Diese Arbeit liefert dasselbe Resultat wie der Schluss der soeben besprochenen. Die Methode ist die, dass in der allgemeinen Form der Wurzeln einer auflösbaren Gleichung fünften Grades die auftretenden Constanten durch die Bedingungen

$$\Sigma x_\lambda = 0,\quad \Sigma x_\lambda^2 = 0,\quad \Sigma x_\lambda^3 = 0$$

eingeschränkt werden. No.

G. Glashan. Notes on the quintic. Newcomb Am. J. VII. 178-179.

In dieser kurzen Notiz wird die allgemeine Form irreductibler, auflösbarer Gleichungen fünften Grades mitgeteilt, die von Herrn G. P. Young bereits 1883 gefunden sei. Hieran schliessen sich einige geschichtliche Bemerkungen über diese Form.

No.

Paxton Young. Solvable irreducible equations of prime degrees. Newcomb Am. J. VII. 271-278.

Die allgemeine Form für die Wurzel x_1 einer irreductiblen auflösbaren Primzahl-Gleichung m^{ten} Grades ist gegeben durch

$$mx_1 = \Delta^{\frac{1}{m}} + a\Delta^{\frac{2}{m}} + b\Delta^{\frac{3}{m}} + \cdots + c\Delta^{\frac{m-1}{m}},$$

wobei $a, b, \ldots, c$ rationale Functionen von Δ sind. Es wird gezeigt, dass die einzelnen Summanden der rechten Seite sich so in Gruppen anordnen lassen, dass die symmetrischen Functionen der Glieder jeder einzelnen Gruppe rationale Functionen der Wurzeln werden. Als Corollar folgt hieraus der Galois'sche Satz, dass jede Wurzel rational durch zwei andere darstellbar ist.

No.

F. J. Studnička. Ueber die algebraische Auflösung der Young'schen Gleichungen fünften Grades. Cas XIV. pag. 169. (Böhmisch.)

Nach einigen allgemeinen und historischen Bemerkungen wird der Inhalt der Abhandlung „Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations, without the aid of a Resolvent Sextic, by G. P. Young" kurz reproducirt.

Std.

E. McClintock. Analysis of quintic equations. Newcomb Am. J. VIII. 45-84.

Die Resolventen des sechsten Grades bei der allgemeinen Gleichung fünften Grades werden in drei verschiedenen Formen

gegeben, und ihre gegenseitigen Beziehungen aufgesucht. Dann werden die Elemente u_1, u_2, u_3, u_4 der unter der Form

$$x_{r+1} = \omega^{4r}u_1 + \omega^{3r}u_2 + \omega^{2r}u_3 + \omega^r u_4 + c$$

erscheinenden Wurzeln auf möglichst einfache Art durch die Wurzeln der Resolventen ausgedrückt. In die Arbeit ist ein geschichtlicher Ueberblick über die Untersuchungen aufgenommen, welche sich auf die Resolventenbildung beziehen. Den Schluss bildet die Behandlung von Resolventen, durch deren Wurzeln nicht direct die x_{r+1}, sondern rationale Functionen der x ausgedrückt werden. No.

W. Reichardt. Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen sechsten Grades. Leipz. Ber. 419-426.

Herr Klein hat darauf aufmerksam gemacht, dass die homogenen Coordinaten $w:x:y:z$ eines Knotens der zu der Complexschar

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$$

als Singularitäten-Fläche gehörigen Kummer'schen Fläche, wenn man als Coordinatentetraeder eines der 15 Fundamentaltetraeder zu Grunde legt, Grössen $y_1:y_2:y_3:y_4$ sind, deren Gruppe mit den 720 Vertauschungen der $k_1, \dots, k_6$ isomorph ist, und die deswegen für die Lösung der Gleichung sechsten Grades von Bedeutung sind. Dieser Isomorphismus wird untersucht, und dabei stellt es sich heraus, dass die quaternäre Gruppe homogener, linearer Substitutionen aus 2.16.6! Operationen besteht. Es wird gezeigt, dass es unmöglich sei, eine Gruppe von 360 Substitutionen der w, x, y, z anzugeben, die der alternirenden Gruppe der $x_1, x_2, \dots, x_6$ entspräche und ihr holoëdrisch isomorph wäre. No.

F. Brioschi. Sopra una proprietà della ridotta dell' equazione modulare di ottavo grado. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 514-516, 583-586.

Die Coefficienten der Resultante siebenten Grades der Mo-

dulargleichung achten Grades sind rationale, ganze Functionen von vier Wurzeln $x_\nu, x_{\nu+6}, x_{\nu+3}, x_{\nu+5}$; diese vier sind durch eine biquadratische Relation mit einander verbunden. Sie werden als Functionen der drei andern $x_{\nu+1}, x_{\nu+4}, x_{\nu+2}$ ausgedrückt. Die Coefficienten der Gleichung, welcher die vier ersten Wurzeln genügen, sind rationale ganze Functionen der Coefficienten derjenigen Gleichung, der die drei andern als Wurzeln angehören.

No.

P. Gordan. Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. II. Klein Ann. XXV. 459-521.

Ueber die früheren Arbeiten des Herrn Verfassers, welche sich auf diesen Gegenstand beziehen, wurde F. d. M. XII. 1880 p. 96 und XIV. 1882 p. 80 referirt. In jenen Arbeiten wurde eine neue Darstellung der behandelten Theorie in Aussicht gestellt, bei der unabhängig von der Invarianten-Theorie nur die elementaren Prozesse der gewöhnlichen Algebra zur Verwendung kommen sollten. Diese Darstellung wird in der vorliegenden Arbeit gegeben. Mit der Gleichung

$$x^7 + (2)x^5 + (3)x^4 + (4)x^3 + \cdots + (7) = 0$$

wird eine zweite zusammengestellt und behandelt

$$\xi^7 + (2)\xi^5 + (3)\xi^4 + (4)\xi^3 + \cdots + (7) = 0,$$

deren Wurzeln mit jenen der ersteren durch

$$-\sqrt{2}\xi_1 \,, \quad x_\nu + x_{\nu+1} + x_{\nu+3}$$

verbunden sind. Als Functionen S werden diejenigen ganzen Functionen der x_ν bezeichnet, welche einer bestimmten Gruppe von 168 Substitutionen angehören. Es wird gezeigt, dass alle S ganze Functionen der (ι), (ι) sind, und dass speciell (6), (6), (7), (7) sich rational durch (2) = $(\dot{2})$, (3), (3), ..., (5), (5) darstellen lassen, während zwischen diesen eine Relation besteht, die in (5), (5) vom sechsten Grade ist. Nennt man diejenigen Gleichungen, bei denen

$$(1+\sqrt{-7})(3) = (1-\sqrt{-7})(3)$$

ist, Normalgleichungen, dann wird gezeigt, wie man von der vorgelegten Gleichung durch Transformation zu einer Normalgleichung und von ihr zu einer „ausgezeichneten" Gleichung, d. h. zu einer solchen gelangen kann, deren Wurzeln durch drei unbestimmte Grössen in einer von Herrn F. Klein genauer untersuchten Form darstellbar sind. Nimmt man ferner die Wurzel einer Hülfsgleichung vierten Grades dazu, so kann man auf Gleichungen von einer der Formen

$$x^7+7.\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\nabla.x^4-7.\frac{5+\sqrt{-7}}{2}\nabla^2.x-C=0,$$

$$\xi^7+7.\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\nabla.\xi^4-7.\frac{5-\sqrt{-7}}{2}\nabla^2.\xi-C=0$$

gelangen, die sich durch elliptische Functionen auflösen lassen. Die gefundene Transformation wird endlich in die Tschirnhausen'sche Form umgesetzt. — Der grosse Formelreichtum der Arbeit verbietet es, hier genauer auf die Durchführung der angegebenen Resultate einzugehen. No.

L. Kronecker. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. Berl. Ber. 1271-1300.

Im vorigen Bande p. 83-84 ist über diese Arbeit im Zusammenhange mit der früheren gleichen Titels bereits referirt. No.

D. Besso. Sulle equazioni trinomie e, in particolare, su quelle del settimo grado. Rom Acc. L. Rend (4) I. 237-243.

Die Methode, welche die Herrn Rawson und Harley (Lond. M. S. Proc. IX; F. d. M. X. 1878. 49 u. 241) zur Berechnung der linearen Differentialgleichung gegeben haben, welcher die r^{ten} Potenzen der Wurzeln von $x^n+x^m-y=0$ genügen, und die zu einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung führt, wird derart modificirt, dass sie für einige Werte von r eine

Differentialgleichung $(n-1)^{ter}$ Ordnung liefert. Es wird dies auf $x^7+x^2-y=0$ und $x^7+x^3-y=0$ angewendet.

No.

Th. Sanio. Bemerkungen über Gleichungsauflösung. Hoppe Arch. (2) II. 332-336.

Herr Sanio behauptet, dass der Algorithmus

$$z_{k+1}=\sqrt[n]{z_k+a}$$

bei beliebigem Anfangswerte z_0 stets auf eine Wurzel z_ω der Gleichung

$$z=\sqrt[n]{z+a}$$

führen müsse. Die Methode ist bekannt (vgl. F. d. M. II. 1870. 48, IX. 1877. 60, XI. 1879. 66, XII. 1880. 76), die Behauptung in dieser Allgemeinheit unrichtig. No.

A. S. Guldberg. Om Ligninger, hvis Rödder kunne fremstilles ved et med Cardans Formel analogt Udtryk. Zeuthen T. (5) III. 39-44.

Die allgemeine Form der Gleichungen, deren Wurzeln durch $x=R_1^{\frac{1}{n}}+R_2^{\frac{1}{n}}$, dargestellt werden können, wo R_1 und R_2 die Wurzeln der Gleichung $z^2-Az+B=0$ sind, ist die folgende:

$$x^n-\frac{n}{1}Bx^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}B^2x^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}B^3x^{n-6}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^k\frac{n(n-k-1)\dots(n-2k+1)}{1.2.3\dots k}B^kx^{n-2k}+\cdots=A.$$

Gm.

P. C. Ward. On the rationalisation of $a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}$. Mess. XV. 42-44.

Die rationalisirten Formen für die Fälle $n = 3$ und $n = 5$ werden als Determinanten dargestellt, die gleich Null gesetzt sind. Glr. (Lp.)

P. A. MacMahon. Note on rationalisation. Mess. XV. 65-67.

Der Verfasser giebt eine allgemeine Methode, um mit Hülfe von Partitionen die realisirten Formen der Gleichung

$$a_1^{\frac{1}{m}} + a_2^{\frac{1}{m}} + a_3^{\frac{1}{m}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{m}} = 0$$

auszudrücken. Glr. (Lp.)

C. V. Boys. On a machine for the solution of equations. Lond. Phys. Soc., Ref. Nature XXXIII. 165-167.

Die Maschine besteht aus einem System von Wagebalken, von denen jeder ein Paar Schalen trägt, und die auf einen Unterstützungspunkt in der Mitte einwirken. Die Schalen des ersten Balkens sind mit $+a$ und $-a$, die des zweiten mit $-b$ und $+b$, des nächsten mit $+c$ und $-c$ etc. bezeichnet. In dieselben werden Gewichte vom Werte der Coefficienten a, b, c u. s. w. in der Gleichung $a+bx+cx^2+\cdots=0$ gelegt. Ein gleitendes Gelenk ist so eingerichtet, dass es einen der positiven Schale jedes Balkens gegenüberliegenden Punkt mit einer Rippe auf der Rückseite des nächst niedrigeren verbindet. Abwechselnde Balken sind einander gegenübergestellt, und jeder kann hinter dem andern weggleiten, da die besonderen Verbindungsgelenke hinter den Unterstützungspunkten und Schalen weggleiten können. Bei gewissen Stellungen wechseln die Balken die Richtung der Neigung. Diese Stellungen der Wage werden auf einer Scala markirt, deren Angaben die Wurzeln der Gleichung liefern.

Lp.

H. H. Cunyngham. On a machine for the solution of cubic equation. Lond. Phys. Soc., Ref. Nature XXXIII. 166.

Eine kubische Parabel wird gezeichnet, bei welcher die Ordinaten die Kubikwurzeln aus den zugehörigen Abscissen sind. Die zu lösende Gleichung sei $x^3 - Ax - B = 0$. Man trage auf der x-Axe ein Stück OT gleich B ab und ziehe durch den Endpunkt T eine Gerade, welche mit der x-Axe den Winkel $\operatorname{arccotg} A$ einschliesst. Die Ordinaten der Punkte, in denen diese Gerade die Curve trifft, sind die gesuchten Wurzeln. Um die imaginären Wurzeln zu finden, suche man nach der eben gegebenen Vorschrift die eine reelle Wurzel; von dem Schnittpunkte auf der Curve ziehe man an den Zweig der Curve nach der anderen Seite von Oy eine Tangente, welche die x-Axe in Q treffen möge. Ist α der reelle Wurzelwert, so sind die beiden imaginären Wurzeln: $\frac{\alpha}{2} + i\sqrt{\frac{\overline{QT}}{\alpha}}$. Ein passend eingerichtetes Lineal mit Tangenten Scala erleichtert die Ausführung der Vorschrift.

Lp.

Reuschle. Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen. Stuttgart. Metzler'sche Buchhandlung.

Ueber diese Arbeit ist bereits im vorigen Jahre Band XVI S. 68 referirt worden.

No.

A. Martin, T. C. Simmons, G. F. Walker, D. Biddle. Solutions of questions 7341, 6553, 7957. Ed. Times XLII 28-29, 43-44, 140-141; XLIII. 80-81.

Die Gleichungen

$$yz(y+z-x) = a,\quad zx(z+x-y) = b,\quad xy(x+y-z) = c$$

führen nach Division durch $xyz = p$ und Elimination von x, y, z auf die kubische Gleichung

$$4p^3 - (ab + bc + ca)p - abc = 0.$$

Die Gleichungen

$$x^2(y+z)=a^3,\quad y^2(z+x)=b^3,\quad z^2(x+y)=c^3$$

kommen durch dasselbe Verfahren auf

$$2p^3-(a^3+b^3+c^3)p^3+a^3b^3c^3=0$$

zurück. Die Gleichungen

$$x^2-yz=a^2,\quad y^2-zx=b^2,\quad z^2-xy=c^2$$

haben zu Lösungen

$$x=(a^4-b^2c^2):(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)^{\frac{1}{2}},\quad \text{u. s. w.}$$

Lp.

Cochez, B. H. Rau, B. Easton. Solution of question 7636. Ed Times XLII 54-55

Die Aufgabe, einem Rechtecke mit den Seiten a und b ein gleichseitiges Fünfeck so einzuzeichnen, dass eine Ecke in der Mitte von a, die Gegenseite auf der zweiten Seite a liegt, führt auf die Gleichung vierten Grades für die Seite x des Fünfecks:

$$x^4-4ax^3-4(14b^2-a^2)x^2-16ab^2x+16b^2(a^2+b^2)=0.$$

Lp.

A. Cayley. Solution of $(a, b, c, d) = (a^2, b^2, c^2, d^2)$. Mess XV. 59-61

Man verlangt vier Grössen (keine von ihnen gleich Null), die in irgend welcher Ordnung ihren Quadraten gleich sind. Wenn die geforderten Grössen die Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind:

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0\qquad (s \text{ nicht } = 0),$$

so muss sein:

$$(x^4+qx^2+s)^2-(px^3+rx)^2=x^8+px^6+qx^4+rx^2+s,$$

mithin

$$2q-p^2=p,\quad 2s+q^2-2pr=q,\quad 2qs-r^2=r,\quad s^2=s.$$

Die letzte Gleichung ergiebt $s=1$, und die anderen werden:

$$2q=p^2+p,\quad 2(pr-1)=q^2-q,\quad 2q=r^2+r.$$

Es giebt also acht Lösungen. Bezeichnen γ, ε, θ bezw. eine imaginäre dritte, fünfte, siebente Einheitswurzel, so findet der Verfasser folgende Lösungen:

$$\begin{array}{cccc}
1, & 1, & 1, & 1; \\
\gamma, & \gamma, & \gamma^2, & \gamma^2; \\
1, & 1, & \gamma, & \gamma^2; \\
\varepsilon, & \varepsilon^2, & \varepsilon^3, & \varepsilon^4; \\
\varepsilon\gamma, & \varepsilon^2\gamma^2, & \varepsilon^4\gamma, & \varepsilon^3\gamma^2; \\
\varepsilon^3\gamma, & \varepsilon^4\gamma^2, & \varepsilon^2\gamma, & \varepsilon\gamma^2; \\
1, & \theta, & \theta^2, & \theta^4; \\
1, & \theta^2, & \theta^4, & \theta^3.
\end{array}$$

Glr. (Lp.)

J. J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of question 1394. Ed. Times XLIII. 85-86.

Es sei gegeben:

$$x + yu = a(z + tu), \quad xu + y = b(zu + t), \quad x + yv = c(z + tv),$$
$$xv + y = d(zv + t), \quad x + y = e(z + t).$$

Die zwischen a, b, c, d, e stattfindende Relation soll aufgestellt und dadurch gezeigt werden, dass die Bedingung dafür, dass eine Gleichung fünften Grades $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta)(x, y)^5 = 0$ linear in eine reciproke transformirt werden kann, als homogene symmetrische Function 18ten Grades in den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta$ ausdrückbar ist. Die Lösung des Herrn Sharp dehnt die Untersuchung auch auf Gleichungen höheren, insbesondere des sechsten und des siebenten Grades aus. Lp.

W. J. C. Miller, S. Bills, D. Biddle, B. Easton. Solutions of questions 1208, 6695, 4009. Ed. Times XLII 122-123; XLIII 44-45.

Die Auflösung der Gleichungen

$$\text{(I)} \quad x^2 + 4xy + 6y^2 = 28, \quad x^2 + 4xz + 14z^2 = 60,$$
$$3y^2 + 2yz + 7z^2 = 40;$$

$$\text{(II)} \quad 4x^2 + 2xy + 4y^2 = 81, \quad 8x^2 + 11xz + 8z^2 = 242,$$
$$4y^2 + 7yz + 4z^2 = 100$$

wird auf ähnliche Weise, wie Schellbach es für das mit ihnen zusammenhängende Malfatti'sche Problem gethan hat, auf die bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie zurückgeführt.

Lp.

A. Buchheim. Note on linear associative algebra. Mess. XV. 76-78.

Beseitigt einen Widerspruch zwischen einem Ausspruche Cayley's in seiner Schrift „On double algebra (Lond. M. S. Proc. XV. 185) und einem von Peirce in seiner „Linear associative algebra".

Glr. (Lp.)

Capitel 2.

Theorie der Formen.

J. J. Sylvester. Sur une nouvelle théorie des formes algébriques. C. R. CI. 1042-1046, 1110-1111, 1225-1229, 1460-1464.

Diese Noten sind die Vorläufer einer grösseren Arbeit des Verfassers, die seitdem im Am. J. erschienen ist. Sie führen in eine systematische Theorie der sogenannten Differentialinvarianten ein, zu der schon Hr. Halphen den Grund gelegt hatte.

In den Untersuchungen von Hrn. Schwarz über algebraische Integrale von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kam dem Ausdrucke

$$\frac{dy}{dx}\,\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{3}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

eine bedeutsame Rolle zu, die sich unter anderm darin ausprägte, dass derselbe bei Vertauschung von y mit x keine Aenderung erlitt. Hr. Sylvester betrachtet ganz allgemein derartige ganze Functionen der Differentialquotienten (einer Function y von x): er nennt sie Reciprocanten, und zwar reine, wenn $\frac{dy}{dx}$ in ihnen

explicite nicht auftritt, im anderen Fall gemischte. Diese Reciprocanten sind durch die Forderungen definirt, bei Vertauschung von y mit x (und damit zugleich bei beliebigen linearen Substitutionen beider Variablen) sich (abgesehen von einem constanten Factor) nur um eine Potenz von $\frac{dy}{dx}$ zu ändern.

Diese Differentialinvarianten haben eine fast durchgängige Aehnlichkeit mit den gewöhnlichen Semi-Invarianten ganzer homogener algebraischer Formen von x und y.

Sie genügen einer Differentialgleichung von derselben Art, wie jene, die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen für irgend gegebene „Gewicht, Grad, und Charakter" bestimmt sich nahezu durch dieselbe Formel, wie die, welche der Verfasser früher für die Halbinvarianten gefunden. Ferner giebt es auch hier eine gewisse Anzahl einfachster Formen (Protomorphe), aus denen durch wiederholte Anwendung der erwähnten Differentialgleichung alle übrigen entspringen: so z. B.

$$\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}-\ldots\ldots,\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\cdot\frac{d^5y}{dx^5},\ldots$$

Offenbar erlauben die Differentialinvarianten durch Gleichsetzung mit Null eine fruchtbare Anwendung bei Bestimmung der Singularitäten algebraischer, ebener Curven: so z. B. der Punkte, in denen ein Kegelschnitt die Curve sechspunktig trifft. Diese Anwendungen zerfallen in drei Klassen: erstens auf rein projectivische Singularitäten der Curve (wo man bisher nur die gewöhnlichen Invarianten benutzt hat), zweitens auf solche, die auf die unendlich ferne Gerade Bezug haben, endlich solche, die mit den Circularpunkten (im Unendlichen) in Relation stehen.

Den beiden ersten entsprechen reine Reciprocanten, der letzten sogenannte orthogonale gemischte, das sind diejenigen gemischten, die sich bei Anwendung orthogonaler Substitutionen der x, y invariant verhalten.

Das Kriterium der letzteren Reciprocanten ist, dass auch ihr Differentialquotient nach $\frac{dy}{dx}$ eine Reciprocante ist.

Der Schwarz'sche Ausdruck nimmt eine Ausnahmestellung ein: er ist eben ein solcher Differentialquotient einer gemischt-orthogonalen Reciprocante nach $\frac{dy}{dx}$.

My.

J. J. Sylvester. Note on Schwarzian derivatives. Mess. XV. 74-76.

Cayley hat als „Schwarz'sche Ableitung" den Ausdruck

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$

definirt, und unter der Voraussetzung, dass die unabhängige Veränderliche, auf welche die Accente sich beziehen, x ist, ihn mit dem Symbole $\{y, x\}$ bezeichnet.

In der vorliegenden Notiz giebt Herr Sylvester einen leichten Beweis für die auf die Schwarz'schen Ableitungen bezügliche fundamentale Identität

$$\{y, x\} - \{z, x\} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \{y, z\}.$$

Aus dieser Identität folgt, dass $\{y, x\}$ wie y'' die Eigenschaft besitzt, ein Factor des Ausdruckes zu bleiben, in den es sich verwandelt, wenn x und y vertauscht werden. Herr Sylvester wird somit in einem Nachtrage darauf geführt, die Functionen zu untersuchen, welche er „Reciprocanten" nennt und wie folgt definirt: Es mögen vorläufig solche Functionen von x, y, die entweder ungeändert bleiben oder nur ihr Zeichen wechseln, wenn x und y vertauscht werden, „selbst reciprocisirende Functionen" heissen. Der erste Fall dieser Art ist $\frac{y''}{y'^{\frac{3}{2}}}$, der nächste $\frac{s'y''-y''^{3}}{y'^{2}}$, und augenscheinlich ist ein sehr allgemeiner dieser Art

$$\left(\frac{1}{y'^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{dx}\right)^n \log y'.$$

Der Zähler jeder solchen Function, wenn dieselbe entwickelt und auf den niedrigsten gemeinsamen Nenner gebracht ist, wird eine „Reciprocante" genannt. Der höchste Index der Differentiation, den eine solche Reciprocante enthält, ist ihre Ordnung, und die Anzahl Factoren in jedem Term ihr Grad. Der Verfasser betrachtet dann kurz die Bildungsweise der Reciprocanten und weist die Analogie zwischen ihnen und den Semiinvarianten nach. Dies ist die Abhandlung, in welcher Herr Sylvester auf die Betrachtung der Reciprocanten geführt ist und in welcher er ihre Erforschung begann. Zahlreiche Schriften von ihm selbst, von MacMahon, Elliott, Leudesdorf und anderen sind seitdem über diesen Gegenstand veröffentlicht worden. Glr. (Lp.)

J. J. Sylvester. On reciprocants. Mess. XV 88-92.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der eben besprochenen. Herr Sylvester fährt in der Entwickelung der Theorie der Reciprocanten fort. Glr. (Lp.)

G. Koenigs. Sur les types canoniques des formes quadratiques ternaires des différentielles à discriminant nul. C. R. C. 789-791.

Sei F eine, in zwei lineare Formen ω, ω' zerlegbare quadratische Form von den Differentialen du_1, du_2, du_3 mit Functionen der u als Coefficienten. Es kommt darauf an, ω und ω' durch zwei andere Factoren zu ersetzen, die lineare Formen von nur zwei Differentialen sind. Dies wird für den Fall ausgeführt, dass wenigstens einer der beiden Factoren ω, ω' integrabel ist.

Es lassen sich auch die Transformationen angeben, die die verschiedenen Zerlegungen in einander überführen.

My.

MacMahon. A second paper on perpetuants. Newcomb Am. J. VII 259-263.

Füllt eine in der ersten Abhandlung über den gleichen [Ge]genstand (cf F. d. M. XVI. 1884. p. 104) gelassene Lücke aus. [Di]e dort vermutungsweise aufgestellte Formel für die Syl[ve]ster'sche erzeugende Function der sextic perpetuants:

$$\frac{x^{31}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)}$$

[wi]rd hier in aller Form als richtig nachgewiesen. Die Methode [is]t die der symbolischen Darstellung (mittelst Partitionen von [Za]hlen) symmetrischer Functionen.

In derselben Weise gelingt die Ableitung für die erzeugende [Fu]nction der n^{ic} perpetuants:

$$\frac{x^{2^{n-1}-1}}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)}.$$

[D]araus fliesst das fundamentale Resultat, dass die Anzahl eines [vo]llen Systems von Grundformen vom Grade ϑ und Gewicht w, [di]e eine binäre Form unbegrenzter Ordnung besitzt, erhalten wird [al]s Coefficient von $a^\vartheta x^w$ in der nach steigenden Potenzen von x [vo]r sich gehenden Entwicklung:

$$a+\sum_{\vartheta=1}^{\vartheta=\infty} a^\vartheta \frac{x^{2^{\vartheta-1}-1}}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^\vartheta)}.$$

My.

J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of questions 6218, 7454. Ed Times XLII. 29-30.

Man bezeichne durch E_i und F_i beziehungsweise

$$E_i = a_0\frac{d}{da_i}+ia_1\frac{d}{di_{i+1}}+\frac{i(i+1)}{1.2}a_2\frac{d}{da_{i+2}}+\cdots,$$

$$F_i = a_0\frac{d}{da_i}+(i+1)a_1\frac{d}{da_{i+1}}+\frac{(i+1)(i+2)}{1.2}a_2\frac{d}{da_{i+2}}+\cdots$$

[da]nn ist 1) $(F_1)^n$ in Gliedern mit $F_1, F_2, F_3, \ldots$ ausdrückbar, [un]d 2) wenn J eine Invariante der i^{ten} Ordnung von

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n$$

[is]t, die J' wird, wenn jeder Index um eine Einheit vergrössert

wird, so hat man

$$J = \Phi J', \quad \text{wo} \quad \Phi = \Sigma \frac{E_r^{\lambda} . E_s^{\mu} . E_t^{\nu} \ldots}{\lambda! \mu! \nu! \ldots},$$

und wo $\lambda, \mu, \nu, \ldots, r, s, t, \ldots$ ganze Zahlen sind, die der Gleichung genügen

$$\lambda r + \mu s + \nu t + \cdots = i.$$

Lp.

D. Hilbert. Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen. Inaug.-Diss. Königsberg i. Pr. R. Leupold.

Behufs Ergründung der invarianten Eigenschaften der Kugelfunctionen wird eine Reihe von neuen Sätzen über die Darstellbarkeit von In- und Covarianten binärer Formen vorausgeschickt, von denen wir folgende hervorheben.

„Ist $f = a_x^n$ die gegebene Grundform, und bedeutet f_i den mit $\frac{(n-i)!}{n!}$ multiplicirten i^{ten}, nach der Variabeln x genommenen Differentialquotienten von f, so bleibt eine Invariante, resp. das Leitglied einer Covariante von f ungeändert bei Ersetzung der Coefficienten a_i durch die f_i".

„Jede homogene und isobare Function C der f_i ist eine Covariante von f, wenn sie der Differentialgleichung

$$D(C) = f_0 \frac{\partial C}{\partial f_1} + 2 f_1 \frac{\partial C}{\partial f_2} + \cdots = 0$$

genügt". C heisst dann eine Derivante von f.

Dies wird auf ein System von Grundformen erweitert.

Sodann wird die Operation D, nebst einer in gewissem Sinne parallelen Δ, einer eingehenden Untersuchung unterworfen. Der Process $(D\Delta - \Delta D)$ ändert eine Derivante nur um einen Zahlenfactor. Die Derivante C heisst vom ν^{ten} Range, wenn in der Reihe DC, D^2C, $D^3C, \ldots D^{\nu+1}C$ die erste, identisch verschwindende Bildung ist. Dann lässt sich C auf nur eine Weise als Summe von $(\nu + 1)$ speciellen Derivanten darstellen.

Dies wird benutzt, um verschiedene, aequivalente Kriterien für ein Formensystem zu ermitteln, für welches eine gewisse Simultancovariante identisch Null ist.

Nach Aufstellung einzelner interessanter Polareigenschaften der Kugelfunction $P^n(x)$ wird die Aufgabe, die invarianten Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation einer binären Form mit allgemeinen Coefficienten in die Kugelfunction $P^n(x)$ zu eruiren, vollständig gelöst.

Dabei ergiebt sich eine gemeinsame Covariantenrelation der Kugelfunctionen aller Ordnungen.

Den Schluss bilden zwei allgemeine Sätze über Potenzdarstellung einer binären Form. My.

S. Mertens. Ueber die Invarianten einer und zweier bilinearer Formen. Krak. Denkschr. X. (Polnisch

Zweck dieser Abhandlung ist: 1) Die Bestimmung der allgemeinen Gestalt der Invarianten der in Bezug auf die $2n$ Veränderlichen $x_1\, x_2 \dots x_{2n}$, sowie auf die $2n$ Veränderlichen $y_1\, y_2 \dots y_{2n}$ linearen, ihr Zeichen bei Vertauschungen von x und y wechselnden Form:

$$\begin{aligned}\varphi(xy) = a_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) &+ a_{13}(x_1y_3 - x_3y_1) + \cdots + a_{1,2n}(x_1y_{2n} - x_{2n}y_1) \\ &+ a_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\qquad\qquad + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\qquad\qquad + a_{2n-1,2n}(x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}),\end{aligned}$$

wo die Elemente

$$\begin{matrix} a_{12}\; a_{13} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{23} & \dots & a_{2,2n} \\ & \dots & \\ & \dots & a_{2n-1,2n} \end{matrix}$$

als ganz unabhängig von einander zu betrachten sind. 2) Die Bestimmung der zwei solchen Formen gemeinschaftlichen Invariante. Dn.

D. Hilbert. Ueber eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades. Leipz. Ber. 427-438.

Ist a_x^n eine gegebene binäre Grundform, so soll α_x^ν als irrationale Covariante von a_x^n so bestimmt werden, dass man identisch hat:

$$(a_x^n, \alpha_x^\nu)^\nu = \lambda \alpha_x^\nu,$$

wo λ, ein constanter Factor, eine irrationale Invariante, d. i. Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, deren Coefficienten J rationale Invarianten sind:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\nu+1} + J_1\lambda^\nu + J_2\lambda^{\nu-1} + \cdots + J_\nu = 0.$$

Diese Form Δ wird explicite als Determinante aufgestellt. Im allgemeinen gehört zu jeder Wurzel λ von $\Delta(\lambda) = 0$ eine Form α_x^ν. Solche $\nu+1$ Formen sind linear unabhängig.

Irrationale In- und Covarianten dieser Art sollen dazu dienen, für die Ausartungen einer Grundform a_x^n geeignete Kriterien zu gewinnen. My.

J. Hammond. On the syzygies of the binary sextic and their relations. Newcomb Am. J. VII. 327-344.

Eine vollständige Liste der bez. Syzygien und ihrer Relationen wird mitgeteilt. Aus den Syzygien der einfachsten Art setzen sich wieder andere linear mittels Potenzen und Producte von „Grundformen“ zusammen u. s. f. Man kann für solche Syzygien, d. h. für ihre linken Seiten (Syzyganten) „erzeugende Functionen“ aufstellen, die von denen für Semiinvarianten in einfacher Weise abhängen. Eine eingehende Untersuchung dieser erzeugenden Functionen liefert den Beweis für die Richtigkeit und Vollständigkeit der voraufgeschickten Tabellen. My.

J. Hammond. Syzygy tables for the binary quintic. Newcomb Am. J. VIII. 19-25.

Es werden zwei Tabellen (ohne Beweis) mitgeteilt.

Die erste enthält die Anzahlen der für irgend ein deg-order (bis zum Grade 36 in den Coefficienten) existirenden Syzygien,

d. h. lineare Identitäten zwischen den Potenzen und Producten der 23 Grundformen $a, b, c, \dots, w$ der binären Form fünfter Ordnung. Ausser der bedeutenden Erweiterung weist diese Tafel gegenüber den von Cayley und Sylvester früher angegebenen eine ziemliche Anzahl von Reductionen auf.

Die zweite, grössere Tabelle bringt diese Syzygien selbst. Es macht sich die eigentümliche Erscheinung geltend, dass immer wenigstens ein Glied zweiter Dimension auftritt, und nach diesen können sämtliche Identitäten unzweideutig bezeichnet werden; z. B. ce repräsentirt die Syzygie vom niedrigsten deg-order 5.11:

$$ai + bf - ce = 0,$$

andrerseits w^2 die vom höchsten deg-order 36.0

$$g^3u^2 - 2g^2q^2u + gq^4 - 72gqu^2 - 8q^3u + 432u^3 - 16w^2 = 0.$$

My.

W. Spottiswoode. On quadric transformations.

Lond. M. S. Proc. XVI. 148-171.

In die Function

$$U = ax^2 + bxy + cy^2$$

wird

$$x = \alpha\xi^2 + \beta\xi\eta + \gamma\eta^2, \qquad y = \alpha'\xi^2 + \beta'\xi\eta + \gamma'\eta^2$$

eingesetzt und von der neu entstehenden Function $W(\xi, \eta)$ werden Invarianten und Covarianten berechnet. Das Gleiche geschieht mit

$$U = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

und ebenso mit

$$U = ax^2 + bxy + cxz + \cdots + hz^2,$$

wobei dann

$$z = \alpha''\xi^2 + \beta''\xi\eta + \gamma''\eta^2$$

gesetzt ist. No.

G. Torelli. Sul sistema di più forme binarie cubiche.

Nap. Rend. XXIV. 258-261.

Für ein System von resp. 2, 3, 4, 5 kubischen binären Grundformen werden gewisse Covariantenidentitäten entwickelt, Ver-

allgemeinerungen von solchen, die der Herr Verfasser früher gelegentlich benutzt hatte. My.

G. Battaglini. Sulle forme binarie bilineari. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 691-699.

Die geometrischen Eigenschaften einer und mehrerer projectivischer Abhängigkeiten zwischen einstufigen Grundgebilden, ihre Ausartungen (in singuläre, cyklische, periodische) u. s. f. werden durch die invarianten Beziehungen der darstellenden bilinearen Formen abgeleitet. Eine besondere Rolle spielen zwei „harmonische“ Projectivitäten, d. h. solche, für deren Formen die bilineare simultane Invariante verschwindet.

Drei bilineare Formen werden den Coordinaten eines Punktes der Ebene, vier solche denen eines Raumpunktes proportional gesetzt, was zu einfachen Interpretationen führt. Der wesentliche Inhalt der Arbeit ist übrigens in der letztjährigen grossen Arbeit von Stéphanos (cf. das Referat F. d. M. XVI. 1884. p. 98) enthalten. My.

B. Igel. Ueber einige Anwendungen des Principes der Apolarität. Wien. Ber. XCII. 1153-1194.

Im Anschluss an die Arbeit des Herrn Rosanes in Borchardt J. LXXVI. wird eine Reihe von Sätzen behandelt, die sich auf gewisse einfachste Combinanten eines Systems binärer Formen beziehen. Zum Ausgang dient das Theorem: „Die Hauptcombinante, d. i. die Determinante der $(n-1)^{ten}$ Differentialquotienten von n binären Formen n^{ter} Ordnung lässt sich als lineare ganze Function jener n Formen darstellen. Die (constanten) Coefficienten bilden Verhältnisse, die simultane Invarianten der n Formen sind“. Ist a_x^n eine der n Formen, so geht durch die Operation

$$\frac{\partial}{\partial a_0} x_2^n - \frac{\partial}{\partial a_1} x_2^{n-1} x_1 + \cdots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial a_n} x_1^n$$

aus irgend einer der erwähnten n Invarianten eine Covariante des Systems hervor. Diese ist aber zugleich eine Combinante,

und ist gleichfalls linear und ganz durch die n Grundformen ausdrückbar. Daraus wird für die n Invarianten die Eigenschaft abgeleitet, als Function der n^{ten} Ueberschiebungen der Grundformen (übereinander) herstellbar zu sein. Andererseits kann man sie auch durch einfache Polarenprocesse aus der Hauptcombinante ableiten.

Mit Hülfe dieser Entwicklungen giebt der Verfasser einen neuen Beweis eines Rosanes'schen Satzes über die Hauptcombinanten der Hauptcombinanten von $n+1$ binären Formen ungeraden Grades n. Zum Schlusse wird gezeigt, welche Bedingungen die Hauptcombinante zu erfüllen hat, damit eine Anzahl der gegebenen Grundformen einen linearen Factor gemein hat.

Die Litteratur scheint dem Verfasser nur ungenügend bekannt gewesen zu sein; denn auf die hier eingreifenden Untersuchungen der Herren Brill, Stéphanos, Stroh, Study und des Referenten wird nirgends Bezug genommen. My.

B. Igel. Zur Theorie eines simultanen Systems dreier binärer kubischer Formen. Wien. Denkschr. IL. 277-297.

Fortsetzung der vorjährigen Arbeit des Verfassers: „Ueber ein Princip zur Erzeugung von Covarianten" (cf. das bezügliche Referat). Es wird eine Reihe von dort aufgestellten Covarianten resp. Combinanten auf niedrigere zurückgeführt. Die Rechnung ist zum Theil complicirt. My.

A. Cayley. On the theory of seminvariants. Quart. J. XXI. 92-107.

Die Aufgabe, für eine gegebene binäre Form die zugehörigen Invarianten vierter Ordnung (nebst den zwischen denselben herrschenden Relationen) zu ermitteln, hatte den Verfasser schon vor 40 Jahren zu einem gewissen Systeme linearer Gleichungen geführt. Zu einem ähnlichen Systeme gelangt man bei der analogen Aufgabe betr. die Leitglieder der kubischen Covarianten der Form. Trotz der grossen Anzahl jener Gleichungen gelingt die explicite Auflösung, mit Hülfe der Tabellen, die der Verfasser im Am. J. 1885 (Bd. VII) niedergelegt hat. My.

A. Cayley. On a theorem relating to seminvariants. Quart. J. XXI. 212-213.

Durch die Operation $2w\theta - \delta\Omega$, wo

$$\theta = b\delta_a + c\delta_b + d\delta_c + \cdots,$$
$$\Omega = \qquad c\delta_b + 2d\delta_c + \cdots,$$

ausgeübt an einer Seminvariante vom Grade δ und vom Gewichte w, erzeugt man eine neue Seminvariante vom Grade δ, aber vom Gewicht $w+1$.

Ein ausgerechnetes Beispiel wird mitgeteilt.

My.

P. A. MacMahon. Operators in the theory of seminvariants. Quart. J. XXI. 362-365.

Seien, wenn a, b, c, ... die Coefficienten einer binären Form sind, unter θ und Ω die Operationen verstanden:

$$\theta = b\frac{\partial}{\partial a} + c\frac{\partial}{\partial b} + d\frac{\partial}{\partial c} + \cdots,$$
$$\Omega = c\frac{\partial}{\partial b} + 2d\frac{\partial}{\partial c} + 3e\frac{\partial}{\partial d} + \cdots,$$

so hatte Herr Cayley die Wirkung gewisser linearer Combinationen von θ und Ω, besonders $2w\theta - \delta\Omega$ an einer Semiinvariante der Form vom Gewichte w und Grade δ geprüft. Dies hat den Verfasser veranlasst, die Natur solcher Operatoren näher zu ergründen, und es gelingt ihm dies in der Weise, dass er sie als specielle Fälle allgemeinerer Operatoren erkennt. Er bedient sich dabei mit Vorteil der symbolischen Darstellung (mittels Partitionen ganzer Zahlen) symmetrischer Functionen, wie sie in den letzten Jahren in einer Reihe von Aufsätzen im Am. J. (von Cayley, dem Verfasser u. A.) angebahnt ist. My.

P. MacMahon. Memoir on seminvariants. Newcomb Am. J. VIII. 1-18.

Fortsetzung von früheren Arbeiten des Verfassers (s. die vorjährigen Referate F. d. M. XVI. 1884. 104). Die von Cayley und Sylvester inaugurirte neue Richtung der Invariantentheorie ist zu-

nächst wesentlich eine abzählende: es handelt sich in erster Linie um die Anzahl eines vollständigen Systems von „Grundformen", d. h. einer (nach Gordan) endlichen Zahl von In- und Covarianten einer (oder mehrerer) binären Form. Diese Frage führte zunächst auf die andere: Wie viele linear unabhängige Semiinvarianten (d. h. Invarianten oder Leitglieder von Covarianten) giebt es, von gegebenem deg-order, d. h. gegebenen Graden in den Coefficienten der Urformen und der Variabeln? Diese Frage wurde von Sylvester durch eine einfache Formel beantwortet. Wenn aber Sylvester weiterhin annahm, dass bei gegebenem deg-order nur zweierlei eintreten könne, dass entweder nur solche (linear unabhängigen) Semiinvarianten existiren oder aber nur Syzygien, d. h. lineare Identitäten zwischen Potenzen und Producten jener, und daraufhin die gesuchten Zahlen als Coefficienten gewisser Potenzentwicklungen ableitete, so zeigt Hammond, dass das eben erwähnte „Fundamentalpostulat" Ausnahmen zulässt. Das hatte eine Aenderung in der ganzen Arbeitsrichtung zur Folge. Man sah sich genötigt, die Natur der Semiinvarianten selbst näher zu durchforschen, und aus ihnen gewisse Klassen herauszugreifen, die eine directere Behandlung erlauben, andererseits aber auch die Syzygien je nach dem Grade ihrer Complication einzuteilen und dann stufenweise bezüglich ihrer Möglichkeit und Anzahl zu untersuchen.

Hinsichtlich des ersteren griff man nach dem Vorgang von Sylvester selbst die sogenannten „Perpetuanten" heraus, d. h. Semiinvarianten, wie z. B. $a_0 a_2 - a_1^2$, die für binäre Formen jeder Ordnung existiren.

Durch directe Darstellung dieser Perpetuanten durch die einfachsten symmetrischen Functionen der Wurzeln (der Urform), die durch einen einfachen, die Partitionen ganzer Zahlen benutzenden Symbolismus erheblich unterstützt wurde, andererseits durch Hinzuziehung der charakteristischen Differentialgleichungen, sowie solcher Differentialoperationen, die Perpetuanten wieder in solche überführen, gelang es Cayley, Sylvester, Hammond, MacMahon, die auf Perpetuanten bezüglichen Fragen zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen.

Die so bewährten Methoden wurden nun wieder auf umfassendere Klassen von Semiinvarianten ausgedehnt. Zuvorderst auch die „asyzygetischen“, wo (für das je vorliegende deg-order) keine Syzygien herrschen, während man sich (cf. die Referate über Hammond S. 82) bei der schwierigen Frage nach der Existenz der Syzygien der verschiedenen Ordnungen auf einfache Fälle (bis zur sextic incl.) beschränkte.

Der Verfasser stellt nun verschiedene Differentialoperatoren auf, welche aus „asyzygetischen Semiinvarianten“ wieder solche erzeugen, und constatirt eine Reihe von Recursionsgesetzen, denen solche Operatoren unterliegen. Wir erwähnen etwa das erste. Sind $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die Coefficienten der binären Urform, und setzt man:

$$d_\lambda = a_0 \frac{\partial}{\partial a_\lambda} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_{\lambda+1}} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_{\lambda+2}} + \cdots$$

(wo d_λ ein Operator der eben festgestellten Art ist), so gilt:

$$d_1 \frac{\partial}{\partial a_\lambda} = - \frac{\partial}{\partial a_{\lambda+1}}.$$

Ein anderes ist eine Art Erweiterung des Hermite'schen Reciprocitätsgesetzes u. s. f.

Wie die praktische Ausübung solcher Operatoren am besten vor sich geht, wird nach einem Cayley'schen Schema an besonderen Fällen exemplificirt, wo das Gewicht succ. die Werte 8, 11, 13 hat.

Am Schlusse gelangt der Verfasser mit Hülfe der skizzirten Mittel zu einer (endlichen) Taylor'schen Reihenentwicklung, die für jede Semiinvariante einer binären Form Gültigkeit besitzt.

My.

R. S. Ball, W. J. C. Sharp. Solution of question 5501. Ed. Times XLII. 67-68.

Wird in einer Gleichung x in $k + x'^{-1}$ verwandelt, so ist jede Semiinvariante der transformirten Gleichung eine Covariante der ursprünglichen Gleichung.

Lp.

G. Torelli. Teoremi sulle forme binarie cubiche e loro applicazione geometrica. Ann. d. R. Ist. tecn. e naut. di Nap. II.

Es seien:

$$a = \Sigma \binom{3}{i} a_i x^{3-i} y^i, \quad m = \Sigma \binom{3}{i} m_i x^{3-i} y^i, \quad n = \Sigma \binom{3}{i} n_i x^{3-i} y^i$$

$$(i = 0, 1, 2, 3)$$

drei binäre kubische Formen, $d' = \Sigma \binom{3}{i} d'_i x^{3-i} y^i$ die Covariante dritten Grades der Form:

$$d = \begin{vmatrix} y^3 & -3y^2x & 3yx^2 & -x^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ n_0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix},$$

$$I = (a_0 d'_3 - a'_0 d_3) - (a_1 d'_2 - a'_1 d_2),$$

h die Hesse'sche Form von d, k die Covariante zweiten Grades der Formen a, d und endlich J die simultane Invariante der quadratischen Formen h, k.

Dann ist $I = 0$ oder auch $J = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich zwischen den kubischen Formen des Büschels $m + \lambda n$ eine befindet, die einen Factor zweiten Grades mit a gemeinsam hat. Dieser Factor gehört alsdann der Hesse'schen Form h von d an. Umgekehrt, wenn a einen quadratischen Factor mit dieser Hesse'schen Form gemein hat, kann man einen solchen Wert von λ finden, dass $m + \lambda n$ diesen selben Factor besitzt.

Der Verfasser beweist dieses Theorem durch ganz elementare Betrachtungen, macht einige Anwendungen von ihm auf die kubischen Involutionen und schliesst seine Arbeit mit dem synthetischen Beweise der geometrischen Ergebnisse, zu denen er auf diese Art gelangt. La. (Lp.)

M. Noether. Note über die Normalcurven $p = 5, 6, 7$. Klein Ann. XXVI. 143-150.

Für die angegebenen Fälle werden die $3p-3$ Moduln einer Klasse von algebraischen Functionen, sowie p linear unabhängige

Functionen φ in einfacher Weise aufgestellt. Dies führt zugleich zu den einfachsten, der Klasse zugehörigen Normalcurven.

So bestehen für $p=5$ zwischen den fünf Grössen φ drei willkürliche quadratische Relationen. Vermöge linearer Combination derselben und linearer Transformation der φ kann man die Anzahl der willkürlichen Constanten auf zwölf (d. i. die Anzahl der Moduln) herabdrücken. My.

F. Mertens. Ueber einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat. Wien. Ber. XCI. 637-639.

Derselbe ist dadurch definirt, dass sich auf ihm die beiden sog. „harmonischen" Kegelschnitte je zweier Individuen des Büschels schneiden. Er wird in Combinantenform aufgestellt. Man kann von ihm ohne weiteres sechs Punkte angeben.

My.

G. Pittarelli. Intorno alla nota del sig. Spottiswoode: „Sur les invariants et les covariants d'une fonction transformée par une substitution quadratique." Nota I. II. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 327-331, 374-381.

Liefert die (symbolischen) Beweise für eine Reihe von Formeln, die Spottiswoode in einer Arbeit im Jahre 1883 (cf. das Referat F. d. M. XV. 1883. p. 83) aufgestellt hatte.

My.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

C. Reuschle. Zur Resultantenbildung. Schlömilch Z. XXX. 106-110.

Die Bézout'sche Methode der Resultantenbildung wird durch eine einfachere ersetzt. Ist z. B.

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \quad b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$$

gegeben, so eliminirt man aus den drei Systemen von je zwei Gleichungen

$$a_0x^3+(a_1x^2+\cdots)=0; \quad (a_0x+a_1)x^2+(a_2x+a_3)=0,$$
$$b_0x^3+(b_1x^2+\cdots)=0; \quad (b_0x+b_1)x^2+(b_2x+b_3)=0,$$
$$(a_0x^2+a_1x+a_2)x+a_3=0,$$
$$(b_0x^2+b_1x+b_2)x+b_3=0$$

bez. x^3, x^2, x und erhält die drei Bézout'schen Gleichungen zweiten Grades. No.

C. Reuschle. Berichtigung. Schlömilch Z. XXX. 308.

Mitteilung, dass die vom Herrn Verfasser in Schlömilch Z. XXX. S. 106 gegebene Herleitung der Bézout'schen Resultante sich bereits bei Cauchy findet. No.

B. Elliot. On eliminants and associated roots. Lond. M. S. Proc. XVI. 224-231.

Die Aufgabe, um die es sich handelt, ist die folgende. Sei

$$f(x)=a_1\psi_1(x)+a_2\psi_2(x)+\cdots+a_m\psi_m(x),$$
$$g(y)=b_1\chi_1(y)+b_2\chi_2(y)+\cdots+b_n\chi_n(y),$$

wobei die ψ und χ ganze Functionen der Argumente bedeuten, dann sollen die Beziehungen zwischen den Coefficienten a, b und den partiellen Ableitungen einer Function

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

aufgestellt werden, wenn $F = 0$ die Bedingung dafür giebt, dass zwischen den Wurzeln von $f = 0$, $g = 0$ die Beziehung

$$\varphi(x, y) = 0$$

besteht. Die benutzte Methode ist von Salmon gegeben.

No.

E. Netto. Zur Theorie der Elimination. Acta Math. VII. 101-104.

Rein algebraischer Beweis des Satzes: „Geht eine algebraische Curve $F(x, y) = 0$ durch sämtliche Schnittpunkte zweier anderen algebraischen Curven $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$, so ist eine Potenz von F als lineare homogene Function von f und f_1 darstellbar:

$$F(x, y)^\mu = f(x, y)\, g(x, y) + f_1(x, y)\, g_1(x, y)$$

wo F, f, f_1, g, g_1 ganze Functionen von x, y bedeuten".

Hierbei darf μ gleich der höchsten bei den Schnittpunkten auftretenden Multiplicität genommen werden.

Der Satz bildet einen besonderen Fall zu früheren Untersuchungen von Herrn Noether (Math. Ann. Bd. VI.), die sich mit den Kriterien der Darstellbarkeit für den Fall $\mu = 1$ beschäftigten.

My.

J. Gierster. Ueber die Galois'sche Gruppe der Modulargleichungen, wenn der Transformationsgrad die Potenz einer Primzahl > 2 ist. Klein Ann. XXVI. 309-368.

Die betrachtete Gruppe G besteht aus den Substitutionen

$$S \equiv \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \pmod{q^n}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{q^n}.$$

Für $n = 1$ hatte der Herr Verfasser sämtliche Untergruppen aufgestellt und hinsichtlich ihrer Gleichberechtigung klassificirt, (vgl. F. d. M. XIII. 1881. 119); dasselbe Problem wird hier für Primzahlpotenzen durchgeführt. Bei der Behandlung erweist sich die Benutzung des Galois'schen Imaginären nicht nur als

vorteilhaft, sondern sogar als notwendig, so dass also von vornherein neben die Definition der Gruppe in reeller eine andere in imaginärer Form tritt. Zunächst stellt sich eine, im allgemeinen umfassendste, ausgezeichnete Untergruppe E dar, welche alle Substitutionen von G enthält, die mod. q zur Identität congruent sind. Der Gruppe E tritt diejenige zur Seite, welche aus ihr durch Hinzunahme der Substitution $\omega' \equiv \omega + 1$ (mod. q^n) abgeleitet wird; sie ist keine ausgezeichnete Untergruppe von G mehr. Von E und F werden die Untergruppen aufgestellt und klassificirt; dann folgt eine Behandlung der nicht-cyklischen Untergruppen von G, welche nicht in E oder F enthalten sind. Der Fall $q = 3$, welcher eine Ausnahme bildet, wird zum Schlusse für sich behandelt. No.

G. Frattini. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 281-285, 455-457.

G. Frattini. Intorno alla generazione dei gruppi d'operazioni e ad un teorema d'aritmetica. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 17-19. 1886.

Hat ein System $g^{(\nu)}$ von Substitutionen der Gruppe G die Eigenschaft, letztere zu erzeugen, ohne dass ein Teil von $g^{(\nu)}$ dies schon bewirken kann, so heisst $g^{(\nu)}$ ein „erzeugendes System von unabhängigen Substitutionen für G“. Es giebt Substitutionen, wie z. B. die Einheit, die in keinem möglichen solcher Systeme $g^{(\nu)}$ auftreten. Diese bilden eine besondere Untergruppe Φ von G, deren Eigenschaften in den drei angeführten Noten erforscht werden. So ist Φ eine ausgezeichnete Untergruppe von G; sie fällt mit der gemeinsamen Gruppe aller Maximaluntergruppen von G zusammen; ist $p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \dots$ ihre Ordnung, wobei $p, q, r \dots$ verschiedene Primzahlen bedeuten, dann hat Φ nur je eine Untergruppe der Ordnung $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma \dots$ u. s. f.

In der dritten Note wird ein Theorem ausgesprochen, welches sich auf die Lösbarkeit von linearen Congruenzen bezieht; man gelangt zu ihm durch diejenige Gruppe Φ, welche sich

aus den Gruppen G mit unter einander vertauschbaren Substitutionen ergiebt. No.

G. Frattini. Un teorema relativo alla trasformazione modulare di grado p. Rom Acc L. Rend. (4) I. 12-13.

G. Frattini. Un teorema relativo al gruppo della trasformazione modulare di grado p. Rom Acc. L. (4) I. 142-147, 166-168.

Sind drei beliebige Substitutionen der Modulargruppe gegeben, s, s_1, s_2, dann kann man stets zwei andere derselben Gruppe t_1, t_2 so wählen, dass

$$(t_1^{-1} s_1 t_1)(t_2^{-1} s_2 t_2) = s$$

wird. Aus diesem Satze ergiebt sich dann leicht, dass die Modulargruppe eine einfache Gruppe sei. No.

L. Autonne. Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe cubique Cremona. C. R. CI 53-56.

Die Untersuchung schliesst sich an die F. d. M. XVI. 1884. p. 118 besprochene an; sie zerlegt die betrachteten Gruppen je nach der Art eines auftretenden Doppelpunktes in zwei Kategorien und klassificirt die eine derselben. No.

E. Netto. Teoria delle sostituzioni e sua applicazione all' algebra. Versione dal tedesco con modificazioni ed aggiunte dell' autore per G. Battaglini. Torino. Loescher.

Das Werk, dessen italienische Uebersetzung uns vorliegt, wurde schon am geeigneten Orte (F. d. M. XIV. 1882. p. 90 ff.) ausführlich besprochen; wir werden uns also damit begnügen, auf die in dieser neuen Ausgabe vorgekommenen Abänderungen kurz hinzudeuten. Diese sind zahlreich, nicht aber sehr be-

deutend. — Wesentlich ist die Abänderung des Beweises des Lehrsatzes I in § 1 (die Nummern der Paragraphen beziehen sich immer, sofern das Gegenteil nicht ausdrücklich gesagt wird, auf die Uebersetzung), welche erlaubt, die Beweise in §§ 9, 32, 149 zu vereinfachen; sowie die Umarbeitung der §§ 214-216, wodurch das Theorem IX ausgedehnt, und ein neuer Satz (T. X) aufgestellt wird, als dessen Consequenzen die in dem Lehrsatze X ausgesprochenen Resultate erscheinen. Ausserdem wird der Beweis des T. IV § 211 etwas modificirt; der Satz selber wird aber zu einem ungenauen, indem die Erwähnung des Grades der Primzahlwurzel, mit welcher man V_n multipliciren will, aus demselben wegfällt. Die Theoreme XIV und XV (§ 74-75) werden durch allgemeinere ersetzt; der alte Lehrsatz XV erscheint als eine Folge des an seiner Stelle stehenden Satzes. In § 213 kommen ganz unbedeutende Veränderungen vor. In § 212 bleibt der Beweis des Theorems VII weg, der als eine ersichtliche Folge des Theorems V angegeben wird. § 204 ist etwas verkürzt. Ein neues Beispiel von Gleichungen, deren Wurzeln die Form

$$x,\quad \theta(x),\quad \theta^2(x),\quad \ldots,\quad \theta^{n-1}(x)$$

haben, bildet den Inhalt des neu hinzugefügten § 175. Neue Theoreme findet man in den §§ 84, 153 (Se il gruppo etc.), 187; neue Zusätze und Bemerkungen in den §§ 32 (Cor.), 49 (Cor. III), 71 (Se fosse $m = 1$ etc.), 88 (Se G è isomorfo etc.), 195 (am Ende). Einige im Originale vorkommende Fehler werden corrigirt. Das rechte Glied der Gleichung S. 11 Z. 6-7 erhält sein richtiges Zeichen; der Zusatz II § 85 wird berichtigt (vgl. dazu W. Dyck in Klein Ann. XXII p. 94 Note). Leider haben sich aber manche Fehler aus dem Original in die Uebersetzung eingeschlichen. So ist die Formel S. 65 Zeile 11 zu corrigiren, wie folgt:

$$\varphi^3 = \tfrac{1}{2}\{2c_1^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 \pm 3\sqrt{-3\Delta}\}.$$

S. 74 Zeile 6 sollen die Gleichungen

$$\tau = \sigma^{-1}s\sigma = (x_3\, x_4\, x_7),\quad \tau s^{-1}\tau^{-1} = (x_1\, x_3\, x_6)$$

lauten; S. 77 Zeile 18 ist der Sinn des Ausdruckes $3\binom{n}{3}!$ un-

7*

verständlich; S. 114 Zeile 10 muss man $\frac{n}{2}!$ statt $\frac{n!}{2}$ setzen; S. 152 am Ende müssen die beiden Ausdrücke für φ_1^2 das Minuszeichen erhalten; S. 281 Zeile 2 muss man n^2 in p^2 verwandeln. Neue Fehler sind auch hinzugekommen; so ist die letzte Formel des § 36 unrichtig. S. 102 Zeile 4 findet man φ_λ statt ψ_λ; S. 204 Gleichung B_1) V_{a+1} statt $V_{a+1}^{\nu_{a+1}}$; u. s. w. Ausserdem wurden die Citate der Paragraphen lediglich dem ursprünglichen Texte entnommen, ohne (ausser in seltenen Fällen) darauf Acht zu geben, dass einige Veränderungen in den Nummern derselben in dieser Uebersetzung vorgenommen sind: daher sind die Citate in der zweiten Hälfte des Buches grösstenteils unrichtig. Wir haben deren 15 gezählt, und es giebt deren unzweifelhaft noch mehrere.

Der § 200 des Textes ist aus der vorliegenden Uebersetzung verschwunden. Dieser Paragraph enthält eine wichtige Bemerkung: die Substitutionentheorie knüpft lediglich an rationale Functionen der Gleichungswurzeln an; die Anwendung derselben auf die algebraische Auflösung der Gleichungen wird also erst dann berechtigt sein, wenn man vorher (und zwar auf algebraischem Wege) nachgewiesen hat, dass alle bei der algebraischen Auflösung der Gleichungen auftretenden irrationalen Functionen der Coefficienten rationale Functionen der Wurzeln sind. Nachdem dieser Nachweis geliefert worden ist, fährt der Text fort (§ 210): „Dieser Satz gewährt die Möglichkeit der Verwendung von substitutionen-theoretischen Betrachtungen bei algebraischen Untersuchungen." Diese Worte, welche in der Uebersetzung beibehalten worden sind, sind aber, wegen der oben besprochenen Fortlassung des § 200, jedem Leser unverständlich, der nicht das ursprüngliche Werk selbst vor Augen hat.

Gehen wir nun endlich auf die Besprechung der Uebersetzung als solche ein. Sie folgt treu dem Original, fast zu treu, da sie häufig die deutsche Syntax ins Italienische übertragen will. „Gattung" wird, gegen den in Frankreich und Italien weitverbreiteten Gebrauch, durch „specie" (§ 98), nicht durch „genere", übersetzt; derselbe Terminus wird aber, was noch schlimmer ist, an einigen Stellen (§ 56) durch „classe" wiedergegeben. Diese

zweifache Uebersetzung, welche bei technischen Ausdrücken überhaupt zu meiden wäre, erscheint wieder beim Worte „adjungiren", welchem bald „aggiungere" (§ 151) bald „aggregare" (§ 201) entspricht. Ferner deuten wir auf folgende Missverständnisse hin: „d'accordo tra loro" für „miteinander übereinstimmende" (S. 66 Zeile 12); „possibilmente" für „möglicherweise" (S. 83 Zeile 8); ristabilire für „herstellen"; tranne für „bis auf" (§§ 231-32, wo der Sinn durch diesen Fehler gänzlich entstellt wird). Ausserdem sind „reciprocare" (§§ 192, 239) und „expletare" keine italienischen Wörter; wenigstens hat das erste einen ganz andern Sinn, als denjenigen, den der Uebersetzer demselben beilegt, das zweite ist aber ein schlechter und ungebräuchlicher Gallicismus. Vi.

L. Gegenbauer. Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges. Wien Denkschr. L. 115-152.

Es werden Bedingungen angegeben, unter denen eine Determinante geraden Ranges von der Ordnung $2^\lambda . n$ sich als ein Product von $2^{\varrho+1}$ Determinanten desselben Ranges von der Ordnung $2^{\lambda-\varrho-1} . n$ darstellen lässt, deren Elemente lineare Functionen von je $2^{\varrho+1}$ Elementen der ersten Determinante sind.

Am Schlusse folgt ein einfacher Beweis des Weierstrass'schen Satzes, dass in einem Systeme von $2n+1$ Haupteinheiten die Quadratwurzel aus dem negativen Modul der Multiplication nicht vorkommt. No.

H. Kaiser. Die Determinanten für den ersten Unterricht in der Algebra bearbeitet. Wiesbaden. Bergmann. 23 S.

Elementare Zusammenstellung der einfachsten Eigenschaften von zwei- und dreireihigen Determinanten.

No.

A. Sickenberger. Die Determinanten in genetischer Behandlung. Eine Einführung in die Lehre von den Determinanten. München. Th. Ackermann.

G. Loria. Nota sulla multiplicazione di due determinanti. Teixeira J. VII. 101-105.

Der Verfasser verallgemeinert die Regel für die Multiplication zweier Determinanten, indem er das Product derselben auf die Form einer Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bringt mit i^2 willkürlichen Elementen $(i < n)$. Aus dem Resultat leitet er einen Satz ab, welcher von Spottiswoode in Borchardt J. LI. veröffentlicht ist. Tx. (Hch.)

M. Falk. Beweis des Multiplications-Theorems für die Determinanten. Gött. N. 181-183.

Der Beweis wird durch einen einfachen Schluss von Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ auf solche n^{ten} Grades geliefert.

No.

R. Hoppe. Ein Satz über Determinanten. Hoppe Arch. (2) II. 106-107.

Eine Determinante von 4 Determinanten, deren je 2 in einer Reihe stehende nur eine ungleiche Verticalreihe haben, ist gleich dem Producte der 2 Determinanten, die man aus den ersteren durch die allein noch übrigen Combinationen der 2 ungleichen Reihen erhält. No.

W. J. McClelland, A. R. Clarke. Solution of question 7945. Ed. Times XLIII. 76.

Legt man durch irgend einen Punkt P einer Kugelfläche drei Hauptkreise, welche die Seiten eines Dreiecks bezw. unter

den Winkeln X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 schneiden, so ist

$$\begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \cos X_1 & \cos Y_1 & \cos Z_1 \\ \cos X_2 & \cos Y_2 & \cos Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Lp.

R. Mehmke. Bemerkung über die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Klein Ann. XXVI. 209-210.

Herr Mehmke macht darauf aufmerksam, dass die von Herrn Kronecker, Berl. Ber. 1882 vom 27. Juli, mitgeteilten Relationen in einem allgemeinen Satze enthalten sind, welchen Grassmann in seiner „linearen Ausdehnungslehre" von 1862 aufgestellt hat.

No.

F. Mertens. Ueber eine Formel der Determinantentheorie. Wien Ber. XCI 626-632.

Es wird eine ganze Function von $m.n$ Elementen $a_{x\lambda}$ die in Bezug auf die $a_{1\lambda}, a_{2\lambda}, \dots, a_{n\lambda}$ homogen und vom Grade m_λ ist, ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) mit Hülfe eines Operationssymbols auf eine gewisse Normalform gebracht, und hiervon werden dann Anwendungen auf die Theorie der Invarianten gemacht. „Jede Invariante von m linearen Formen für n Veränderliche lässt sich als homogene Function der Determinanten n^{ter} Ordnung dieser Formen darstellen". „Jede Covariante, deren Exponent grösser als Null ist, erscheint als ganzes homogenes Polynom dieser Formen und ihrer Determinanten n^{ter} Ordnung." No.

G. Loria. Su una proprietà del determinante di una sostituzione ortogonale. Teixeira J. VII. 129-132.

Der Verfasser beweist für eine Determinante beliebigen Grades den schon von Herrn Siacci für Determinanten geraden Grades bewiesenen Satz:

Wenn man in der Determinante einer orthogonalen Substitution jedes der Hauptglieder um eine Einheit erniedrigt und darauf die Unterdeterminanten der so gebildeten Determinante für diese Hauptglieder nimmt, so sind sie alle einander gleich und gleich der Hälfte der reducirten Determinante mit entgegengesetztem Vorzeichen. Tx. (Heb.)

E. Humbert. Note sur le développement d'un déterminant. Nouv. Ann. (3) IV. 289-294.

Darstellung einer Determinante in der Laplace'schen Weise, nebst Anmerkungen. No.

T. Muir, B. H. Rau, S. Marks. Solution of question 7607. Ed. Times XLII. 95-96.

Ist D eine Determinante n^{ter} Ordnung, deren Hauptdiagonale aus lauter Elementen a gebildet ist, während alle Glieder auf der einen Seite der Diagonale b, auf der anderen c sind, so ist

$$D = \Pi_k\left(a - 2\sqrt{bc}.\cos\frac{k\pi}{n+1}\right) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Lp.

D. Tavani. Soluzione della questione 46. Batt. G. XXIII. 574-576.

Beweis des Satzes, dass, wenn die Elemente der Determinante

$$\sum \pm u_{00} u_{11} u_{22} \ldots u_{n-1,n-1}$$

den Bedingungen unterworfen sind:

$$u_{i0} = 1$$

und

$$\sum_{r=1}^{n-1} (u_{h,r} - u_{k,r})^2 = 2,$$

der Wert der Determinante gleich $\sqrt{n}$ wird No.

J. DE RUYTS. Sur l'analyse combinatoire des déterminants. Liège Mém. XI. 1-11.

Es sei $\Phi(x)$ eine Function, die für $x = 1, 2, \ldots, n$ einen ganzzahligen Wert hat, $\varphi(x)$ der positive Rest von $\Phi(x)$ in Bezug auf n, oder n selbst, wenn $\Phi(x)$ ein Vielfaches von n ist. Eine Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Elementen in einer Determinante wird der Transformation Φ unterworfen, indem man a_i durch φ_i ersetzt. Der Verfasser findet verschiedene Eigenschaften der Determinanten, die einmal oder mehrere Male in dieser Weise transformirt werden. Mn. (Lp.)

TH. MUIR. Schweins, an overlooked discoverer in the theory of determinants. Glasgow. 1884.

W. H. L. RUSSELL. On the reduction of algebraical determinants. Brit. Ass. Rep. 910.

Die betrachteten Determinanten haben Elemente, die rationale ganze Functionen einer Grösse x sind. Der Satz wird für den Fall einer Determinante dritter Ordnung mit Elementen bewiesen, die Functionen dritten Grades sind; derselbe ist jedoch, wie Herr Russell bemerkt, ganz allgemein. Gbs. (Lp.)

TH. MUIR. Detached theorems on circulants. Edinb. Trans. XXXII. 639-643.

Eine Circulante ist eine Determinante von der Form:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = C(a, b, c, d).$$

Eine der betrachteten Aufgaben ist die, den entwickelten Ausdruck der Circulante zu finden. Zu diesem Zwecke wird angenommen, dass es wünschenswert sei, eine allgemeinere Form

folgender Art zu betrachten:

$$\begin{vmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma & d\delta \\ d\beta & a\gamma & b\delta & c\alpha \\ c\gamma & d\delta & a\alpha & b\beta \\ b\delta & c\alpha & d\beta & a\gamma \end{vmatrix}.$$

Aber auch in der Entwickelung hiervon stecken Zahlen-Coefficienten, deren Gesetz nicht leicht bestimmt wird.

Cly. (Lp.)

Th Muir. Note on the final expansion of circulants. Mess. XIV. 169-175.

Methoden zur Abkürzung der Arbeit in der Berechnung der Entwickelung einer Circulante. Das Resultat im Falle einer Circulante siebenter Ordnung wird mitgeteilt unter Verbesserung der Angabe von Herrn Forsyth in Mess. XIV. 40-56. Insbesondere wird eine Erklärung der Thatsache gegeben, dass zwei Terme von anscheinend übereinstimmender Form nicht notwendig denselben Coefficienten haben; z. B. hat man

$$35 a_0^2 a_1^2 a_3 a_4 a_5, \quad \text{aber} \quad -14 a_0^2 a_1^2 a_2 a_4 a_6.$$

Glr. (Lp.)

T. J. Stieltjes. Un théorème d'algèbre. Acta Math. VI. 319-321.

Für $n = 3$ gilt das Theorem: Wenn die

$$a_{\kappa\lambda}, A_{\kappa\lambda} \qquad (\kappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Coefficienten zweier orthogonaler Substitutionen der Determinante $+1$ sind, so verschwinden mit $(a_{\kappa\lambda} ; A_{\kappa\lambda})$ gleichzeitig alle Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Verf. vermutet die Ausdehnbarkeit des Satzes auf ein beliebiges n.

No.

Ch Méray. Décomposition des polynômes entiers à plusieurs variables en éléments linéaires. Ann. d. l'Éc. N. (3) II. 291-302.

Sind zur Bestimmung eines Polynoms vom Grade m mit p Variablen $(m+p)_p-1$ Systeme $x_x, y_x, \dots$ gegeben, welche das Polynom zu Null machen, so kann man dasselbe bekanntlich in Determinantenform darstellen. Die Elemente der Determinante sind alle möglichen Monome $x_x^\alpha y_x^\beta \dots$ des Grades m. Diese Determinante zerlegt Herr Méray in ein Aggregat von Producten aus Determinanten $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades und studirt dieselben im Falle $p=2$, $m=2$. No.

Ed. Weyr. Ueber den Hauptsatz der Matrizentheorie. Prag. Ber. 1884. 148-152 (Böhmisch.)

Cayley zeigte in seinem „A Memoir on the Theory of Matrices" (Philos. Trans., vol. 148), dass jede Matrize von n^2 Elementen einer Gleichung n^{ten} Grades Genüge leistet, und bewies dies durch directe Verification für $n=2$ und 3. Der Verfasser veröffentlicht einen ihm von Dr. L. Kraus mitgeteilten allgemeinen Beweis dieses Fundamentalsatzes nebst einer Umformung dieses Beweises, welche denselben übersichtlicher gestaltet.

Std.

A. Buchheim. A theorem on matrices. Mess. XIV. 167-168.

Es mögen $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ acht Matrizen irgend welcher Ordnung sein und die vier Gleichungen bestehen:

$$\alpha a+\beta c=1,\quad \alpha b+\beta d=0,\quad \gamma a+\delta c=0,\quad \gamma b+\delta d=1.$$

Dann bestehen auch die vier Gleichungen:

$$a\alpha+b\gamma=1,\quad a\beta+b\delta=0,\quad c\alpha+d\gamma=0,\quad c\beta+d\delta=1.$$

Das allgemeine Theorem, das in gleicher Weise bewiesen werden kann, lautet: „Es seien A, B zwei Matrizen der r^{ten} Ordnung, ihre Elemente Matrizen der n^{ten} Ordnung; A', B' die Conjugirten von A und B. Hat man dann $AB=1$, so ist auch $B'A'=1$." In dieser Fassung bedeutet „Conjugirte" das Ergebnis der Vertauschung der Reihen und Colonnen in einer Matrize. Glr. (Lp.)

A. Buchheim. On a theorem relating to symmetrical determinants. Mess. XIV. 143-144.

Einfacher Beweis für die Realität sämtlicher Wurzeln in der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Glr. (Lp.)

Th. Muir. Note on the determinantal equation connected with the investigation of the small oscillations of a system about a position of equilibrium. Mess. XIV. 141-143.

Sir W. Thomson hat gezeigt, dass die Wurzeln der Gleichung

$$\Sigma \pm (a_{11}x + b_{11})(a_{22}x + b_{22})\ldots = 0,$$

worin $a_{ij} = a_{ji}$, alle reell sind. Der Verfasser zeigt, dass diese Gleichung auf die wohlbekannte Form sich zurückführen lässt:

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c & \cdots \\ b & d+x & e & \cdots \\ c & e & f+x & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Das vorliegende Ergebnis wird für den Fall einer Determinante dritter Ordnung entwickelt unter Fortlassung der Beschränkung $a_{ij} = a_{ji}$. Glr. (Lp.)

J. J. Sylvester. Solution of question 7836. Ed. Times XLII. 101.

Ist

$$p = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ a' & b'-\lambda & c' \\ a'' & b'' & c''-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

so nennt Herr Sylvester λ eine latente Wurzel von p (nicht bloss für dreireihige Determinanten, sondern auch allgemein). Haben dann zwei Matrizen p, q (z. B. von der dritten Ordnung) eine latente Wurzel gemein, und sind λ', λ''; μ', μ'' die beiden anderen latenten Wurzeln von p, q, so ist das Product

$$(p-\lambda')(p-\lambda'')X(q-\mu')(q-\mu''),$$

wo X eine beliebige Matrize ist, von unveränderlicher Form, oder, in der Nomenklatur der neueren Algebra, ist constant bis auf ein skalares Vielfaches. Lp.

Ed. Weyr. Sur la théorie des matrices. C. R. C. 787-789.

Ed. Weyr. Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces. C. R. C. 966-969.

Ist M eine Matrize der Ordnung n mit den latenten Wurzeln $\mu_\alpha, \mu_\beta, \dots, \mu_\lambda$ und sind $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ die Grade der Multiplicität dieser Wurzeln, $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$ die Grade der Nullität der Matrizen $M-\mu_\alpha$, $M-\mu_\beta, \dots, M-\mu_\lambda$, dann genügt M der Gleichung

$$(M-\mu_\alpha)^{\alpha-\alpha_1+1}.(M-\mu_\beta)^{\beta-\beta_1+1}\dots(M-\mu_\lambda)^{\lambda-\lambda_1+1} = 0.$$

Wenn die Grade der Nullität von

$$M-\mu_\alpha, (M-\mu_\alpha)^2, \dots, (M-\mu_\alpha)^\varrho$$

bezw. gleich

$$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \dots, \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\varrho = \alpha$$

sind, so heissen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho$. α die Charakteristik der Wurzel μ_α. Zwei Matrizen M, N der Ordnung n mit denselben Wurzeln und entsprechend gleichen Charakteristiken heissen „von gleicher Art“. Man kann dann stets Matrizen finden, für die $N = Q^{-1}MQ$ wird. Es giebt stets Matrizen der Ordnung n mit vorgeschriebenen Wurzeln und gegebenen Charakteristiken. No.

Woolsey Johnson. Reduction of alternating functions to alternants. Newcomb Am J. VII. 345-346.

Es werden gewisse, in Form von Determinanten auftretende, alternirende Functionen von n Grössen auf gewöhnliche alternirende Determinanten zurückgeführt. So z. B. ist das Differenzenproduct von vier Grössen darstellbar in der Form:

$$\begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ cda & 1 & b & b^2 \\ dab & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix},$$

in Zeichen:

$$[bcd.1.c\,d^2] = [a^0b^1c^2d^2],$$

d. h. die rechte Seite dieser symbolischen Geichung geht aus der linken hervor durch Weglassung der Trennungspunkte und Vereinigung gleicher Buchstaben. My.

Woolsey Johnson. On a formula of reduction for alternants of the third order. Newcomb Am. J. VII 347-352.

Nach Jacobi lässt sich der Quotient der alternirenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} a^p & a^q & \dots & a^t \\ b^p & b^q & \dots & b^t \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l^p & l^q & \dots & l^t \end{vmatrix}$$

(für ganze, positive p, q, t) und des Differenzenproducts aus den $a, b, c, \dots, l$ umwandeln in eine Determinante n^{ter} Ordnung, deren Glieder in den $a, b, \dots, l$ symmetrisch sind (nämlich die Summe der Potenzen und Producte von je gleichem Grade). Es handelt sich, namentlich für numerische Zwecke, um Vereinfachungen dieser Darstellung.

Dies erreicht der Verfasser durch Anwendung einer symbolischen Methode, deren Wesen im voranstehenden Referat (über alternirende Functionen von Alternanten) gekennzeichnet ist. Als Beispiel dient der Fall dreier Grössen a, b, c. My.

Woolsey Johnson. On the calculation of the Co-factors of alternants of the fourth order. Newcomb Am. J. VII. 380-388.

Fortsetzung des vorigen Artikels für den Fall von alternirenden Determinanten vierter Ordnung. Cofactoren sind die Coefficienten der Entwicklung nach Potenzen einer der Grössen, z. B. a.

Als numerisches Beispiel dient der Fall: $p = 0$, $q = 5$, $r = 13$, $s = 17$. Den Schluss bildet ein einfacher Beweis eines Mitchell'schen Satzes, dem zufolge die Anzahl der Glieder in dem Cofactor einer Alternante erhalten wird durch das Differenzenproduct der Exponenten, dividirt durch dasjenige der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. My.

V. Janni. Sviluppo di una funzione simmetrica mediante le somme delle potenze simili. Batt G. XXIII. 34-37.

Die Regel über die Darstellung symmetrischer Functionen durch die Potenzsummen der Wurzeln wird durch den Schluss von n auf $(n+1)$ abgeleitet. No.

Ad. Steen. Et Bevis for Newton's Sätninger om symmetriske Funktioner af en Lignings Rödder. Zeuthen T. (5) III. 30-31.

Der Verfasser benutzt insbesondere die symmetrische Function $\Sigma a_1 a_2 \ldots a_r a_{r+1}^{k}$, um bequeme Reductionsformeln, mittels welcher die Werte verschiedener symmetrischer Functionen gefunden werden können, herzuleiten. Gm.

J. J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of question 7705. Ed Times XLII 86-87.

Irgend einem gegebenen Satze von i Grössen entspricht immer ein Satz von andern i Grössen derartig, dass jede sym-

metrische Function der Differenzen des ersten Satzes eine Function der aufeinander folgenden Potenzsummen von der zweiten bis zur i^{ten} einschliesslich im zweiten Satze ist. (Σa_i^ω nennt Herr Sylvester eine ω^{te} Potenzsumme der a_i). Lp.

M. d'Ocagne. Sur certaines fonctions symétriques; applications au calcul de la somme des puissances semblables des racines d'une équation. Teixeira J. VII. 133-140.

Der Verfasser berechnet in diesem Aufsatze mit Hülfe der symmetrischen Functionen die Summe

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(z-z_i)^n},$$

wo $z_1, z_2, \ldots, z_p$ die Wurzeln der folgenden Gleichung sind:

$$z^p + A_1 z^{p-1} + \cdots + A_{p-1} z + A_p = 0.$$

Aus dem gewonnenen Resultat leitet er einen Ausdruck für die Potenzsummen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ab, der von dem von Waring gegebenen verschieden ist, und noch einige für die Theorie der numerischen Gleichungen nützliche Sätze.

Tx. (Hch.)

P. A. MacMahon. The multiplication of symmetric functions. Mess. XIV. 164-167.

Im Amer. J. of Mathematics Bd. VII. hat Herr Cayley eine Theorie der Multiplication symmetrischer Functionen entwickelt und analytische Formeln für gewisse Productformen gegeben. Insbesondere findet er:

$$3^\alpha 2^\beta . 3^\gamma 2^\delta = \Sigma A 6^\lambda 5^\mu 4^\nu 3^\rho 2^\sigma,$$

wo im allgemeinen Falle A eine Summe von Termen ist, von denen jeder ein Product dreier Binomial-Coefficienten ist. Er giebt indes nicht den wirklichen Ausdruck des ganzen Coefficienten, sondern nur seine Form. Der Zweck der vorliegenden Notiz ist die Gewinnung des Wertes von A in der Form einer Reihe und der Nachweis einer neuen Methode für die Behand-

lung solcher Fragen. Der Verfasser findet auch den Wert von H in:

$$4^{\eta}3^{\kappa}2^{\lambda}.3^{\gamma}2^{\delta} = \Sigma H 7^{A}6^{B}5^{C}4^{D}3^{E}2^{F}.$$

Glr. (Lp.)

W. J. C. Sharp, G. B. Mathews, J. O'Regan. Solution of question 7463. Ed. Times XLIII. 33-34.

Ist S_r die Summe der r^{ten} Potenzen der Wurzeln von

$$ax^n - p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} - p_3x^{n-3} + \cdots = 0,$$

so ist

$$S_r = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(p_1\frac{d}{da} + 2p_2\frac{d}{dp_1} + \cdots\right)^{r-1}\left(\frac{p_1}{a}\right),$$

$$S_{-r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(na\frac{d}{dp_1} + (n-1)p_1\frac{d}{dp_2} + \cdots\right)^{r-1}\left(\frac{p_n}{p_{n-1}}\right).$$

Lp.

D. Tavani. Soluzione della questione 44. Batt. G. XXIII. 233-234.

Beweis des Satzes, dass, wenn $s_x = \frac{x(3x-1)}{2}$ gesetzt wird, die Summe der m^{ten} Potenzen aller Wurzeln von

$$(x-1)x^{n-s_1} - (x^3-1)x^{n-s_2} + \cdots + (-1)^{\kappa}(x^{2\kappa-1}-1)x^{n-s_\kappa} + \cdots = 0$$

gleich der Summe der Divisoren von m ist, so lange m nicht grösser als n wird. No.

Mac Mahon. A new theorem in symmetric functions. Quart. J. XX. 365-369.

Bei der Berechnung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung ergeben sich ohne Schwierigkeit die Glieder höchsten Grades als Functionen der Coefficienten. Hier wird eine Formel abgeleitet, mittels deren nach gleichem Principe auch die folgenden Glieder gefunden werden können. No.

A. H. Anglin. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. Kronecker J XCVIII. 175-176

Ist

$$f(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \cdots + c_m,$$

so wird der Rest der Division $x^{m+n}:f(x)$ durch gewisse symmetrische Functionen der Wurzeln von $f(x) = 0$ dargestellt. Das Resultat findet sich auch in der erst jetzt veröffentlichten Jacobi'schen erweiterten Dissertation. No.

Th. Muir. On bipartite functions. Edinb. Trans. XXXII. 461-482.

Das Wesen der bezüglichen Functionen wird durch ein Beispiel erhellen:

$$\begin{array}{l} \underline{ab} \\ cd\ \ gi \\ ef\ \ \underline{hj} \\ \quad\ \ kl \end{array} = acgk + acil + aehk + aejl + bdgk + bdil + bfhk + bfjl;$$

nämlich statt der zwei Reihen a, b und k, l, jede von zwei Buchstaben, und der beiden quadratischen Anordnungen, jede von 2^2 Buchstaben, haben wir im allgemeinen für eine Bipartite von der Grad-Ordnung (deg-order) m, n zwei Reihen, jede von n Buchstaben, und m Anordnungen, jede von n^2 Buchstaben. Die entwickelte Form ist die Summe von n^{m-1} Termen, jeder von denselben das Product eines Buchstaben aus der Anfangsreihe, eines Buchstaben aus jeder der quadratischen Anordnungen und eines Buchstaben der Endreihe. Noch allgemeiner kann eine Bipartite aus rechteckigen (statt aus quadratischen) Anordnungen gebildet werden. Die Functionen kommen in verschiedenen mathematischen Untersuchungen vor; beispielsweise sind die Elemente der Determinante, die das Product in m Determinanten, jede von der n^{ten} Ordnung ist, Bipartiten von der Grad-Ordnung (m, n). Algebraische Formen sind als Bipartiten ausdrückbar, u. s. w. Cly. (Lp.)

Th. Muir. New relations between bipartite functions and determinants, with a proof of Cayley's theorem in matrices. Lond M S. Proc. XVI. 276-286

Die „zweigeteilten Functionen“ sind homogen und linear in den Elementen gewisser, eigentümlich angeordneter Grössenreihen. Sie können zur Bestimmung der Coefficienten in der Reihenentwickelung eines Determinanten-Quotienten benutzt werden, dessen Zähler eine Säcular-Determinante, dessen Nenner eine Hauptsubdeterminante der ersteren ist. Das führt dann zum Beweise eines Cayley'schen Determinantensatzes. No.

A. Cayley. On the matrical equation $qQ-Qq' = 0$ Mess. XIV. 176-178.

In dieser Gleichung sind q, q' gegebene Matrizen, Q eine zu bestimmende Matrize. In einem früheren Aufsatze „On the quaternion equation $qQ-Qq' = 0$“ (Mess. XIV. 108-112; F. d. M. XVI. 1884. p. 113) hatte der Verfasser bemerkt, dass die Aufgabe für Matrizen mit der für Quaternionen übereinstimmte. Er hält es jetzt jedoch für einfacher, die Matrizengleichung ohne den Gebrauch der Quaternionen zu lösen. Es findet sich, dass eine Lösung der Gleichung nur unter einer gewissen Bedingung existirt. Falls diese Gleichung befriedigt ist, so dienen die gegebenen Formeln zur Bestimmung der Matrize Q. Glr. (Lp.)

E. Cesaro. Sur une loi symbolique remarquable. Math. V. 81-84

Verschiedene Anwendungen der Formel:

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = f(N-u_1, N-u_2, \ldots, N-u_n),$$

wo f eine symmetrische Function der n Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ist, die nach Voraussetzung die nämlichen sind wie $N-u_1$, $N-u_2, \ldots, N-u_n$. Mn. (Lp.)

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1.

Niedere Arithmetik.

O. Stolz. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten. Erster Teil. Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. Leipzig Teubner 344 S.

Wer die auf die strenge Begründung der Grundlagen und der Lehrsätze der Arithmetik und der Analysis gerichteten Untersuchungen des Verfassers kennt, wird sich denken können, dass die beiden Teile der Stolz'schen „Vorlesungen über Arithmetik" ein zusammenhängendes, eigenartiges Lehrgebäude bilden, und es daher gerechtfertigt finden, wenn wir über beide Teile zugleich referiren, was im nächsten Bande der F. d. M. geschehen soll. Scht.

Friedrich Meyer. Elemente der Arithmetik und Algebra. Zweite Auflage. Halle. H. W. Schmidt. 224 Seiten.

Hinsichtlich des methodischen Aufbaus der Arithmetik ist das vorliegende Buch viel strenger als die meisten Arithmetik-Bücher. Der Verfasser steht mit dem Referenten auf dem Kronecker'schen Standpunkt, dass die Zahlen, welche nicht Anzahlen (Er-

gebnisse des Zählens) sind, Erfindungen sind, zu welchen das Streben, die Determination bei der Auflösung gewisser Gleichungen fortzuräumen, nötigt, dass also solche Kunstproducte, wie negative, gebrochene Zahlen u. s. w. mit Benutzung der zahlenschöpferischen Kraft der Gleichungen von den Menschen geschmiedet sind, um eine Vereinfachung des Rechnens, und damit einen Fortschritt der Wissenschaft, zu erzielen. Der Verfasser behauptet, dass seine Darstellung von den Untersuchungen Georg Cantor's beeinflusst sei. Der Referent findet jedoch, dass das vorliegende Buch vielmehr von dem Geiste der Untersuchungen einerseits Kronecker's, andrerseits Ernst Schröder's durchweht ist. Ausser diesem streng systematischen Aufbau der arithmetischen Gesetze, welcher mit der durch das Princip der Ausnahmslosigkeit bedingten allmählichen Einführung der künstlichen Zahlen eng verbunden ist, enthält das Buch auch eine strenge Theorie der Gleichungen bis zum vierten Grade, die Combinatorik im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Theorie der arithmetischen und geometrischen Reihen, die Lehre von den Kettenbrüchen und diophantischen Gleichungen, und sogar die Grundlagen der Zahlentheorie.

Scht.

R. Schurig. Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauch an niedern und höhern Lehranstalten und beim Selbststudium Leipzig. Brandstetter. 1883, 1884, 1885.

Ein Arithmetikbuch von nicht weniger als 1144 Seiten, in drei Bänden.

Der Verfasser bestimmt das Buch zum Gebrauch an niedern und höhern Lehranstalten und zum Selbststudium. Als Grundlage des arithmetischen Unterrichts an Lehranstalten ist das Buch natürlich viel zu umfangreich. Wohl aber ist dasselbe zum Selbststudium sehr geeignet, da es über alle möglichen Nebenfragen Aufschluss giebt, eine grosse Auswahl von Beispielen bietet, und also wohl geeignet ist, den Lehrer zu ersetzen. Der erste Titel enthält die specielle Zahlenlehre (ohne

den Gebrauch von Buchstaben für allgemein gedachte Zahlen) und soll zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer sein. Der zweite Teil, welcher „die allgemeine Zahlenlehre" (Buchstaben-Rechnung) betitelt ist, enthält die Gesetze der 7 arithmetischen Operationen und deren Anwendung, sowie auch die Grundlagen der Zahlentheorie. Der dritte Teil, welcher „Algebra nebst Anwendung derselben auf die Analysis" betitelt ist, enthält ausser allen möglichen Gruppen von Gleichungen, die sich auf solche ersten oder zweiten Grades mit einer oder mehreren Unbekannten zurückführen lassen, auch eine Theorie der Maxima und Minima, ein Capitel über Ungleichungen, sowie die Theorie der Kettenbrüche, der diophantischen Gleichungen und der Progressionen. Scht.

A. Sickenberger. Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Dritte Auflage. München. Ackermann.

Ein Rechenbuch mit vielen Uebungsbeispielen, an dem Referent keine anderen Vorzüge entdecken konnte, als dass Regeldetri durch Dreisatz verdeutscht ist. Von einer Buchstaben-Rechnung enthält das Buch nichts. Brüche sind dem Verfasser benannte Zahlen. Scht.

F. Haller von Hallerstein. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Erster Teil. Arithmetik. Neunte Auflage. Neu bearbeitet von C. Strübing und B. Hülsen. Berlin. Albert Nauck u. Co. VIII u. 30. S. 8°.

Lp.

H. S. Hall and S. R. Knight. Elementary algebra. London. Macmillan and Co.

Referat in Athenaeum, No. 3018, Aug. 29, 1885, p. 273-274.

Lp.

E. Gelin. Traité d'arithmétique élémentaire. 2me édition. Namur. Wesmael-Charlier. 396 S. 8°.

Ein gut geschriebenes und recht vollständiges Werk, in welchem die auf die Annäherungen bezüglichen Fragen mit besonderer Sorgfalt behandelt sind. 1-2. Operationen und Eigenschaften der ganzen Zahlen. 3-4. Gemeine und Decimal-Brüche. 5-6. Proportionen, Progressionen, Logarithmen. 7. Zehnteilige Maasse, alte Maasse, auf die alten Maasse bezügliche Rechnungsart. 8. Von der Auflösung der Aufgaben. Zugleich hat der Verfasser eine sehr gute Sammlung arithmetischer Uebungsaufgaben veröffentlicht. Mn. (Lp.)

O. Baer. Éléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du Collège Royal Français. Berlin. Georg Reimer. IV u. 108 S. 8°.

In zehn Capiteln werden der Reihe nach behandelt 1) die Vorbegriffe, 2) die Operationen erster Stufe (Addition und Subtraction), 3) die Operationen der zweiten Stufe (Multiplication und Division), 4) Potenzen, 5) Factorenzerlegung, Heben von Brüchen, 6) Verhältnisse und Proportionen, 7) Quadrat und Quadratwurzel, 8) Wurzeln, 9) Logarithmen, 10) Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Ein Anhang vereinigt die Hauptformeln in einer Tabelle. Lp.

A. P. L. Claussen. Methodische Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Potsdam. A. Stein. 304 S. 8°.

In erster Linie für Volksschullehrer bestimmt. M.

E. Wrobel. Die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse, Proportionen und Progressionen mit Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung für den Schulgebrauch bearbeitet. Rostock. Wilh. Werther. IV u. 44 S. 8°.

Für die Obersecunda eines Gymnasiums bestimmt. Die

arithmetischen Reihen höherer Ordnung werden als Potenzreihen des Stellenzeigers bis zur vierten Ordnung inclusive behandelt. Im übrigen ist der Inhalt durch den Titel gekennzeichnet.

Lp.

E. Kaulich. Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. Vierte Aufl. Prag Hof-Buchdruckerei von P. Fuchs.

Dieses Lehrbuch enthält ausschliesslich eine praktische Anleitung zur Lösung der bei Kaufleuten vorkommenden Rechnungen, ohne sich irgendwie auf eine Begründung des anzuwendenden Verfahrens einzulassen. Auch in der ersten Abteilung der „Zusammenstellung der wichtigsten Rechnungs-Regeln und Vorteile" wird, wie es scheint absichtlich, von jeder allgemeineren Betrachtung und Begründung gänzlich abgesehen. Das Rechnen wird stets als eine mechanische Fertigkeit betrachtet, und der Hauptnachdruck auf die Einflechtung derjenigen thatsächlichen Verhältnisse gelegt, deren Kenntnis bei der Lösung der Aufgaben notwendig ist. Daher wird denn auch das Verfahren nur an zahlreichen einzelnen Beispielen gezeigt.

Ls.

V. Grünwald. Intorno all' aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll' aritmetica ordinaria (decimale). Batt. G. XXIII. 203-221.

Die vier Species, sowie Regeln für die Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln etc. für eine Schreibweise des Decimalsystems im entgegengesetzten Sinn, d. h. von links nach rechts statt von rechts nach links.

Sn.

J. H. van Leeuwen. De bewerking met onnauwkeurige getallen wetenschappelijk behandeld. Brielle. Wiersma. 58 Seiten.

Im täglichen Leben kommt es manchmal vor, dass man Rechnungen mit ungenauen Zahlen auszuführen hat. In neuester Zeit hat man in verschiedenen Lehrbüchern und Schriften über die Zahlentheorie auf die Operationen mit solchen Zahlen die Aufmerksamkeit gerichtet, doch ist bisher die Sache noch nicht mit solcher Genauigkeit behandelt, wie ihre Wichtigkeit es verdient. Diesem Mangel sucht Verfasser durch das vorliegende Werkchen abzuhelfen. Im ersten Abschnitt handelt er über die abgekürzten Rechnungen mit ungenauen Zahlen, im zweiten über die Hauptoperationen mit ungenauen Zahlen. Nach einander werden Addition, Subtraction, Multiplication, Potenzirung, Division und Wurzelausziehung einer eingehenden Untersuchung unterworfen, und es wird der Weg angegeben, auf welchem in jedem Fall das genaueste Resultat aus ungenauen gegebenen Zahlen erhalten werden kann. Mit vielen Beispielen wird diese Theorie erläutert. G.

F. J. van den Berg. Over zeker spel. Nieuw Arch. XII 38-59.

Enthält einige Bemerkungen, zu welchen das bekannte Spiel „le jeu des grenouilles“, das auch in dem Werke von Ed. Lucas „Recréations mathématiques 1883“ beschrieben wird, angeregt hat. Die Auflösungen werden systematisch für eine unbestimmte Zahl von Steinen gegeben, schliesslich auch auf den Fall ausgedehnt, dass die Anzahl Steine, welche bei dem anfänglichen Stand in den dem offenen Fach gegenüberliegenden Seiten vorkommen, ungleich ist. G.

Ch. Brisse. Démonstration directe d'une identité. Nouv. Ann. (3) IV. 537.

Von dem Ausdrucke:

$$(x-1)x(x+1)\dots(x+y)+x(x+1)\dots(x+y+1)+\cdots$$
$$\cdots+(z-y-1)(z-y)\dots z+(z-y)\dots(z+1)$$

ziehe man, nachdem das Anfangsglied an das Ende gesetzt ist, den dadurch erhaltenen Ausdruck Glied für Glied ab, so kommt

man zu der von Herrn Longchamps gegebenen Identität:

$$x(x+1)\ldots(x+y)+(x+1)\ldots(x+y+1)+\cdots$$

$$\cdots+(z-y)(z-y+1)\ldots(z-1)z = \frac{1}{y+2}\left((z+1)z\ldots(z-y)\right.$$

$$\left.-(x+y)\ldots(x-1)\right).$$

Lp.

J. Slavík. Beitrag zur Auflösung von unbestimmten Gleichungen ersten Grades. Čas. XIV. pag. 137 (Böhmisch.)

Der bekannte Gedanke, zu der Gleichung

$$ax+by=c$$

anzunehmen

$$mx+ny=k$$

von der Eigenschaft, dass

$$\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = +1,$$

wird für Mittelschüler auseinandergesetzt. Std.

J. Vervaet. Ueber die Multiplication von Decimalzahlen. Čas XIV. pag 21. (Böhmisch)

Enthält einige praktische Winke in Betreff der Productbildung zweier Decimalzahlen, welche sich in der Formel

$$MN = 10^n(N-a)+ab$$

zeigen, wenn

$$M = 10^n-a,\quad N = 10^n-b,$$

oder

$$MN = 10^{n-1}(M-10b)+ab,$$

[illegible]

$$M = 10^n-a,\quad N = 10^{n-1}-b.$$

Std.

---

de Rocquigny. Questions d'arithmologie. Mathesis V 78-80.

Elementare Aufgaben, die auf Identitäten beruhen.

Mn. (Lp.)

Julius Petersen. Om Algebraens Grundprinciper. Zeuthen T. (5) III. 1-22.

Um das begriffsmässige Entstehen der verschiedenen Arten von complexen Zahlen zu erläutern, leitet der Verfasser durch geometrische Betrachtungen erstens die gewöhnlichen complexen Zahlen $a+bi$ ab. Er wendet sich demnächst zur Betrachtung der dreigliedrigen Zahlen $x+\alpha y+\beta z$, welche eindeutig den Punkten des Raumes entsprechen und von ihm mit den Namen von Ternionen bezeichnet werden. Dieselben bilden gegenüber der Addition sowie der Multiplication und Division mit reellen Zahlen eine geschlossene Gruppe. Damit dieses allgemein gelten soll, müssen die Einheiten α und β Wurzeln einer Gleichung $x^3-1=0$ sein, können jedoch nicht durch $\sqrt{-1}$ ausgedrückt werden, da $1+\alpha+\beta$ von Null verschieden sein muss. Es zeigt sich ferner, dass gewisse Untergruppen bestehen. Bezeichnet man durch n die Summe $x+y+z$ und durch m die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz},$$

so entsprechen bezw. $n=0$ und $m=0$ einer gewissen Nullebene und einer Nulllinie, welche Ausnahmepunkte enthalten. m und n nennt der Verfasser resp. den ersten und zweiten Modulus der Ternion, und bezeichet man ferner als Argument derselben den Winkel v, der so bestimmt ist, dass $\cos v=\frac{2x-y-z}{2m}$, so lässt sich im allgemeinen die Multiplication mehrerer Factoren ausführen durch einfache Multiplication der Moduln und Addition der Argumente. Die Division geschieht in entsprechender Weise, giebt aber ein unbestimmtes Resultat, falls die gegebenen Punkte in der Nullgeraden oder in der Nullebene liegen. Ferner kann bemerkt werden, dass eine Terniongleichung n^{ten} Grades bis n^2 Wurzeln haben kann.

Die Abhandlung schliesst mit einer kurzen Darstellung der Hauptsätze der Quaternionen. Gm.

Capitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

E. Meissel. Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde natürlicher Zahlen vorkommen. Klein Ann. XXV. 251-257.

Fortsetzung der Berechnung aus Clebsch Ann. II. S. 636 und III. S. 523 (s. F. d. M. II. 1870. 87, III. 1871. 70). Die Anzahl der Primzahlen in der ersten Milliarde wird auf 50847478 bestimmt. Ausserdem werden zwei weitere Fehler in den Burckhardt'schen Tafeln angegeben. Hch.

P. Seelhoff. Prüfung grösserer Zahlen auf ihre Eigenschaft als Primzahlen. Newcomb Am. J. VII. 264-270, VIII. 26-38.

P. Seelhoff. Nova methodus numeros compositos a primis dignoscendi illorumque factores inveniendi. Newcomb Am. J. VIII. 39-44.

P. Seelhoff. Ueber die vollkommenen Zahlen, insbesondere über die bis jetzt zweifelhaften Fälle $2^{40}(2^{41}-1)$, $2^{46}(2^{47}-1)$ und $2^{52}(2^{53}-1)$. Hoppe Arch. (2) II. 327-329.

P. Seelhoff. Zur Analyse sehr grosser Zahlen. Hoppe Arch. (2) II. 329-332.

Mit Hülfe von Kunstgriffen, welche sich an die Theorie der quadratischen Formen lehnen, wird die Anzahl der für eine vorgelegte Zahl zu prüfenden Primfactoren ausserordentlich vermindert. Der Herr Verfasser beschäftigt sich besonders mit der Auffindung geeigneter Determinanten. In der zweiten und vierten der obigen Arbeiten finden sich die theoretischen Entwicklungen. Die erste enthält Tabellen von 170 bezw. 192 für die Untersuchung geeigneten negativen Determinanten, die zugehöri-

gen Hauptformen und deren Gesamtcharaktere. Die Methode wird in der letzten Arbeit auf die Zahlen von der Form $2^{2^n}+1$ angewandt, unter denen sich bisher fünf als zerlegbar erwiesen haben; ferner in der vorletzten auf die sogenannten vollkommenen Zahlen. Die im Titel angeführten werden, im Widerspruch mit einer angeblich von Euler herrührenden und von Krafft überlieferten Bemerkung, als nicht vollkommen erwiesen, so dass die Anzahl der bis jetzt bekannten numeri perfecti sich auf acht reducirt. Sn.

Fr. J. Studnička. Ueber Tesánek's Methode, Zahlen in Factoren zu zerlegen. Cas XIV. pag 120. (Böhmisch.)

Der im Jahre 1788 verstorbene Professor der Mathematik an der Universität Prag Johann Tesánek, Newton's Commentator hat in den Abhandlungen der „Privatgeschichte zur Aufnahme, der Mathematik, der vaterländischen Geschichte, und der Naturgeschichte" I. Bd., Prag 1775, drei Methoden mitgeteilt, wie man Zahlen in Factoren zerlegen, resp. deren Teilbarkeit untersuchen konnte. Die erste und einfachste enthält folgenden Gedankengang:

Jede ungerade Zahl hat die Form $2a+1$; ist sie durch $2x+1$ teilbar so ist

$$\frac{2a+1}{2x+1} \quad \text{und somit auch} \quad \frac{2a+1}{2x+1}-1=\frac{2(a-x)}{2x+1}$$

eine ganze Zahl, daher $(a-x)$ durch $(2x+1)$ teilbar.

Bei der zweiten Methode wird die Zahlform $2a+b$ und bei der dritten die noch allgemeinere Form $100a+10b+c$ zu Grunde gelegt. Std.

L. Gegenbauer. Ueber die ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$. Wien. Ber. XCI. 1047-1058.

Sätze über die primären Divisoren der ganzen complexen Zahlen, speciell über die Summen der Normen der k^{ten} Potenzen

dieser Divisoren, bezw. das Mittel dieser Summen. Viele Formeln, welche solche Mittel und Anzahlen bestimmen.

Sn.

J. Perott. Démonstration de l'existence des racines primitives pour les modules égaux à des puissances de nombre premier impair. Darb. Bull. (2) IX. 21-24.

Der einfache Beweis stützt sich auf die beiden Sätze: es besteht eine Zahl a, die mod. p^n zu $(p-1)$ gehört; es besteht eine Zahl b, die mod. p^n zu p^{n-1} gehört. Die gesuchte Zahl ist dann $a.b$. No.

F. Kessler. Ueber die Grösse der Periode des Decimalbruchs gleich $1:p$, für p gleich einer der ersten 1500 Primzahlen. Hoppe Arch. (2) III. 99-102.

Der Herr Verfasser hat für alle Primzahlen bis zu $p = 12553$ die Grösse $Q = \frac{p-1}{P}$ berechnet, wo P die Anzahl der Ziffern der Decimalbruchperiode bedeutet. Es werden statistische Angaben in Betreff der Resultate gemacht, und in den von Burkhardt gegebenen Tafeln neun Rechenfehler nachgewiesen. Der Herr Verfasser (Wiesbaden, Rheinstrasse 24) teilt mit, dass er ein vollständiges Verzeichnis der P und Q habe autographisch vervielfältigen lassen. Sn.

W. Lewy. Sur les puissances des nombres. Nouv. Ann. (3) IV. 225-245.

Untersuchungen über die Teilbarkeit der Potenzen ganzer Zahlen, sowie allgemeine Bestimmungen der Ziffern, aus welchen diese Potenzen bestehen. Sn.

R. Lipschitz. Sur les sommes des diviseurs des nombres. C. R. C. 845-847.

Die Euler'sche Methode zur Ableitung recurrirender Relationen für die Divisorensummen, auf Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen angewendet, führen zu folgenden Resultaten: Bedeutet $k(m)$ die Summe der ungeraden Divisoren der Zahl m vermehrt um die halbe Summe ihrer geraden Divisoren, und $l(m)$ die Summe ihrer geraden Divisoren vermindert um die Summe der ungeraden Divisoren, so ist

$$k(m)-2k(m-1)+2k(m-9)\mp\dots=(-1)^{m-1}m \text{ oder } =0,$$

jenachdem m eine Quadratzahl ist oder nicht, und

$$l(m)+l(m-1)+l(m-3)+l(m-6)+\cdots=-m \text{ oder } =0,$$

jenachdem m eine Trigonalzahl ist oder nicht. Ebenso, wie

$$\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(m)=\left[\frac{m}{1}\right]+2\left[\frac{m}{2}\right]+3\left[\frac{m}{3}\right]+\cdots$$

ist, wo $\psi(m)$ die Summe aller Divisoren von m und $[x]$ die grösste ganze in x enthaltene Zahl bedeutet, ist dann ferner:

$$k(1)+k(2)+\cdots+k(m)=\left[\frac{m}{1}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]+3\left[\frac{m}{3}\right]+2\left[\frac{m}{4}\right]$$
$$+5\left[\frac{m}{5}\right]+\cdots$$

und

$$l(1)+l(2)+\cdots+l(m)=-\left[\frac{m}{1}\right]+2\left[\frac{m}{2}\right]-3\left[\frac{m}{3}\right]$$
$$+4\left[\frac{m}{4}\right]+\cdots$$

T.

M. A. Stern. Eine Bemerkung über Divisorensummen. Acta Math. VI. 327-329.

Aus der von Herrn Zeller (Acta Math. IV. 415; cf. F. d. M. 1884. XVI. 147 f.) angegebenen Formel und einer Euler'schen erhält man die Formel

$$\int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)$$
$$+\int(n-15)-\cdots=1(n-1)+2(n-2)-5(n-5)-7(n-7)$$
$$+12(n-12)+15(n-15)-\cdots, \qquad \left(\begin{matrix}\int(n-n)=n\\ (n-n)=1\end{matrix}\right),$$

welche einen Zusammenhang zwischen der Anzahl (n) der Combinationen mit Wiederholung zur Summe n aus den Elementen 1, 2, ..., n und der Summe $\int(n)$ der Divisoren von n (incl. 1 und n) giebt. Der Herr Verfasser giebt zunächst einen Beweis für die Zeller'sche Formel und leitet dann eine der angeführten ganz analoge Formel her, welche einen Zusammenhang zwischen der Summe der Divisoren und der Anzahl $N(n)$ der Combinationen ohne Wiederholung zur Summe n aus den Elementen 1, 2, ..., n angiebt; diese lautet:

$$\int(n) - \int(n-2) - \int(n-4) + \int(n-10) + \int(n-14) - \cdots$$
$$\cdots = N(n-1) + 2N(n-2) - 5N(n-5) - 7N(n-7) + \cdots,$$

wo jedoch

$$\int(n-n) = 0 \quad \text{und} \quad N(n-n) = 1$$

zu nehmen ist. T.

J. W. L. Glaisher. On certain sums of products of quantities depending upon the divisors of a number. Mess. XV. 1-20.

Die Abhandlung betrifft die Werte eines Systems von Ausdrücken folgender Formen:

$$f(1)f(n-1) + f(2)f(n-2) + f(3)f(n-3) + \cdots + f(n-1)f(1)$$

und

$$f(1)F(n-1) + f(2)F(n-2) + f(3)F(n-3) + \cdots + f(n-1)F(1),$$

wo $f(n)$ und $F(n)$ irgend zwei von den folgenden sieben Grössen sind, die von den Divisoren von n abhängen:

$\sigma(n)$ = Summe der Divisoren von n;
$\Delta(n)$ = Summe der ungeraden Divisoren von n;
$D(n)$ = Summe der geraden Divisoren von n;
$\Delta'(n)$ = Summe der Divisoren, deren conjugirte ungerade sind;
$D'(n)$ = Summe der Divisoren, deren conjugirte gerade sind;
$\zeta(n) = \Delta(n) - D(n)$;
$\zeta'(n) = \Delta'(n) - D'(n)$;

Natürlich ist

$$\sigma(n) = \Delta(n) + D(n) - \Delta'(n) + D'(n).$$

Es bedeutet ΣfF die Summe der Producte $\Sigma f(r)F(n-r)$ für $r = 1, 2, \ldots, n$ (so dass $\Sigma fF = \Sigma Ff$). Die Werte der 21 Product-Summen, die man erhält, indem man f und F durch $\sigma, \Delta, D, \Delta', D', \zeta, \zeta'$ ersetzt, werden in Gliedern mit $\sigma_3(n), D'_3(n), \sigma(n), D'(n)$ ausgedrückt, wo $\sigma_3(n)$ die Summe der Kuben der Divisoren von n bedeutet, $D'_3(n)$ eine analoge Bedeutung hat. Als Beispiele wollen wir anführen:

$$24\Sigma\sigma\sigma = 10\sigma_3(n) - 12n\sigma(n) + 2\sigma(n),$$
$$24\Sigma\Delta\Delta = 2\sigma_3(n) + 8D'_3(n) - 2\sigma(n) + 4D'(n),$$
$$24\Sigma DD = 40D_3(n) - 24nD'(n) + 8D'(n),$$
$$24\Sigma\Delta'\Delta' = 6\sigma_3(n) - 6D'_3(n) - 6n\sigma(n) + 6nD'(n),$$
$$24\Sigma D'D' = 16D'_3(n) - 6nD'(n) + 2D'(n),$$
$$24\Sigma\zeta\zeta = -6\sigma_3(n) + 96D'_3(n) + 12n\sigma(n) - 6\sigma(n) - 48nD'(n) + 24D'(n),$$
$$24\Sigma\sigma\Delta = 6\sigma_3(n) - 16D'_3(n) - 6n\sigma(n) + 12nD'(n) - 2D'(n),$$
. . . .

Nur in einem Falle ist der Ausdruck für die Producten-Summe unabhängig von den Grössen, welche die Kuben der Divisoren einschliessen; man hat nämlich:

$$24\Sigma\Delta'\zeta = 3n\sigma(n) - 3\sigma(n) + 6nD'(n) + 3D'(n).$$

Die Werte der Ausdrücke können in Termen aus irgend zweien der Functionen $\sigma, \Delta, \ldots$ ausgedrückt werden; aber σ und D' erweisen sich als die beiden geeignetsten. Ist n ungerade, so verschwinden die mit D'_3 und D' behafteten Terme und die Ausdrücke werden viel einfacher.

Ein Abschnitt der Arbeit ist der Betrachtung der Werte und gegenseitigen Beziehungen für die allgemeinen Grössen $\sigma_s(n), \Delta_s(n), D_s(n), \ldots$ gewidmet, wo $\sigma_s(n)$ die Summe der s^{ten} Potenzen der Divisoren von n bezeichnet. Glr. (Lp.)

J. C. d'Oliveira Ramos e C. J. de Faria. Sobre os coefficientes da formula que dá a derivada d'ordem qualquer das funcções compostas. Teixeira J. VII. 41-48.

Der Zweck dieser Abhandlung ist, folgenden Satz zu beweisen:

Die Summe

$$\Sigma \frac{1}{\alpha!\beta!\dots\lambda!(2!)^\beta(3!)^\gamma\dots(n!)^\lambda},$$

wo $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ die ganzen positiven Lösungen der Gleichung

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n$$

bedeuten, nähert sich der Grenze Null, wenn n sich der Grenze Unendlich nähert. Tx. (Hch.)

M. d'Ocagne. Sur certaines sommations arithmétiques.

Teixeira J. VII. 117-128.

Der Verfasser bestimmt zuerst die Quersumme der N ersten ganzen Zahlen. Darauf bestimmt er die Summe

$$\delta_p(1) + \delta_p(2) + \dots + \delta_p(N), \qquad \delta_p = P_p + Q_p$$

wo Q_p die Zahl bedeutet, die durch die p ersten Ziffern zur Rechten von N gebildet wird, und P_p die durch die übrig gebliebenen Ziffern gebildete Zahl.

Aus diesen Summenausdrücken folgert der Verfasser mehrere interessante Sätze. Zuletzt untersucht er, wie viel Ziffern es in der Folge der Zahlen 1 bis N giebt. Tx. (Hch.)

L. Gegenbauer. Ueber die Divisoren der ganzen Zahlen.

Wien Ber. XCI. 600-621.

Der Herr Verfasser verallgemeinert hier eine Reihe von asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie, welche früher von ihm aufgestellt worden sind (Wien. Ber. XC., F. d. M. XVI. 1884. p. 149). Es werden viele Sätze, welche sich auf die Anzahl von solchen Divisoren der ganzen Zahlen, die r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) teilbar sind, abgeleitet; ferner Sätze, welche sich auf die Summen der reciproken k^{ten} Potenzen solcher Divisoren beziehen. Sodann folgen Theoreme über die Anzahl von solchen Divisoren einer gegebenen Zahl, welche nach einem geraden Modul vorgeschriebenen Zahlen congruent sind.

Sn.

L. Gegenbauer. Arithmetische Notiz. Wien Ber. XCI 1194-1201.

Als Beispiel für die Art der hier mitgeteilten Formeln und Sätze geben wir das erste Theorem: „Wenn für alle Werte von x, welche nicht grösser als

$$\left[\frac{\alpha-x}{\kappa(x-\varrho)}-\frac{1}{\kappa}\right]$$

sind:

$$\left[\frac{\alpha}{\kappa(\kappa x+1)}+\frac{\varrho}{\kappa}\right]-\left[\frac{\alpha-x}{\kappa(\kappa x+1)}+\frac{\varrho}{\kappa}\right]$$

ist, so besitzt die nach dem Modul k der Zahl $-\varrho$ congruente Zahl α ausser α höchstens einen ihr nach dem Modul κ congruenten Teiler mit complementärem Divisor von der Form $\kappa\lambda+1$, nämlich $\kappa-\varrho^{\kappa}$. Sn.

S. Roberts. Notes on the divisors of numbers and products of factors. Quart. J. XX. 370-378.

Die Euler'sche recurrirende Formel für die Summe der Teiler von n:

$$\psi(n)-\psi(n-1)-\psi(n-2)+\psi(n-5)+\psi(n-7)-\cdots=0$$

lässt sich aus der Productentwicklung:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}(1-q^r)=1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots$$

mittels der Newton'schen Summenformeln ableiten. Diese Methode wird zur Anwendung auf andere Producte empfohlen und auf einige der Theorie der elliptischen Functionen entnommene Beispiele angewandt. Sn.

A. Lefebure. Sur la composition de polynômes entiers, qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. Ann. de l'Éc. N. (3) II. 113-122.

Schluss der vorjährigen, gleichbetitelten Abhandlung (cf. F. d. M. XVI. 1884. p. 159). Es werden weitere Polynome von der Form $U^{\kappa}-V^{\kappa}$ (wo die Formen U, V gewissen Bedingungen genügen) in Prim-Factoren zerlegt.

Aus diesen Entwicklungen fliesst ein von Genocchi auf andere Art bewiesener Satz, dass nämlich die Anzahl der Primzahlen von der Form $HT+1$ bei variablem (ganzzahligem) H für jedes ganzzahlige T unbegrenzt ist. My.

P. G. Tait. Note on a problem in partitions. Edinb. Trans. XXXII. 340-342.

Enthält die Lösung einer Partitions-Aufgabe, die in der Theorie der Knoten entspringt, nämlich die Zerlegungen von $2n$ zu finden, bei denen kein Teil kleiner als 2 oder grösser als n ist; diese können nach dem Werte des grössten Teiles in Klassen geordnet werden, und die Frage ist die, in jeder Klasse die Anzahl der Zerlegungen zu finden. Cly. (Lp.)

Pomey. Sur la partition des nombres. Nouv. Ann. (3) IV. 408-417.

Eigenschaften der Zahlen A_m^n, welche die Anzahl der Lösungen von

$$\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+m\lambda_m=n$$

bezeichnen, wo $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ nur die Werte 0 und 1 erhalten sollen. Sn.

N. Bougaieff. Sur une loi générale de la théorie de la partition des nombres. C. R. C. 1123-1125.

Eine Eigenschaft der μ^{ten} Potenz der Reihe

$$\varphi(1)x^{\psi(1)}+\varphi(2)x^{\psi(2)}+\varphi(3)x^{\psi(3)}+\cdots$$

wo $\varphi(n)$ eine beliebige analytische oder algebraische Function, $\psi(n)$ aber eine wachsende, analytische oder zahlentheoretische Function bezeichnen soll, die für ein ganzzahliges Argument nur ganzzahlige Werte liefert. Sn.

E. Catalan. Mémoire sur quelques décompositions en carrés. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVII. 49-114.

Eine grosse Zahl von vereinzelten Ansätzen und Gelegenheitsresultaten. Bestimmung einer Summe von n Quadraten, deren Quadrat sich als Summe von $2n$ Quadraten darstellen lässt. Jede ganzzahlige Potenz einer Summe von drei Quadraten ist wieder eine Summe dreier Quadrate. Aufsuchung aller ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2+y^2 = u^2+v^2+w^2$. Jedes x, welches der Gleichung $(a^2+1)x^2 = y^2+1$ entspricht, ist als Summe dreier Quadrate darstellbar u. dgl. m. Ferner: Es sei nach Gauss

$$4\frac{z^{2p}+1}{z^2+1} = Y^2-pZ^2.$$

Alsdann ist Y^2 sowohl als Summe von vier, als auch von fünf Quadraten darstellbar. Sn.

S. Réalis. Scolies pour un théorème de Fermat. Nouv. Ann. (3) IV. 367-372.

Eigenschaften der beiden Quadrate, in welche sich jede Primzahl von der Form $4n+1$ zerlegen lässt. Sn.

Bock. Ueber einen elementaren Beweis des Satzes, dass jede Primzahl von der Form $4n+1$ gleich der Summe zweier ganzen Quadratzahlen sei. Hamb. Mitt. No. 5. 101-104.

Ist $p = 4n+1$, so giebt es zunächst n Summen, welche der Congruenz $A^2+B^2 \equiv 0 \pmod{p}$ genügen, wo $A < \frac{1}{2}p$, $B < \frac{1}{2}p$ ist, u. s. f. Sn.

F. Studnička. Neuer Beweis des Satzes, dass das Product der Summe von acht Quadratzahlen mit der Summe von acht Quadratzahlen sich als Summe von acht Quadratzahlen darstellen lasse. Prag. Ber. 1883. 475-481.

Der Beweis wird mit Hülfe von Quaternionen geführt. Doch bleibt es fraglich, ob die Form desselben für 16 u. s. w. Quadrate anwendbar sein dürfte. Sn.

WEILL. Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés. S. M. F. Bull. XIII. 24-28.

Ist N kein Vielfaches von 3, so ist die Anzahl der Darstellungen von $3N$ der verlangten Art doppelt so gross, als die von N; unter der Bedingung, dass für beide Zahlen nur Darstellungen möglich sind, bei denen alle Quadrate verschieden sind und keines verschwindet. Sn.

TH. PÉPIN. Théorie de la décomposition des nombres en une somme de cinq carrés. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVII. 9-48.

Sätze über die Anzahl solcher Darstellungen werden teils mittels rein zahlentheoretischer Functionen, teils mit Hülfe von θ-Reihen hergeleitet. Darstellungen, bei denen das kleinste Quadrat gerade oder ungerade ist, bei denen zwei oder mehr Quadrate gleich sind. Die darzustellende Zahl sei ein ungerades Quadrat, ein Biquadrat u. dgl. m. Sn.

W. J. C. MILLER, B. H. RAU, R. KNOWLES, E. RUTTER. Solutions of questions 7689, 7737. Ed. Times XLII. 73, 79.

Sind alle Wurzeln der Gleichung

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0$$

ganze und positive Zahlen, so ist

$$1)\quad a_n(1+a_1+\cdots+a_n)(1+2a_1+4a_2+\cdots+2^n a_n):6^n$$

eine in die Summe von a_n Quadraten zerlegbare ganze Zahl;

$$2)\quad a_n^2(1+a_1+\cdots+a_n)^2:4^n$$

ist eine in die Summe von a_n Kuben zerlegbare ganze Zahl;

$$3)\ a_n^2(1+2a_1+\cdots+2^n a_n)$$

ist in eine algebraische Summe aus $2^n a_n$ Quadraten zerlegbar.

Lp.

G. B Mathews. Note in connexion with Fermat's last theorem Mess XV. 68-76.

Der Verfasser giebt einen elementaren Beweis dafür, dass $z^p = x^p + y^p$ keine Lösung zulässt, wenn keine der ganzen Zahlen x, y, z ein Vielfaches von p ist, in den Fällen $p = 3, 5, 11, 17$. Die Methode ist nicht anwendbar, wenn x, y oder z als Vielfache von p vorausgesetzt werden, und sie liefert kein Ergebnis, wenn p eine Primzahl von der Form $3n+1$ ist.

Glr. (Lp.)

J. Romero. Solution de la question 1533. Nouv. Ann. (3) IV. 483-484.

Herr Wolstenholme hatte behauptet,

$$3^{2n+3}+40n-27$$

sei für jeden positiven ganzen Wert von n durch 64 teilbar. Herr Romero zeigt, dass dieser Satz als Specialfall in drei anderen enthalten sei, die er beweist.

Sn.

F. Gomes Teixeira. Ueber einen Satz der Zahlentheorie. Hoppe Arch (2) II. 265-268.

Der von Herrn Weill gefundene Satz lautet: Ist

$$n = a\alpha+b\beta+\cdots+l\lambda,$$

so ist $n!$ stets durch $\alpha!(a!)^\alpha.\beta!(b!)^\beta\ldots\lambda!(l!)^\lambda$ teilbar. Der Beweis des Herrn Weill beruht auf combinatorischen Gründen. Herr Teixeira weist einen Zusammenhang mit der Theorie der höheren Differentialquotienten nach.

Sn.

L. Gegenbauer. Arithmetische Sätze. Wien Ber. CXII. 1065-1078.

Zahlentheoretische Beweise von Sätzen und Formeln, welche

grösste Ganze betreffen, und welche von Herrn Hermite aus der Theorie der elliptischen Functionen gewonnen wurden. Der von Herrn Gegenbauer genommene Weg führt selbstredend auch zu analogen neuen Resultaten. Doch sind die Formeln viel zu verwickelt, um hier reproducirt werden zu können. Sn.

E. Cesaro. Conséquences arithmétiques d'une identité.

Teixeira J. VII. 3-6.

Die von Herrn Cesaro betrachtete Identität ist die folgende:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{u_1 u_2 u_3 \dots u_n}{1-z^n},$$

wo

$$u_n = \frac{z^n x}{1-z^n x}.$$

Indem er zunächst $x = 1$ setzt, erhält er eine Transformation der Lambert'schen Reihe in eine andere, die schneller convergirt, und durch Vergleichung der Coefficienten derselben Potenzen von z in den beiden Reihen zwei Ausdrücke für die Anzahl der Divisoren einer Zahl n.

Indem der Verfasser darauf den allgemeinen Fall betrachtet, bildet er zwei Functionen von n und p, welche die Eigenschaft haben, gleich Null zu sein, wenn n kein Vielfaches von p ist; ist n dagegen ein Viefaches von p, so sind sie gleich Eins.

Tx. (Hcb.)

E. Cesaro. Sur un théorème de M. Mansion.

Mathesis V. 248-249.

Durch Multiplication zweier Determinanten wird der Satz bewiesen: Die Determinante n^{ten} Grades, deren Element eine Function $F(r, s)$ des grössten gemeinschaftlichen Teilers der Indices r und s ist, ist gleich $f(1)f(2)\dots f(n)$, wenn die Functionen f und F durch die Gleichheit verbunden sind:

$$F(r, s) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots,$$

worin a, b, c, ... die Divisoren des grössten gemeinschaftlichen Teilers von r und s darstellen (Bull. de l'Ac. de Belg. (2) XLVI. 892-899; F. d. M. X. 1878. 111). Mn. (Lp.)

E. Cesaro. Determinanti in aritmetica. Batt. G. XXIII. 182-197.

E. Cesaro. Intorno a taluni determinanti aritmetici. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 709-711.

E. Cesaro. Nuovo studio di determinanti aritmetici. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 711-715.

E. Cesaro. Considérations sur le déterminant de Smith et Mansion. Ann. de l'Éc. N. (3) II. 425-435.

Versteht man unter n eine ganze Zahl, unter a_1, a_2, ... ihre sämtlichen Teiler, 1 und n eingeschlossen, und setzt

$$\Sigma f(a_i) = F(n);$$

bedeutet ferner (x, y) den grössten gemeinsamen Teiler, $[x, y]$ das kleinste gemeinsame Vielfache von x und y, dann ist die Determinante

$$\Delta_n = |F(\varkappa, \lambda)| = f(1).f(2)...f(n); \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, ..., n)$$

wie Mansion gezeigt hat. In den vorliegenden vier Arbeiten werden solche Determinanten genauer untersucht, bei denen $f(n)$ durch verschiedene zahlentheoretische Functionen ersetzt wird. Ebenso werden Unterdeterminanten von Δ_n berechnet, und endlich werden die erlangten Resultate zur Auflösung linearer Gleichungen benutzt, bei denen Δ_n als Determinante auftritt.

No.

Louis M... Solution de la question 1449. Nouv. Ann. (3) IV. 473.

Beweis eines von Herrn Cesaro aufgestellten Satzes: Dividirt man eine Zahl n der Reihe nach durch alle vorhergehenden Zahlen, so ist die Summe der bleibenden Reste vermehrt um die Summe der Divisoren aller n Zahlen gleich n^2. Sn.

E. Cesaro. Sull' inversione delle identità aritmetiche. Batt. G XXIII 168-174.

Sind $a, b, c, \ldots$ sämtliche Divisoren der ganzen Zahl n, und f eine beliebige Function, so kann man die Function bilden

$$F(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots$$

Der Verfasser löst hier das Problem, wenn die Function F gegeben ist, die Function f zu finden, und zeigt, dass es stets eine, und nur eine Lösung giebt. H.

E. Cesaro. Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche. Batt. G XXIII. 175-181.

Das Gegenwärtige schliesst sich an die Einführung des „isobarischen Algorithmus“ und die Arbeiten von Trudi, Bellavitis, Fergola, Torelli und d'Ocagne an, betrachtet in der Definitionsgleichung

$$F(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots$$

wo $a, b, c, \ldots$ die sämtlichen Divisoren der ganzen Zahl n bezeichnen, den Fall, dass die Function f der Bedingung genügt

$$f(x)f(y) = f(xy)$$

und entwickelt einige Sätze darüber. H.

E. Cesaro. Généralisation de l'identité de M. Tchébycheff et de Polignac. Nouv. Ann (3) IV 418-422.

Eine complicirte Eigenschaft der Function, welche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der x ersten natürlichen Zahlen angiebt. Im Anschluss daran Sätze von der Art des folgenden: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine ganze Zahl durch andere r^{te} Potenzen ausser der Einheit teilbar sei, ist der Summe $1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots$ reciprok.

Sn.

P. S. Nasimoff. Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf die Theorie der Zahlen. Moskau.

Die umfangreiche Arbeit Nasimoff's enthält eine zusammenhängende Darstellung der bis jetzt gewonnenen Resultate, welche die Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf die Theorie der Zahlen betreffen. Die Arbeit selbst ist in sieben Capitel geteilt. Im ersten Capitel behandelt der Verfasser die Methode von Jacobi, welche aus Reihen für elliptische Constanten arithmetische Resultate herleitet und sie auf die Bestimmung der Anzahl der Lösungen einer Gleichung 2ten Grades von der Form

$$ax^2+bxy+cy^2=n$$

anwendet.

Als specielle Fälle betrachtet er die Gleichungen

$$x^2+16y^2=n, \quad 4x^2+4xy+3y^2=n$$

und die Gleichung $nx^2+my^2=p$, wo m und n ungerade sind und p beliebig.

In der Untersuchung der verschiedenen Fragen, welche die Gleichungen von vier und sechs Unbekannten betreffen, unterscheidet der Verfasser zwei Klassen von Gleichungen: 1) die Gleichungen, für welche die Anzahl der Lösungen durch Formeln von Landen bestimmt werden kann, und 2) die Gleichungen, die diese Eigenschaft nicht besitzen. Unter den ersten werden verschiedene specielle Fälle der Gleichungen von der Form

$$x^2+2^\mu y^2+2^\nu z^2+2^\nu t^2=n$$

und besonders die Gleichung

$$x^2+y^2+2^\alpha(z^2+t^2)=n$$

behandelt. Was die Zerlegung einer Zahl in sechs Quadrate betrifft, so zeigt der Verfasser, dass, sobald das Problem nicht mit Hülfe der Jacobi'schen Functionen gelöst werden kann, man die elliptischen Functionen mit dreifachen Unendlichen zu Hülfe nehmen muss. Am Ende des Capitels wird gezeigt, dass die Anzahl der Zerlegungen der Zahl $n=2^\alpha.m$ (wo m ungerade ist) in acht Quadrate gleich $\frac{16}{7}(8^{\alpha+1}-15)\xi_3(m)$ ist, wenn man

mit $\xi_3(m)$ die Summe der Kuben der Divisoren der Zahl m bezeichnet.

Dann folgt die Bestimmung der Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in zwölf Quadrate, nicht nur wenn diese Zahl gerade ist, was schon von Liouville behandelt wurde, sondern auch für den Fall einer ungeraden Zahl.

Was die Anzahl der Zerlegungen in zehn Quadrate betrifft, so sieht der Verfasser, wie früher Liouville, keine genügende Lösung dieser Frage. Hiernach wird diejenige Methode von Jacobi entwickelt, welche sich auf die Betrachtung der Reihen stützt, deren Exponenten zwei quadratische Formen bilden. Am Ende des Capitels giebt der Verfasser die Gleichheit zwischen den Summen einiger Doppelreihen, welche von Gleichungen dritten und siebenten Grades abhängen.

Im dritten Capitel behandelt der Verfasser den Beweis, welchen Hermite für die bekannten Formeln von Kronecker gegeben hat, und die Bestimmung der Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl entweder durch eine Summe von drei Quadraten oder durch eine Form von drei Veränderlichen.

Im vierten Capitel behandelt der Verfasser die Sätze von Liouville über die allgemeinen Eigenschaften der analytischen und zahlentheoretischen Functionen. Nachdem er alle Methoden, welche Liouville zum Nachweis seiner Theoreme über die arbiträren Functionen gedient haben, auseinandergesetzt hat, giebt er einen Beweis von H. Zolotareff (Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg t. XVI.) und einige Theoreme, die dem von Zolotareff gegebenen analog sind.

Im fünften Capitel werden die Gauss'sche Theorie der complexen Zahlen, die Eigenschaften der Gleichung der Lemniscatenteilung entwickelt und diese Eigenschaften zum Nachweis der Reciprocitätsgesetze für Reste vierten und achten Grades angewandt.

Das sechste Capitel ist den Untersuchungen Dirichlet's über die Anzahl der Klassen der eigentlich primitiven binären Formen für eine gegebene Determinante gewidmet, und endlich im siebenten Capitel zeigt der Verfasser das Verhältnis zwischen den

Formeln Kronecker's und der complexen Multiplication der elliptischen Functionen sowie das Verhältnis dieser Formeln zu den Untersuchungen Gierster's. Wi.

N. W. Bugaieff. Einige Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen auf die Theorie der discontinuirlichen Functionen. Die Erweiterung der allgemeinen Zahlengesetze auf die arbiträren Functionen. Mosk. math. Samml. XII 1-21.

Diese Abhandlung bildet die Fortsetzung der umfangreichen Arbeit des Verfassers (F. d. M. XV. 1883. 148; XVI. 1884. 422). Der Verfasser beweist im Anfange der Abhandlung folgende Theoreme: 1) Aus der Identität:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos mx = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos nx$$

folgt die Identität:

$$\mathrm{S} A_m \mathfrak{F}(m) = \mathrm{S} B_n \mathfrak{F}(n),$$

wenn $\mathfrak{F}(x)$ eine gerade Function ist, die sich in eine trigonometrische Reihe $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{u=0}^{\infty} a_u \cos ux$ entwickeln lässt. 2) In derselben Weise folgt aus der Identität:

$$\Sigma A_m \sin mx = \Sigma B_n \sin nx$$

die Identität:

$$\mathrm{S} A_m \mathfrak{F}_1(m) = \mathrm{S} B_n \mathfrak{F}_1(n),$$

wenn $\mathfrak{F}_1(x)$ eine ungerade Function ist, die sich in eine trigonometrische Sinusreihe entwickeln lässt. Mit Hülfe dieser Theoreme leitet der Verfasser aus den Zahlengesetzen, welche in seinen früheren Arbeiten bewiesen sind, neue Gesetze über die willkürlichen Functionen ab. Einige von diesen Gesetzen sind mit denen identisch, welche Liouville in seinen Artikeln: „Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres“ (Liouville J. (2) III., IV., V., X.) gegeben hat. Wi.

T. J. Stieltjes. Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres. C. R. CI. 368-370.

Bedeutet $\theta(x)$ die Tschebyscheff'sche Function, welche die Summe der Logarithmen aller Primzahlen $\leq x$ darstellt, und setzt man

$$\theta(n) + \theta(n^{\frac{1}{2}}) + \theta(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots = n + A_n n^s,$$

so ist $\lim\limits_{n=\infty} A_n = 0$. Daraus folgt weiter $\theta(n) = n + B_n n^s$, wo $\lim\limits_{n=\infty} B_n = 0$ $(s > \frac{1}{2})$ ist. Hieraus lässt sich schliessen: Bedeutet h irgend eine positive Zahl, so wächst die Zahl der zwischen n und $(1+h)n$ gelegenen Primzahlen schliesslich immer über jede Grenze, wenn n in's Unendliche wächst. Zur Herleitung dieser Resultate dienen folgende zwei Sätze: I) Ist die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s} \quad (s > 0)$$

convergent, so hat man

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \cdots + \lambda(n)}{n^s} = 0.$$

II) Sind die beiden Reihen $\sum\limits_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s}$ und $\sum\limits_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s}$ für $s = \alpha\,(\alpha > 0)$ und die Reihen $\sum\limits_1^\infty \frac{|\lambda(n)|}{n^s}$, $\sum\limits_1^\infty \frac{|\mu(n)|}{n^s}$ für $s = \alpha + \beta$ convergent, so convergirt die Reihe $\sum\limits_1^\infty \frac{\nu(n)}{n^s}$, wo $\nu(n) = \Sigma\lambda(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ und d alle Teiler von n darstellt, für $s = \alpha + \frac{1}{2}\beta$. Diese beiden Sätze werden auf die Reihen angewandt:

$$1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \cdots$$

(cf. C. R. CI. p. 153.) und $\sum\limits_1^\infty \frac{f(n) - \log n - 2C}{n^s}$ (cf. Dirichlet), wo $f(n)$ die Anzahl der Divisoren von n und C die Euler'sche Constante bedeutet.

T.

A. Pringsheim. Darstellung der zahlentheoretischen Function $E(x)$ durch eine unendliche Reihe. Klein Ann. XXVI. 193-197.

Bedeutet $E(x)$ die grösste in der (positiven) Zahl x enthaltene ganze Zahl, so ist zwar $F(x) = x - E(x)$ eine periodische Function mit der Periode 1, kann aber durch eine Fourier'sche Reihe $\varphi(x)$ nicht ausnahmslos genau dargestellt werden, da eine solche an den Sprungstellen $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ nur den Mittelwert $\frac{1}{2}\{F(x+0)+F(x-0)\} = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$ zu liefern vermag, während an denselben $F(x) = 0$ ist. Um die analytische Darstellung zu einer auch an diesen Stellen gültigen zu machen, bedarf es demnach der Aufstellung eines Ausdrucks $G(x)$, welcher die Eigenschaft hat, für alle ganzzahligen x (incl. 0) gleich 1 zu werden, sonst aber zu verschwinden; dann ist ausnahmslos

$$F(x) = \varphi(x) - \tfrac{1}{2}G(x).$$

Solche analytischen Ausdrücke, wie $G(x)$, mit sogenannten hebbaren Unstetigkeiten hat aber der Herr Verfasser in einem vorhergehenden Aufsatze (Klein Ann. XXVI. 167 ff.; cf. F. d. M. diesen Band, Abschn. V.) auf unendlich vielfache Weisen in Form von unendlichen Reihen darstellen gelehrt. Im vorliegenden Falle führen ganz elementare Betrachtungen zum Ziel. Das Schlussresultat lautet:

$$E(x) = x + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu}$$
$$+ \frac{4}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \frac{\cos 2\nu\pi x}{\nu} \sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa} \frac{1}{2\varkappa - 1} - \sum_{1}^{\nu}{}_{\varkappa} \frac{\cos 2(\nu+1-2\varkappa)\pi x}{(2\varkappa-1)(2\nu+1-2\varkappa)} \right\}.$$

T.

L. Gegenbauer. Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen. Wien. Denkschr. L. 153-184.

Es wird eine grosse Anzahl asymptotischer Gesetze aus der Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen abgeleitet. Dieselben mögen durch folgende Angaben charakterisirt werden: Es wird der mittlere Wert der reciproken k^{ten} Potenzen der Normen derjenigen primären Divi-

soren einer ganzen complexen Zahl von der Form $(a+bi)$ abgeleitet, welche durch c^r teilbare r^{te} Potenzen sind. Es wird die mittlere Summe der Normen der reciproken k^{ten} Potenzen derjenigen primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ gefunden, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{te}$ Potenz teilbar sind. No.

L. Gegenbauer. Arithmetische Theoreme. II. Wien. Denkschr. IL. 1-36.

L. Gegenbauer. Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. Wien. Denkschr. IL. 37-80.

L. Gegenbauer. Ueber den grössten gemeinschaftlichen Divisor. Wien Ber. XCI. 333-343.

L. Gegenbauer. Einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. Wien. Ber. XCII. 1290-1306.

Da diese Arbeiten im wesentlichen aus einer Aneinanderreihung von einer sehr grossen Anzahl von Formeln und daraus fliessenden Theoremen bestehen, ist eine zusammenfassende, kurze Darstellung ihres Inhalts ebensowenig angänglich, wie für die früheren Aufsätze desselben Verfassers in den Wien Ber. LXXXIX und XC und in den Wien. Denkschr. IL im vorigen Bande dieser Zeitschr. (p. 149f.) Mehrere der erhaltenen Resultate oder specielle Fälle derselben finden sich bei Dirichlet, Lipschitz, Mertens, Bugaieff, Berger und namentlich bei Cesaro. T.

E. Cesaro. Étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres. Brioschi Ann. (2) XIII. 235-250.

E. Cesaro. Le plus grand diviseur carré. Brioschi Ann. (2) XIII. 251-268.

E. Cesaro. Eventualités de la division arithmétique. Brioschi Ann. (2) XIII. 269-290.

E. Cesaro. Sur le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. Brioschi Ann. (2) XIII. 291-294.

E. Cesaro. Sur la distribution des quantités commensurables. Brioschi Ann (2) XIII 295-313.

E. Cesaro. Sur le rôle arithmétique de $\sin\frac{\pi x}{2}$.
Brioschi Ann (2) XIII. 315-322.

E. Cesaro. Sur la fonction $z-[z]$. Brioschi Ann. (2) XIII. 323-328.

E. Cesaro Sur la fonction $\mathfrak{T}(z)$. Brioschi Ann (2) XIII. 329-338.

Fernere Anwendungen der Principien der asymptotischen Arithmetik, welche der Herr Verfasser in seinem Werke: „Sur diverses questions d'arithmétique, Liége Mém. (2) X. 1-360". (s. F. d. M. XV. 144) entwickelt hat. Es wird genügen, eine Reihe von Resultaten anzuführen: „Irgend zwei Zahlen lassen, im Mittel, $\frac{\pi^2}{6}$ gemeinsame Teiler zu. Die Summe der Quadrate der Divisoren, welche zwei Zahlen gemeinsam sind, ist im Mittel gleich dem geometrischen Mittel aus diesen Zahlen, multiplicirt mit der Constanten 1,56585... Der reciproke Wert des grössten quadratischen Teilers irgend einer Zahl ist im Mittel gleich 1,3684... Man kann ungefähr 115 gegen 61 wetten, dass der bei der Division zweier Zahlen erhaltene Quotient eher gerade als ungerade ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass drei willkürlich genommene Zahlen relativ prim seien, ist 0,8319... Die Wahrscheinlichkeit, dass die grösste ganze Zahl, welche in dem Product zweier willkürlich gewählten commensurablen Grössen enthalten ist, ungerade sei, ist 0,3066..." u. a. M.

N. W. Bugaieff. Ein allgemeines Gesetz der Theorie der Teilung der Zahlen. Mosk. math. Samml XII. 283-315. (Russisch.)

Wenn man

$$(\varphi(1)x^{\psi(1)}+\varphi(2)x^{\psi(2)}+\varphi(3)x^{\psi(3)}+\cdots)^{\mu}$$

in eine Reihe

$$Q_1 x + Q_2 x^2 + \cdots + Q_n x^n + \cdots$$

entwickelt, so ist Q_n gleich der Summe der Producte

$$\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_\mu),$$

genommen für alle Systeme $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ welche der unbestimmten Gleichung

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_\mu) = n$$

genügen. Die logarithmische Differentiation der Identität

$$(\varphi(1)x^{\psi(1)} + \varphi(2)x^{\psi(2)} + \cdots)^\mu = Q_1 x + Q_2 x^2 + \cdots$$

giebt das allgemeine Gesetz

$$\text{(I)} \qquad \sum_{u=1}^{u=\varrho} (n - (\mu + 1)\psi(u))\,\varphi(u)\,Q_{n-\psi(u)} = 0,$$

wo ϱ den Ungleichheiten $\psi(\varrho) \leqq n$, $\psi(\varrho + 1) > n$ genügt.

Aus diesem allgemeinen Gesetze kann man sehr viele specielle Gesetze ableiten, deren Entwickelung die Abhandlung gewidmet ist. So z. B. wenn man $\psi(u) = u$, $\mu = 1$ setzt, so hat man $Q_n = \varphi(n)$ und das Gesetz (I) nimmt die Form

$$\text{(II)} \qquad \sum_{u=1}^{u=n-1} (n - 2u)\varphi(u)\cdot\varphi(n-u) = 0$$

an. Wenn man $\varphi(n)$ noch specialisirt, giebt diese Formel specielle Zahlengesetze für quadratische, kubische und höhere Reste und kann auch zur Transformation einiger Zahlengesetze, die aus der Theorie der elliptischen Functionen fliessen, angewandt werden. Wi.

E. de Jonquières. Solution d'une question d'analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. C. R. CI. 857-861.

E. de Jonquières. Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona. C. R. LI. 921-922.

Siehe Abschn. IX. Cap. 5. T.

E. DE JONQUIÈRES. Modes de solution d'une question d'analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. Paris. Gauthier-Villars.

W. JUNG. Beitrag zur Zahlentheorie. Cas. XIV. pag. 50. (Böhmisch.)

Enthält theoretische wie praktische Bemerkungen zur Auflösung eines Systems von n einfachen Congruenzen der Form

$$x_\varkappa \equiv a_\varkappa \pmod{a_\varkappa}.$$

Std.

W. ŠIMERKA. Ueber die Reste einer arithmetischen Progression. Cas. XIV. pag. 221. (Böhmisch.)

Behandelt die Eigenschaften der Congruenz

$$u_r \equiv a + br \pmod{p}$$

und schliesst unter Hinweis auf die Theoreme von Fermat und Wilson. Std.

G. RADOS. Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades. Kronecker J. IC. 258-260.

Beweise der beiden von Herrn J. König angegebenen Sätze:

I. Ist

$$f(x) = a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \cdots + a_{p-2};$$

sind die a ganze Zahlen von denen a_{p-2} nicht durch die ungerade Primzahl p teilbar ist; setzt man

$$a_{\varkappa+p-1} \equiv a_\varkappa \quad \text{und} \quad |a_{m+n}| = D, \qquad (m, n = 0, 1, \ldots, p-2)$$

dann ist $D \equiv 0 \pmod{p}$ hinreichende und notwendige Bedingung dafür dass $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ Wurzeln habe.

II. Damit die Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ genau k Wurzeln besitze, ist es hinreichend und notwendig, dass alle Subdeterminanten $(p-k)^{\text{ten}}$ Grades von D (mod. p) verschwinden, aber nicht alle des nächst niedrigeren Grades. No.

Weill. Sur une identité algébrique. Nouv. Ann. (3) IV. 184-188.

Für die Lösung der unbestimmten Gleichung

$$x^3y + y^3z + z^3u + u^3x = 0$$

werden vier Systeme von Polynomen angegeben, und durch dieselbe kann dann eine Reihe anderer unbestimmter Gleichungen gelöst werden. Solche sind beispielsweise

$$ax^3 + y^3 = (1+a^3)z, \qquad x^3 + y^3 = b(1+a^{3m})z^3.$$

No.

E. Catalan. Question d'analyse indéterminée. Belg. Bull. (3) IX. 531-534.

E. Catalan. Une récréation arithmétique. Belg. Bull. (3) IX. 534-536.

Ueber die Gleichungen

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \text{etc.}$$

Mn. (Lp.)

E. Catalan. Solution de la question 1489. Nouv. Ann. (3) IV. 520-524.

Die diophantische Gleichung

$$(x+y)^p - x^p - y^p = pxy(x+y)P^2$$

hat nur eine Lösung: $p = 7$, $P = x^2 + xy + y^2$. Sn.

Anonyme. Note sur les solutions, en nombres entiers, de l'équation $\frac{x^3+2}{5^2} = y$, où l'on suppose x impair. Nouv. Ann. (3) IV. 431-432.

Das Resultat lautet $x = 47 + 50t$, t beliebig. Sn.

Realis. Correspondance. Nouv. Ann. (3) IV. 376-378.

Aufstellung einer Reihe von biquadratischen Gleichungen, welche keine ganzzahligen Wurzeln haben können. Sn.

Faucquembergue. Question 1351. Nouv. Ann. (3) IV. 379-380.

Beweis eines Satzes von Réalis, Fälle betreffend, in welchen die diophantische Gleichung

$$x^3 + x = y^2$$

ganzzahlige Wurzeln besitzt. Sn.

R. Perrin. Sur l'intégration indéterminée $x^3 + y^3 = z^3$. S. M. F. Bull. XIII. 194-197.

Der Herr Verfasser zeigt, wie aus einer bekannten Lösung jener, bekanntlich unlösbaren diophantischen Gleichung eine unendliche Reihe von immer wachsenden Lösungen gefunden werden könnte. Einen Beitrag zum Beweis jener Unlösbarkeit liefert also die vorliegende Arbeit nicht. Sn.

Weill. Sur quelques équations indéterminées. Nouv. Ann. (3) IV. 189-193.

Zuerst werden Lösungen einiger Gleichungen wie

$$ax^2 + by^2 = z^{2p+1}, \quad x^2 + by^2 = z^m$$

angegeben; dann wird die Differenzengleichung

$$\varphi(n) = A.\varphi^2(n-1) + B.\varphi(n-1) + \frac{B^2 - B - 2}{2A}$$

behandelt. No.

Faucquembergue. Questions proposées par M. Réalis.
Réalis. Solutions des mêmes questions. Nouv. Ann. (3) IV. 427-429, 429-431.

Nachweis der Unmöglichkeit, einige unbestimmte Gleichungen vierten Grades durch ganze Zahlen zu befriedigen.

No.

G. Frattini. Intorno ad un teorema di Lagrange. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 12, 136-142.

Bedingungen für die Lösbarkeit der Congruenzen:

$$x^2 - Dy^2 \equiv \lambda, \quad x^2 - Dy^2 \equiv \lambda \qquad (\text{mod.}\, p)$$

und einiger anderer, welche sich auf diese zurückführen lassen.

Sn.

L. Kronecker. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen. Berl. Ber. 383-396.

Die Abhandlung ist als Abschluss der Untersuchungen anzusehen, die Herr Kronecker 1876 und 1884 über das quadratische Reciprocitätsgesetz veröffentlicht hat; sie giebt eine neue und vollständige Einsicht in die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen auf dem Gauss'schen Lemma fussenden Reciprocitätsbeweise durch die Zurückführung derselben auf die verschiedenen Fundamental-Eigenschaften der Reste reeller Grössen. Dieselben drücken sich in den folgenden Gleichungen aus:

$$(\mathfrak{C}) \qquad \text{sgn.}\,\text{R}(a) = \text{sgn.}\prod_g (\tfrac{1}{2}g - a); \qquad (g = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(\mathfrak{D}) \qquad \text{R}(a) = \text{R}(a+1), \quad \text{R}(a) + \text{R}(-a) = 0;$$

$$(\mathfrak{E}) \quad \text{R}(a) + \text{R}(b) + \text{R}(c) = [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\text{sgn.}\,\text{R}(a) + \tfrac{1}{2}\text{sgn.}\,\text{R}(b) + \tfrac{1}{2}\text{sgn.}\,\text{R}(c)];$$

$$(\mathfrak{F}) \qquad m\text{R}\left(\frac{hn}{m}\right) + n\text{R}\left(\frac{km}{n}\right) = 0,$$

(wobei hinsichtlich der Bezeichnungen auf F. d. M. XVI. 1884. 156 verwiesen werden muss). Der formal einfachste Beweis des Reciprocitätsgesetzes stützt sich nur auf ($\mathfrak{C}$): denselben hat Herr Kronecker, etwas modificirt, schon gegeben (F. d. M. XVI. 1884. 156); er ist eine Vereinfachung des dritten Gauss'schen Beweises. Der sachlich einfachste Beweis ist der vereinfachte fünfte Gauss'sche, der nur die Beziehung ($\mathfrak{D}$) benutzt. Endlich der Zeller'sche Beweis benutzt ($\mathfrak{E}$) und ($\mathfrak{F}$), indem er die Reste selbst in gewisser Weise einander zuordnet.

Erwähnt werden möge noch die bemerkenswerte Gleichung

$$\sum_i \text{sgn.}\,\text{R}\left(\frac{hi}{m}\right) = \frac{1}{m}\sum_i \text{tg}\,\frac{i\pi}{m}\,\text{tg}\,\frac{hi\pi}{m}$$

$$\left(h = 1, 2, \ldots \frac{m-1}{2}\right).$$

Im Schlussparagraphen wird eine Function zweier positiver oder negativer, ungerader, teilerfremder Zahlen m, n definirt durch

$$\theta(m, n) = \theta(m+2n, n)$$

$$\theta(m, n) = \theta(-n, m)(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n+1)+\frac{1}{4}(\operatorname{sgn} m-1)(\operatorname{sgn} n+1)}.$$

Wenn es gelingt, den Multiplicationssatz

$$\theta(l, n).\theta(m, n) = \theta(lm, n)\theta(1, 1)$$

aus den Definitionsgleichungen abzuleiten, so würde dies die Uebereinstimmung von θ mit dem Legendre-Jacobi'schen Zeichen geben, und so einen Beweis des Reciprocitätsgesetzes liefern.

No.

L. Gegenbauer. Ueber das Legendre-Jacobi'sche Symbol. Wien Ber XCI. 11-33.

Eine grosse Zahl von Formeln, welche sich auf die quadratischen Restcharaktere beziehen und in einer neuen allgemeinen Regel zur Bestimmung dieses Charakters gipfeln Die gegebenen Sätze sind vielfach Verallgemeinerungen von Theoremen des Herrn Buniakoffsky (Bull. de Pét. XIV., XXII., vgl. F. d M. II. 1870. 92-93., VIII. 95-96). Sn.

L. Gegenbauer. Ueber das Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$. Wien Ber. XCII 876-892

Einfache Ableitungen der von den Herren Kronecker und Schering gegebenen Darstellungen des obigen Symbols durch Vorzeichenproducte; und ähnliches. Sn.

A. Genocchi. Ancora un cenno dei residui cubici e biquadratici. Bonc Bull XVIII. 231-234

Eine Reihe von kleinen Anmerkungen, welche an eine frühere Besprechung des Briefwechsels zwischen Gauss und Sophie Germain anknüpfen (vgl. F. d. M XII. 1880. 14). Sn.

A. Genocchi. Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non premiers. Bonc. Bull. XVIII. 235-237.

Abdruck aus den C. R. XC. 300-302; vgl. F. d. M. XII. 1880. 123-124. Sn.

A. Genocchi. Sur quelques théorèmes qui peuvent conduire à la loi de réciprocité de Legendre. Bonc Bull. XVIII 238-243.

Herr Genocchi setzt auseinander, welchen Anteil er an den aus der Theorie der Kreisteilung abgeleiteten Beweisen für das quadratische Reciprocitätsgesetz früher genommen hat.

Sn.

H. Bork. Untersuchungen über das Verhalten zweier Primzahlen in Bezug auf ihren quadratischen Restcharakter. Pr. Askan. Gymn. Berlin R. Gärtner.

Die Methode der Gitterpunkte, welche von Eisenstein (Crelle J. XXVIII.) erfunden und jüngst von Ahlborn zur Berechnung von Summen von grössten Ganzen (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 141) wieder aufgenommen wurde, dient hier zur Aufsuchung von Specialfällen des Reciprocitätsgesetzes, z. B.: Sind zwei Primzahlen, deren Differenz 4 beträgt, von der Form $4n+1$, so müssen sie stets Rest von einander sein; von der Form $4n+3$, so ist die kleinere Nichtrest der grösseren, die grössere Rest der kleineren. Eine beliebige Zahl x, die um 2 grösser ist als die Primzahl p, ist Rest oder Nichtrest dieser Primzahl p, je nachdem $\frac{1}{4}(p-1)(x-1)$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Sn.

A. Genocchi. Remarques sur une démonstration de la loi de réciprocité. C. R. CI 425-427.

Eine Notiz über das Verhältnis der von Genocchi im Jahre 1880 gegebenen Darstellung seines Beweises (vgl. F. d. M. XII.

1880. 123-124) zu den Beweisen der Herren Zeller, Kronecker, Schwering, und zu Entwickelungen von Eisenstein. Sn.

SCHERING. Zum dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste. Berl. Ber. 113-117.

KRONECKER. Bemerkung zu Herrn Ernst Schering's Mitteilung. Berl. Ber 117-118.

Immer einfachere Wendungen, im Anschluss an die früheren Entwickelungen (vgl. F. d. M. XI. 1879. 130-131, XVI. 1884). Sn.

P. NAZIMOFF. Extrait d'une lettre. Darb. Bull. (2) IX. 15-20.

Zusammenhang des Lehrsatzes: „Ist $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ ein vollständiges System von quadratischen Resten mod. p; $\beta, \beta', \beta'', \dots$ das zugehörige System von Nichtresten, dann ist in der Reihe $1+\alpha, 1+\alpha', 1+\alpha'', \dots$ die Anzahl der Reste um eins kleiner als die Anzahl der Nichtreste; in der Reihe $1+\beta, 1+\beta', 1+\beta'' \dots$ sind ebensoviele Reste wie Nichtreste enthalten", mit der Formel:

$$\left(\frac{an^2+2bmn+cm^2}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{x,y=0}^{p-1}\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{p}\right)e^{\frac{2(nx-my)\pi i}{p}}.$$

Sn.

CAYLEY. The binomial equation $x^p-1=0$; Quinquisection; second note. Lond. M. S. Proc. XVI. 61-63.

Prioritätsanspruch hinsichtlich einiger Formeln die Fünfteilung der Kreisteilungsgleichung betreffend. No.

B. Theorie der Formen.

BENOIT. Sur la décomposition des formes quadratiques. C. R. CI 869-872.

Das Kriterium der Darstellbarkeit einer quadratischen Form von m Variabeln als Summe von $m-n$ Quadraten ist bekanntlich das Verschwinden aller Unterdeterminanten (der Discriminante) von der Ordnung $n+1$ (ohne dass es alle von der Ordnung n thun). Es wird nachgewiesen, welche von diesen Bedingungsgleichungen unabhängig sind. Es sind der Zahl nach $\frac{n(n+1)}{2}$.

My.

P. Wolfskehl. Beweis, dass der zweite Factor der Klassenanzahl für die aus den elften und dreizehnten Einheitswurzeln gebildeten Zahlen gleich Eins ist. Kronecker J. XCIX. 173-179.

Vorausgeschickt wird der Hülfssatz: Sind $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}$ die zu einer primitiven λ^{ten} Einheitswurzel gehörigen e f-gliedrigen Perioden, und ist $f(\eta_0)$ ein idealer Teiler der Gattung (η_0), so kann man stets einen idealen Multiplicator $\varphi(\eta_0)$ so bestimmen, dass $f(\eta_0)\varphi(\eta_0)$ der Hauptklasse angehört, während $N\varphi(\eta_0) \leqq \lambda^{\frac{e}{2}}$ bleibt.

Wendet man dies im Falle der aus den elften Einheitswurzeln gebildeten Zahlen auf die Klassenanzahl der durch die fünf zweigliedrigen Perioden constituirten Gattung an, so wird $\lambda^{\frac{e}{2}} = 401, \ldots$ Mit Rücksicht auf die Reuschle'schen Tafeln geht daraus hervor, dass für jene Zahlen ideale Teiler nicht existiren können, d. h. der gesuchte zweite Factor der Klassenanzahl ist Eins. Aehnlich, wenn auch complicirter, ist es bei den dreizehnten Einheitswurzeln.

My.

A. Hurwitz. Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Klein Ann. XXV. 157-196.

Die bekannten Kronecker'schen Klassenanzahlrelationen sind aus der Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen

abgeleitet worden. Durch Anwendung eines ähnlichen Gedankenganges auf die von Herrn Klein begründete Theorie der Modularcorrespondenzen hatte Herr Gierster neue Klassenanzahlrelationen (zum Teil ohne Beweis) gewonnen. Diese Relationen werden hier (zunächst für die einfachsten Fälle) mit Hülfe einer ausreichenden analytischen Darstellung der zugehörigen Transformationsgleichungen unter Zugrundelegung eines einfachen und durchsichtigen Princips abgeleitet, demzufolge die linke und rechte Seite der betr. Klassenanzahlrelation identisch ausfallen mit der Anzahl der Null- resp. Unendlichkeitsstellen einer gewissen, auf der zur bez. Modularcorrespondenz gehörigen Riemann'schen Fläche überall eindeutigen Function.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile. Der erste, vorbereitende, recapitulirt das (bereits früher vom Verfasser eingeschlagene) Verfahren zur Gewinnung der Klassenanzahlrelation erster Stufe. In diesem Falle handelt es sich um eindeutige Functionen eines complexen Argumentes ω, die sich für äquivalente Werte von ω, d. h. bei ganzzahligen Substitutionen $S(\omega)$ von der Determinante Eins reproduciren. Man deute ω in der $(x+iy)$-Ebene. Dann ist derjenige Teil der positiven Halbebene, der durch die Geraden $x = \pm\frac{1}{2}$ und den Halbkreis $x^2+y^2 = 1$ begrenzt wird, d. i. ein krummliniges Dreieck, das Fundamentaldreieck, mit den Ecken

$$\omega = i\infty,\ = e^{\frac{2i\pi}{3}},\ = 1+e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

ausgefüllt durch ein vollständiges System nicht äquivalenter Grössen ω (wofern man die auf Seiten der positiven X-Axe liegende Begrenzung des Dreiecks nicht mithinzurechnet). Zwei positive quadratische Formen von gleicher negativer Determinante D sind „äquivalent", wenn ihre ersten Wurzeln (mit positiv imaginärem Bestandteil) es sind. Eine Form ist „reducirt", wenn ihre erste Wurzel dem Fundamentaldreieck angehört.

Andererseits werde ω einer Transformation n^{ter} Ordnung (d. h. von der Determinante n) unterworfen:

$$\omega' = \frac{a\omega+b}{c\omega+d} \qquad (ad-bc=n).$$

Man kann diese Ausdrücke $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ leicht in $\Phi(n)$ Reihen verteilen (wo $\Phi(n)$ die Summe der Divisoren von n bedeutet), sodass jede Reihe nur äquivalente Grössen enthält. Irgend $\Phi(n)$ herausgegriffene Glieder dieser Reihen, $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, ... bilden ein Repräsentantensystem der Transformation n^{ter} Ordnung.

Versteht man dann unter $J(\omega)$ die absolute Invariante des elliptischen Integrals erster Gattung, so hat die Function

$$F(\omega) = \prod_i [J(\omega) - J(R_i(\omega))]$$

die Eigenschaft $F[S(\omega)] = F(\omega)$ und besitzt infolgedessen innerhalb des Fundamentaldreiecks eine gleiche Anzahl von Null- und Unendlichkeitsstellen $N = U$. Beide Seiten dieser Gleichung lassen sich unabhängig von einander auswerten.

Die linke erhält den Wert $\sum_k H(-4n + k^2)$, wo H die Zahl der verschiedenen Klassen von positiven Formen der Determinante $D = -4n + k^2$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) bedeutet. Rechts dagegen kommt die Summe $\Phi(n) + \Psi(n)$, wo $\Psi(n)$ eine zweite, einfache zahlentheoretische Function von n ist. Dies ist die gemeinte Relation erster Stufe:

$$\sum H(-4n + k^2) = \Phi(n) + \Psi(n).$$

In analoger Weise werden im zweiten Abschnitte Substitutionen $T = \binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ „der q^{ten} Stufe", das sind solche, wo

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta = 1:0:0:1 \quad (\text{mod.}\, q),$$

in Betracht gezogen und die zugehörigen Functionen $F(\omega)$ aufgestellt. Die Grösse $T(\omega)$ heisst zu ω relativ äquivalent. An Stelle des Fundamentaldreiecks tritt ein „Fundamentalpolygon" (vom Geschlecht p), das sich aus einer Reihe von Dreiecken $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$, ... zusammensetzt, und ein volles System relativ inäquivalenter Grössen darstellt. Durch Vereinigung der zusammengehörigen Ränder des Polygons entsteht die „Riemann'sche Fläche der q^{ten} Stufe". Es wird in Riemann'scher Weise der Satz bewiesen: „Jede auf der Fläche existirende unverzweigte Function ist eine eindeutige Function von ω".

Folglich sind im besonderen die auf der Fläche existirenden überall endlichen Integrale und ϑ-Functionen eindeutige Functionen

von ω, „der q^{ten} Stufe". Ein solches überall endliches Integral der q^{ten} Stufe ist geradezu definirbar als eine endliche Function $f(\omega)$, die der Gleichung genügt:

$$f\{T(\omega)\} = f(\omega) + \text{const.}$$

Nunmehr wird mittels der zur Fläche gehörigen ϑ-Function ein Productausdruck $F(\omega)$ hergestellt, der die Eigenschaft erhält, bei Ersetzung von ω durch $T(\omega)$ nur einen, von ω unabhängigen Factor anzunehmen. Eine solche Function hat aber im Fundamentalpolygon die gleiche Zahl von Null- und Unendlichkeitsstellen. $N = U$. Weiter verfährt man, wie oben. Die linke Seite N geht über in die „linke Seite der Klassenanzahlrelation". Die rechte U setzt sich aus gewissen, von n und q abhängigen, zahlentheoretischen Functionen zusammen.

Eine wirkliche Durchführung wird für $q = 7$ geleistet. Die 3 überall endlichen Integrale sind in diesem Falle identisch mit den Integralen erster Gattung der (von Klein, Jordan, Poincaré studirten) Curven vierter Ordnung $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$. Die drei im Ausdruck von U auftretenden zahlentheoretischen Functionen $\psi_1(m), \psi_2(m), \psi_3(m)$ ($m \equiv n \pmod{7}$ und $D = -4n + k^2$) sind die Coefficienten der Entwicklung der drei Integrale erster Gattung nach Potenzen $(q^{\frac{2\omega}{7}})$ von q. My.

A. Hurwitz. Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Leipz. Ber. 1884. 193-197.

A. Hurwitz. Ueber die Klassenzahlrelationen und Modular-Correspondenzen primzahliger Stufe. Leipz. Ber. 222-240

In der ersten Arbeit giebt Herr Hurwitz die Resultate seiner Untersuchungen über die Klassenzahlrelationen der elften Stufe, bei denen drei höhere zahlentheoretische Functionen $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$, $\psi_3(n)$ auftreten, während bei denen der siebenten Stufe nur die bekannte Function $\psi(n)$ erschien. Diese Functionen sind nichts anderes als die Entwicklungscoefficienten der überall end-

lichen Integrale der betreffenden Stufen. In der zweiten Arbeit wird gezeigt, dass man es hier mit einem allgemeinen Gesetze zu thun hat; der Beweis wird nur für primzahlige Stufen geführt; doch macht seine Ausdehnung keine Schwierigkeit.

No.

A. Hurwitz. Ueber die Anzahl der Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. Kronecker J. XCIX. 165-168.

Bericht an Herrn Kronecker über die vom Verfasser gefundenen neuen acht Klassenanzahlrelationen. Man erhält sie durch geeignete Combination der älteren Kronecker'schen Relationen mit den beiden ϑ-Gleichungen:

$$\vartheta_1(iq)\vartheta_1^3(q^2) = \vartheta_1^4(iq),$$

$$\vartheta(q^4)\vartheta_2(q)\vartheta_2(q^3) = i^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'(iq).$$

My.

H. Minkowski. Ueber positive quadratische Formen. Kronecker J. XCIX. 1-9.

Es werden einfache (zum Teil bereits früher von St. Smith, wenn auch nicht in so durchsichtiger Form gefundene) Formeln entwickelt für das Mass eines beliebigen Genus von positiven, quadratischen Formen mit n Variabeln. Es liegt folgende sich als sehr zweckmässig erweisende Definition des Genus zu Grunde:

„Das Genus einer Form $f = \sum_1^n a_{ik} x_i x_k$ wird gebildet von allen den Formen g mit gleichem Trägheitsindex wie f, welche mit f für jeden beliebigen Modul N congruent sind".

Bedeuten $f(N)$ und D gewisse Invarianten des Genus f, und c eine Constante, so erhält man für das Mass M des Genus das über alle Primzahlen zu erstreckende Product:

$$M = c\sqrt{D}\,\frac{1}{f(2)}\,\frac{1}{f(3)}\,\frac{1}{f(5)}\cdots$$

Den Schluss bilden neue charakteristische Bedingungen für die

Hermite'schen reducirten Formen im Falle $n = 4$ und 5, die den bekannten für $n = 2$ und 3 analog formulirt werden können.

My.

H. Minkowski. Untersuchungen über quadratische Formen. I. Bestimmung der Anzahl verschiedener Formen, welche ein gegebenes Genus enthält. Acta Math. VII 201-258.

Es handelt sich um die Ermittelung von Zahlen, welche im Falle „allgemeiner" Genera, d. i. von quadratischen Formen mit n Variabeln dieselbe Rolle spielen, wie im Falle binärer Genera die Klassenzahlen. Man bemerkt aber bald, dass sich die Aufgabe, wenn anders man zu einfachen Formeln gelangen will, naturgemäss dahin modificirt, die (endlichen) Verhältnisse zu bestimmen, in welchen die (unendliche) Anzahl der in einem Genus enthaltenen Formen steht zu der (gleichfalls unendlichen) Anzahl der in irgend einer Klasse des Genus enthaltenen. Eine solche Verhältniszahl heisst dann das „Mass" der betreffenden Klasse.

So ist z. B. der reciproke Wert dieses „Masses" bei den binären Klassen negativer Determinante in der Regel gleich zwei (ausnahmsweise vier resp. sechs), da eine zugehörige quadratische Form f nur zwei (resp. vier, sechs) lineare ganzzahlige Substitutionen von der Determinante Eins in sich zulässt. Das Analoge findet für quadratische, definite Formen von n Variabeln statt.

Um derartige Untersuchungen mit Erfolg auszuführen, kam es vor allem auf eine zweckmässige Definition des „Genus" an.

Diese bot sich dem Verfasser schon früher in folgender Weise dar: „Alle Formen, welche denselben Trägheitsindex J haben, wie eine gegebene Form f, und welche mit dieser Form „für einen jeden beliebigen Modul congruent sind, bilden ein Genus".

Dabei heissen zwei Formen f, g von n Variabeln „congruent" in Bezug auf einen Modul N, wenn es lineare Substitutionen von

einer Determinante $\equiv 1$ (mod. N) giebt, durch welche die Form f der Form g (mod. N) congruent wird.

Zunächst wird ein Genus von Formen f durch sein „vollständiges System von Invarianten" charakterisirt. Diese werden gebildet einmal vom Trägheitsindex J, sodann von gewissen $2n-1$ Invarianten der Form f und endlich von den Charakteren (± 1) der Form f, welche letztere in Gestalt Legendre'scher Symbole auftreten, die möglichst einfach gewählt werden. Eine Form f mit diesen „kanonischen" Charakteren heisst eine „charakteristische": solche lassen sich in jeder Klasse finden. Die erste Aufgabe ist dann die Aufstellung der Anzahl der „Formenreste" eines gegebenen Genus in Bezug auf einen gegebenen Modul N. Dabei gehen die „Reste" einer Form $f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$ (mod. N) aus dieser hervor, indem die Coefficienten a_{ik} ersetzt werden durch irgend welche, ihnen (mod. N) congruente Zahlen.

Die Anzahl dieser Formenreste ist ein Divisor der Formenanzahl des Genus (und man erhält so für variirende N alle wesentlichen Divisoren der Art). Die skizzirte Aufgabe wird nach bekanntem Verfahren gelöst durch Ausübung eines vollen Systems lauter incongruenter Substitutionen T von einer Determinante $\equiv 1$ (mod. N) auf die Form f, und kommt zurück auf die Eruirung der Anzahl $f(N)$ derjenigen T, sie mögen τ heissen, welche auf den „Rest" f (mod. N) ohne Wirkung bleiben, und diese Aufgabe wiederum auf die einfachere der Bestimmung von $f(p^\nu)$ resp. $f(p)$, wenn p^ν eine in N aufgehende Primzahlpotenz ist. Dabei darf man annehmen, dass die Coefficienten a_{ik} nicht sämtlich den Factor p haben. Der Fall $p = 2$ wird für sich behandelt. Die Einführung gewisser, von Jordan studirter Congruenzsätze ermöglicht in allen Fällen die Lösung. Für $p = 2$ gelingt die Zurückführung der Grössen $f(2^\nu)$ für Reste von n Variabeln auf entsprechende Grössen für Reste von weniger als n Variabeln. Der vollständige Ausdruck der Grösse $f(2)$ lässt sich hinschreiben. Ebenso der Ausdruck für die Grössen $f(p)$ in seiner Abhängigkeit von den Charakteren des Genus.

Diese Entwicklungen ergeben als Wert für die Formenanzahl eines Genus: „$M\Omega$", wo M (das „Mass" des Genus), ab-

gesehen von einem geschlossenen Invarianten-Factor, das über alle Primzahlen erstreckte Product ist:

$$\frac{1}{f(2)}\cdot\frac{1}{f(3)}\cdot\frac{1}{f(5)}\cdots\frac{1}{f(p)}\cdots$$

und Ω eine positive unendliche Grösse, die nur von n und J und von der Anzahl der Darstellungen der Zahl Null durch die Formen des Genus abhängt.

Es war dies Resultat ein mehr auf Grund der angedeuteten Congruenzsätze erratenes: der zweite Teil der Arbeit giebt, für (positive) definite Genera, den strengen Nachweis, der eine Art Combination des Verfahrens „von n auf $n+1$“ mit der berühmten Dirichlet'schen Grenzmethode der arithmetischen Progressionen darstellt.

Ein Teil der entwickelten Formeln war bereits früher von St. Smith aufgestellt, wenn auch in einer Form, die die Beziehungen zu den Invarianten des Genus nicht so durchsichtig macht.

Zum Schluss wird auf den Zusammenhang der oben gegebenen Massdarstellung mit gewissen, allgemeinen, von Jordan untersuchten Gruppenbildungen aufmerksam gemacht. Der Beweis für indefinite Genera soll in einer weiteren Abhandlung folgen. My.

H. Poincaré. Sur la représentation des nombres par les formes. S. M. F. Bull. XIII. 162-194.

Das Problem der Darstellung einer ganzen Zahl durch ein binäres homogenes Polynom wird hier auf die Theorie der Dedekind'schen Ideale basirt. Zunächst wird gezeigt, dass es immer erlaubt ist, den ersten Coefficienten des gegebenen Polynoms gleich Eins anzunehmen. Ist m eine gegebene ganze Zahl, so sollen für x, y solche ganzzahligen Werte bestimmt werden, dass:

$$\begin{aligned} m &= x^n+A_{n-1}x^{n-1}y+\cdots+A_1xy^{n-1}+A_0y^n = \Phi \\ &= (x+\alpha_1y)(x+\alpha_2y)\ldots(x+\alpha_ny) \\ &= \text{Norm}(x+\alpha_1y), \end{aligned}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln des Polynoms Φ seien.

Das Problem wird verallgemeinert aufgefasst, in dem Sinne, dass für $x+\alpha_1 y$ irgend eine Zahl des zur Gleichung $\Phi=0$ gehörigen „Körpers“ Ω, nämlich eine Zahl von der Form (mit ganzen, rationalen Coefficienten)

$$x = x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \cdots + \alpha_1^{n-1} x_{n-1}$$

substituirt wird. Unter den Lösungen dieser Aufgabe hat man nachträglich alle die wegzulassen, für welche die ganzen Zahlen $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ nicht verschwinden.

Unter allen Idealen (des Körpers Ω) mit der Norm m befindet sich auch dasjenige Hauptideal, das aus dem System der Zahlen

$$x(n_0 + n_1\alpha_1 + \cdots + n_{n-1}\alpha_1^{n-1})$$

(wo die n unbestimmte ganze Zahlen sind) gebildet wird. Man suche daher sämtliche Hauptideale von der Norm m und bringe sie auf die letzterwähnte Form, so hat man die gewünschten Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Dies führt, ganz wie bei den quadratischen Formen, auf die beiden Aequivalenzprobleme: Erstens zu erkennen, wann zwei Polynome mit μ Variabeln, die innerhalb des Körpers Ω in Linearfactoren zerlegbar sind, äquivalent sind, und, wenn dies der Fall, die ganzzahligen Substitutionen anzugeben, welche eine Form in die andere überführen. Da diese beiden Probleme als von Hermite gelöst anzusehen sind, so beschränkt sich der Herr Verfasser auf die Erledigung des ersterwähnten Problems, alle Ideale von gegebener Norm und unter ihnen die Hauptideale zu ermitteln. Dies geschieht durch die Einteilung der Ideale in gewisse Gattungen („einfache“, „primitive“ Ideale), und ihre Zurückführung auf gewisse kanonische Formen.

Setzt sich nämlich das Ideal aus n Zahlen von der Form:

$$x^{(k)} = x_0^{(k)} + \alpha_1 x_1^{(k)} + \alpha_1^2 x_2^{(k)} + \cdots + \alpha_1^{n-1} x_{n-1}^{(k)}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

linear und ganzzahlig zusammen, so kann man es stets erreichen, dass ein Teil der Darstellungscoefficienten $x_i^{(k)}$ verschwindet, während zwischen den übrigen einfache Teilbarkeitsbeziehungen bestehen.

Endlich hat man, gemäss der Zerlegung der Zahl m in Potenzen von Primfactoren, Kriterien dafür zu gewinnen, wann ein in „einfacher“ oder „primitiver“ Gestalt vorgelegtes Ideal ein Primideal, resp. die Potenz eines solchen ist.

Bei der Ausführung der erwähnten Operationen ergiebt sich, dass man zur wirklichen Darstellung der unbekannten Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ der Kenntnis einer Wurzel der Congruenz:

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \cdots + A_0 \equiv 0 \pmod{m}$$

bedarf.

Zum Schlusse wird erläutert, wie man im stande ist, die Anzahl der bei diesem Verfahren verwandten „überflüssigen“ Processe (z. B. der Bestimmung der Zahlen $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$) möglichst herabzudrücken. My.

L. Gegenbauer. Ueber die Darstellung der ganzen Zahlen durch binäre quadratische Formen mit negativer Determinante. Wien Ber. XCII. 380-403.

L. Gegenbauer. Ueber die mittlere Anzahl der Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. Wien Ber. XCII. 1307-1316.

Der Verfasser setzt hier frühere Untersuchungen fort.

Die Form habe positive äussere und negative mittlere Coefficienten. Für die mittlere Anzahl derjenigen Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine solche Form (wenn überdies keine der beiden Variabeln negativ ist) hatte Herr Cesàro einige Theoreme mitgeteilt, für die hier einfache Beweise gegeben werden.

Es werden sodann neue Gesetze eruirt, denen diese mittlere Anzahl unterliegt. So z. B. treten bei den verschiedenen Darstellungen einer Zahl durch eine Form mit verschwindenden mittleren Coefficienten als Variable der Form jene Zahlen häufiger auf, welche eine geringe Anzahl von Divisoren besitzen; desgleichen solche, welche zu einer geringen Anzahl von Zahlen, die sie nicht übertreffen, relativ prim sind.

Als specielle Corollare dieser Eigenschaften fliessen Sätze

wie: „Die Summe derjenigen reciproken Potenzen der Zahl k, deren Exponenten die Divisoren einer ganzen Zahl sind, beträgt im Mittel:

$$\log \frac{k}{k-1} \text{“}.$$

In der zweiten Note werden die bekannten Kronecker'schen Klassenanzahlrelationen nach dem Vorgange von Hermite so umgeformt, dass unmittelbar einfache Sätze über die mittlere Anzahl jener Klassenanzahlen hervorgehen. So z. B. „Jede ganze Zahl n lässt sich im Mittel auf $\frac{\pi}{4}\sqrt{n}$ verschiedene Arten als Summe von drei Quadraten darstellen“.

Daran schliessen sich gewisse asymptotische Gesetze für jene Klassenanzahlen von der Art:

„Diejenigen binären quadratischen Formen der Determinante $-(4n+2)$, in welchen wenigstens einer der beiden äusseren Coefficienten ungerade ist, zerfallen im Mittel in $\frac{\pi}{2}\sqrt{n}$ Klassen.“

Ein näheres Eingehen auf die Beweismittel des Verfassers scheint bei der Complication der Zeichensprache unthunlich.

My.

E. Bonsdorff. Bestimmung von reducirten Systemen ternärer Formen. Helsingfors, Vetensk soc., Acta XIV. 397-412.

Enthält erstens eine elementare Herleitung der Gordan'schen Sätze über Normalformen, dann eine Bestimmung der eigentlich reducirten Systeme ternärer Formen in den einfachsten Fällen, schliesslich einige Bemerkungen über Connexe in der Ebene.

E.

A. Meyer. Ueber die Klassenanzahl derjenigen ternären quadratischen Formen, durch welche die Null rational darstellbar ist. Kronecker J. XCVIII. 177-231.

Die von Gauss und Eisenstein begründete Theorie der ter-

nären quadratischen Formen erfährt hier für den Fall, dass die bez. Formen durch den Wert Null (mittels ganzzahliger Werte der Variabeln) darstellbar sind, eine eingehende Untersuchung, welche die Einteilung dieser „Null-Formen" in Geschlechter und Klassen, sowie die Herleitung der zu jedem Geschlecht gehörigen Klassenanzahl mit umfasst.

Die Arbeit zerfällt in drei Abschnitte.

Im ersten werden die von Smith ohne Beweis angegebenen Kriterien für eine „Nullform" nachgewiesen.

Sei vorgelegt die primitive, indefinite Form

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xy + 2b''xy = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

mit der positiven Determinante D. Zu dieser gehört die adjungirte Form ΩF mit den Coefficienten $b^2 - a'a''$ etc. (wo Ω deren grössten gemeinsamen Teiler bedeutet) mit der Determinante D^2.

Wird $\frac{D}{\Omega^2}$ gleich Δ gesetzt, so ist die Determinante der „primitiven Adjungirten" F gleich $\Omega\Delta^2$.

Dann sind Ω und Δ die Invarianten von f. Die Gauss'schen „quadratischen Charaktere" F von f, bez. der Primfactoren von Ω, Δ begründen die Einteilung der Formen f in Geschlechter.

Es zeigt sich nun, dass die Darstellbarkeit der Null durch eine indefinite ternäre quadratische Form nur von diesen quadratischen Charakteren abhängt: daher sind entweder alle Formen eines Geschlechtes durch Null darstellbar, daher die Bezeichnung Nullgeschlecht, oder keine.

Der Beweis wird durch successive Transformation der Form f (mittels Substitutionen der Determinante 1) in einfachere geleistet. Man gelangt so zu „typischen" Darstellungen von f, in denen ausser der Null und. von den Invarianten Ω, Δ abhängigen Zahlen nur eine, auf ein gewisses Intervall beschränkte variable Zahl r figurirt. Solche Formen $f(r)$ heissen „reducirt".

Es bleibt nunmehr noch, wie bei den binären Formen, die Frage zu erledigen, wann zwei reducirte Formen $f(r), f(r')$ äquivalent sind. Dies geschieht durch ausführliche Discussion der

zu dem Zweck nach ganzen Zahlen aufzulösenden sechs Transformationsgleichungen. Das Resultat ist, dass eine gewisse binäre Form existiren muss, deren Charaktere bez. des grössten gemeinschaftlichen Teilers θ von Ω und Δ vorgegebene Zahlen sein müssen. Nachdem so ein vollständiges und einfaches Kriterium der Acquivalenz der Nullformen, und damit des „Nullgeschlechts" ermittelt ist, lassen sich die zu einem solchen gehörigen reducirten Formen leicht in Klassen anordnen.

Im zweiten Abschnitt wird die von Gauss vorbereitete Aufgabe in Angriff genommen, eine ternäre Nullform mit den Invarianten Ω, Δ durch eine binäre Form mit der Determinante ΩM (wo M eine beliebige ganze Zahl) darzustellen. (Als Specialfall ist hierin die Darstellung einer Zahl durch die ternäre Form inbegriffen).

Hierzu sind drei gewisse Congruenzen zweiten Grades simultan zu erfüllen. Sie lehren, dass sich die Geschlechter der beiden Formen gegenseitig vollständig bestimmen.

Bei der Durchführung der Aufgabe beschränkt sich der Verfasser der Einfachheit halber auf den Fall, wo M keinen quadratischen Factor enthält. Die explicite Herstellung aller durch eine gegebene ternäre Nullform der Invarianten Ω, Δ darstellbaren binären Formen φ von gegebener Determinante ΩM wird geleistet unter der Voraussetzung, dass die Zahlen $\frac{\Omega}{\theta}$ und θ relativ prim sind.

Im dritten Abschnitt wird die Klassenanzahl für irgend ein ternäres Nullgeschlecht mit ungeraden positiven Invarianten Ω, Δ ermittelt. Nach dem Vorgange von Eisenstein führt man die Aufgabe zurück auf die entsprechende für die Invarianten Ω, Δp^2, wo p eine ungerade Primzahl bedeutet.

Dies Verfahren wird successive wiederholt; dann geben die Resultate des ersten Abschnitts die Lösung des Problems an die Hand. Bei festgehaltenem p kommen nur zwei Gattungen von Formen φ, sie werden mit φ und ψ bezeichnet, in Betracht.

Die Gesamtheit dieser Formen φ und ψ gehört nur einem Geschlecht oder zwei Geschlechtern an, je nachdem Δ durch p

teilbar ist oder nicht. Damit reducirt sich die Frage auf die der Aequivalenz der Formen φ unter sich, der Formen ψ unter sich, und endlich der Formen φ mit Formen ψ. Die bezüglichen Transformationsgleichungen werden erschöpfend discutirt. Dies führt zu dem Hauptsatze: „In jedem Geschlecht quadratischer Nullformen von ungerader Determinante ist die Klassenanzahl eine (angebbare) Potenz von Zwei."

Der Ausdruck dieser Klassenanzahl wird am Schlusse in verschiedene elegante Formen gekleidet. My.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

Ch. Hermite. Sur la théorie des fractions continues. Darb Bull (2) IX. 11-13.

Eine positive Wurzel a der Gleichung

$$(x-a)(x-b) \equiv x^2 + \frac{2B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

sei nach Lagrange's Methode in einen Kettenbruch entwickelt, und es seien $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte dieses Kettenbruchs. Unter λ den entsprechenden Partialnenner verstanden, ist dann

$$a = \frac{P'\lambda + P}{Q'\lambda + Q},$$

und zugleich gilt die neue Gleichung

$$(P'\lambda + P)^2 + \frac{2B}{A}(P'\lambda + P)(Q'\lambda + Q) + \frac{C}{A}(Q'\lambda + Q)^2 = 0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$\lambda^2 + \frac{2H}{G}\lambda + \frac{K}{G} = 0,$$

so ist die Discriminante

$$B^2 - GK = B^2 - AC.$$

Mittels dieser Identität lässt sich nun zeigen, dass dem λ von oben stets wieder eine in gleichen Zwischenräumen aufeinanderfolgende unendliche Reihe ebensolcher Werte λ entspricht, d. h. der Kettenbruch muss ein periodischer sein. Auch ein von Galois in tome XIX der Annalen von Gergonne aufgestellter Lehrsatz über periodische Kettenbrüche wird jetzt leicht beweisbar.

Gr.

A. A. Markoff. Ueber einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche. St.-Petersb. (Russisch.)

A. A. Markoff. Beweis einiger Ungleichheiten von P. L. Tschebyscheff. Chark. Ges. 1883. 100-114. (Russisch.)

A. A. Markoff. Die Bestimmung des Maximums und Minimums einer Grösse. Chark. Ges. 1882. 95-104. (Russisch.)

Die erste umfangreiche Abhandlung des Herrn Markoff ist in drei Capitel geteilt. Im ersten Capitel stellt der Verfasser die Eigenschaften derjenigen Kettenbrüche zusammen, die bei der Entwickelung des Integrals

$$\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y}$$

oder der Summe $\sum \frac{m_k}{z-y_k}$ entstehen. Diese Eigenschaften sind besonders merkwürdig, wenn alle y_k reell und alle m_k positiv sind, oder wenn y nur reelle Werte annimmt und $f(y)$ zwischen den Integrationsgrenzen positiv bleibt. Wenn man bei diesen Voraussetzungen durch $\psi_n(z)$ den Nenner und durch $\varphi_n(z)$ den Zähler des n^{ten} Näherungsbruches bezeichnet, so kann z. B. jede Function $\Omega(z)$ n^{ten} Grades von z in der Form

$$K_0 + K_1\psi_1(z) + \cdots + K_n\psi_n(z),$$

wo $K_0, K_1, \ldots, K_n$ Constante sind, dargestellt werden. Die

Werte der Coefficienten K sind schon früher von Herrn Tschebyscheff gegeben. Aus dieser Darstellung der Function $\Omega(z)$ ergiebt sich die Auflösung zweier wichtigen Fragen: 1) der Frage der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate, d. h. der Aufgabe, die Function $\Omega(z)$ n^{ten} Grades so zu wählen, dass der Ausdruck $\sum m_k[\Omega(y_k)-a_k]^2$ oder

$$\int_a^b f(y)[\Omega(y)-\Omega_0(y)]^2 dy$$

ein Minimum wird. (Hier sind $a_1, a_2, \ldots$ gegebene Zahlen und $\Omega_0(y)$ eine gegebene Function von y). Und 2) der Frage nach der angenäherten Berechnung der Integrale.

Das zweite Capitel ist grösstenteils dem Beweis und der Verallgemeinerung der merkwürdigen Ungleichheiten gewidmet, welche von Herrn Tschebyscheff in seiner Abhandlung: „Sur les valeurs limites des intégrales" (Journ. de Liouv. 1874. Siehe F. d. M. VI. 1874. S. 180) gegeben sind. Angenommen es sei

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{z-x}$$

in einen Kettenbruch entwickelt, $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ einer aus der Reihe der Näherungsbrüche und

$$z_1, \ldots, z_e,\ z_{e+1}, \ldots, z_{\epsilon}, \ldots, z_n$$

die nach der Grösse geordneten Wurzeln der Gleichung

$$\psi(z)=0,$$

so ist der Wert von

$$\int_{z_e}^{z_n} f(x)dx$$

enthalten zwischen

$$\sum_{k=e+1}^{k=n-1} \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=e}^{k=n} \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)},$$

d. i. grösser als erstere, kleiner als letztere Grösse.

Diese Ungleichheiten sind zum ersten Male von Herrn Markoff bewiesen und verallgemeinert worden, indem er analoge Ungleichheiten für das Integral $\int_a^b \Omega(z)f(z)dz$ giebt, wo $\Omega(z)$

jede Function sein kann, für welche eine der Derivirten zwischen den Grenzen a und b positiv bleibt. Die Ungleichheiten von den Herren Tschebyscheff und Markoff können selbstverständlich zur angenäherten Berechnung der Integrale dienen; zu diesem Ziele führt auch das folgende Theorem von Herrn Markoff, welches den Rest in der Gauss'schen Annäherungsformel giebt: „Es sei $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ der n^{te} Näherungsbruch des in einen Kettenbruch entwickelten Integrals

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z-x};$$

dann ist die Differenz zwischen dem Integral

$$\int_a^b \Omega(y) f(y)\,dy$$

und der Summe

$$\Sigma\,\Omega(x_i)\,\frac{\varphi(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

zwischen den Grenzen

$$\frac{J}{1.2\ldots 2n}\int_a^b \left\{\frac{\psi(y)}{A}\right\}^2 f(y)\,dy \quad \text{und} \quad \frac{J'}{1.2\ldots 2n}\int_a^b \left\{\frac{\psi(y)}{A}\right\}^2 f(y)\,dy$$

enthalten. J und J' sind zwei Grössen, zwischen denen die $(2n-1)^{te}$ Derivirte von $\Omega(z)$ immer positiv bleibt".

Im dritten Capitel werden die Resultate der zwei ersten auf die Lösung einer Frage angewandt, die gleichfalls von Herrn Tschebyscheff in der erwähnten Abhandlung aufgestellt ist. Diese Frage in ihrer allgemeinen Form kann in folgender Weise formulirt werden. Es seien gegeben $n+1$ Integrale

$$\int_a^b f(y)\,dy, \quad \int_a^b y f(y)\,dy, \ldots, \quad \int_a^b y^n f(y)\,dy,$$

wo $f(y)$ eine beliebige Function, die immer positiv zwischen den Grenzen a und b bleibt; es wird verlangt, die höchste und niedrigste Grenze der Werte der Integrale

$$\int_a^x \Omega(y) f(y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_x^b \Omega(y) f(y)\,dy$$

zu bestimmen.

Im Falle $n = 2$, $\Omega(y) = 1$ kann die Frage, wie es von Tschebyscheff geschehen, geometrisch-mechanisch in folgender Weise gedeutet werden. Es sei AB eine gerade Linie, auf welcher in einer unbekannten Weise eine Masse verteilt ist; bekannt ist die ganze Masse, der Schwerpunkt dieser Masse und ihr Trägheitsmoment in Bezug auf diesen Schwerpunkt. Es wird verlangt, die höchste und die niedrigste Grenze für die Masse zu ermitteln, welche bei diesen Voraussetzungen auf eine bestimmte Strecke der Linie AB kommen kann. Tschebyscheff hat nur das Resultat angegeben. Die Untersuchungen Markoff's liefern unter anderem den Beweis dieses Resultates.

In zwei anderen Abhandlungen werden specielle Resultate der grossen Arbeit des Verfassers mitgeteilt: in der ersten der Beweis der Ungleichheiten Tschebyscheff's, in der zweiten die Lösung der soeben erwähnten geometrisch-mechanischen Aufgabe.

Wi.

A. A. Markoff. Der Beweis der Convergenz mehrerer Kettenbrüche. Chark. Ges. 29-33. (Russisch.)

Der Zweck dieser Note ist, die Convergenz des Kettenbruchs

$$\cfrac{C_1}{p_1 - \cfrac{C_2}{p_2 - \cfrac{C_3}{p_3 - \cdots}}}$$

ausserhalb der Integrationsgrenzen zu beweisen, wenn dieser Kettenbruch für das bestimmte Integral $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{z - x} dx$ erhalten wird.

Wi.

C. Posse. Zur Frage von den Grenzwerten der Integrale oder der Summen. Chark. Ges. 35-58. (Russisch.)

Enthält die Vereinfachung der Beweise und die Ergänzung der Resultate, welche Markoff im dritten Capitel seines Werkes: „Ueber einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche" in Bezug auf die Tschebyscheff'sche Aufgabe von der höchsten

und niedrigsten Grenze des Integrals $\int_a^x f(y)\,dy$ auseinandergesetzt hatte. Da die Abhandlung des Herrn Posse später auch in seinem umfangreicheren Werke: „Sur quelques applications des fractions continues algébriques. St. Pét. 1886" publicirt ist, so wird darüber zugleich mit dem Werke selbst im folgenden Bande des Jahrbuchs über die F. d. M. referirt werden. Wt.

P. L. Tschebyscheff. Ueber die Darstellung der Grenzwerte der Integrale mit Hülfe der Residuen. Peterb. Abh. Beilage zu Bd. LI. No. 4. 1-25. (Russisch.)

In dieser Abhandlung stellt der Verfasser seine im Jahre 1874 gegebenen Theoreme über die Grenzwerte des Integrals in folgender Weise dar (für die Bezeichnungen und die Bedingungen siehe das vorhergehende Referat über die Arbeiten Markoff's):

$$\int_{z_\nu}^{z_\mu} f(x)dx \geqq \sum_{z_\nu+\omega}^{z_\mu-\omega} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)} \quad \text{und} \quad \leqq \sum_{z_\nu-\omega}^{z_\mu+\omega} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}.$$

Hiernach zeigt er, dass diese Ungleichheiten eine Folge der anderen allgemeineren Formeln sind, welche die Grenzwerte des Integrals $\int_a^{z_\nu} f(x)dx$ geben, nämlich der Formeln:

$$\int_a^{z_\nu} f(x)dx \geqq \sum_{a}^{z_\nu+\omega} \mathfrak{F}(z), \quad \int_a^{z_\nu} f(x)dx \leqq \sum_{a}^{z_\nu-\omega} \mathfrak{F}(z).$$

$\mathfrak{F}(z)$ ist ein rationaler Bruch, welcher von der Anzahl der gegebenen Integrale $\int_a^{z_\nu} f(x)dx$, $\int_a^{z_\nu} xf(x)dx, \dots$ und ihrer Grösse abhängt. Es ist nämlich $\mathfrak{F}(z)$ gleich

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \dots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n - \cfrac{1}{Z}}}},$$

wo Z verschiedene Werte hat, je nachdem die Anzahl der gegebenen Integrale gerade oder ungerade ist. Der Beweis dieser allgemeinen Formeln ist nicht gegeben. Am Ende der Abhand-

lung wendet der Verfasser die gegebenen Formeln auf die Lösung der schon im vorhergehenden Referate erwähnten geometrisch-mechanischen Aufgabe an und beweist die früher in Liouville J. ohne Beweis gegebenen Resultate. Wi.

Th. Muir. The researches of M. E. de Jonquières on periodic continued fractions. Edinb. Proc. XII 389-400.

Der Verfasser lenkt die Aufmerksamkeit auf ein allgemeines Theorem über Kettenbrüche, das er im Jahre 1873 in seiner ersten Mitteilung an die Royal Society von Edinburgh (Proc. VIII. 234) gegeben hat, und welches sowohl viele von den Sätzen in sich schliesst, die Hr. de Jonquières neuerdings in den Comptes Rendus veröffentlicht hat, als auch Resultate der Herren Sturm, Hoffmann und Catalan. Cly. (Lp.)

Th. Muir. On the phenomenon of „greatest middle“ in the cycle of class of periodic continued fractions. Edinb. Proc. XII 578-592.

Ist A^2 das grösste Quadrat in einer ganzen Zahl $H = A^2 + D$, so kann bekanntlich in der Entwicklung von $\sqrt{H}$ in die Form eines Kettenbruchs innerhalb des symmetrischen Teils des Cyklus kein Element grösser als A sein, und ein dem A gleiches Element kann nur in der Mitte des Cyklus vorkommen. Die Abhandlung enthält Sätze in Beziehung auf solche Cyklen, die der Verfasser „kulminirende Cyklen“ nennt. Cly. (Lp.)

Halphen. Sur la convergence d'une fraction continue algébrique. C. R. C 1451-1454.

Siehe Abschn. VII. Cap. 1.

Obrastzoff. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Darb. Bull. (2) IX 132-135.

Siehe Abschn. VI. Cap. 3.

E. Laguerre. Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels. Jordan J. (4) I. 135-165.

Siehe Abschn. VI. Cap. 5.

E. Sang. On the approximation to the roots of cubic equations by the help of recurring chain fractions. Edinb. Trans XXXII. 311-326; Edinb Proc XII 387-388.

Die Arbeit bezieht sich auf eine frühere Abhandlung in den Edinb. Trans. XXIX. Der grundlegende Satz ist der folgende: Es werde eine Zahlenreihe $A, B, C, D, E, \ldots$ vermittelst der drei Multiplicatoren p, q, r aus den drei ersten A, B, C von ihnen nach dem Schema gebildet:

$$\begin{aligned} rA+qB+pC &= D, \\ rB+qC+pD &= E, \\ rC+qD+pE &= F, \\ \cdots\cdots &\cdot; \end{aligned}$$

ist ferner die Zahl p grösser als jede der beiden anderen q und r, so werden die Glieder sich einer fortlaufenden Proportion annähern und ihr endliches Verhältnis wird die positive Wurzel der Gleichung $x^3-px^2-qx-r=0$, unabhängig von den angenommenen Anfangsgliedern A, B, C. Das Verfahren ist indes nur auf Gleichungen mit passenden Coefficienten direct anwendbar. Zahlenbeispiele sind beigegeben. (Man vergleiche C. G. J. Jacobi, Borchardt J. LXIX. 29-64). Cly. (Lp.)

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

G. Poncini. Elementi sul calcolo delle probabilità. Milano. Hoepli.

Das vorliegende Buch enthält, wie der Verfasser sagt, „die Lehre der Wahrscheinlichkeit, insofern sie als das Verhältnis der (endlichen) Anzahl der günstigen Fälle zur (ebenfalls endlichen) Anzahl der überhaupt möglichen betrachtet wird.“ Es wird also vorzüglich auf die Theorie der Zufalls-Spiele Acht gegeben; die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf die Sterblichkeitsfragen wird aber auch besprochen. Der mathematische Teil der Untersuchung ist ganz sorgfältig behandelt; was aber den logischen Teil betrifft, so leidet er an denselben Unvollkommenheiten, die den meisten Lehrbüchern von gleichem Inhalte gemeinsam sind, und auf welche Herr Kries in seinem neu erschienenen Werke: Die Principien der Wahrscheinlichkeits-Rechnung (Freiburg, Mohr 1886) ausführlich hingedeutet hat. Vi.

P. Boschi. Sopra il numero delle combinazioni di classe data aventi una somma data. Bologna Mem. (4) V. 805-818.

Bedeuten $S_{n,r}$, $T_{n,r,n}$ die Anzahlen derjenigen Combinationen von je r verschiedenen Elementen der unbegrenzten Reihe 1, 2,

3, ..., bezw. der begrenzten Reihe 1, 2, 3, ..., n, deren Gliedersumme u ist, und bezeichnet man durch a_d den kleinsten nicht negativen Rest der Division $a:d$, so erhält man erstens die recurrirende Formel:

$$S_{u,r} = \sum_{z=1}^{z=\frac{u-u_r}{r}} S_{u-rz,r-1} + S_{u_r,r},$$

wo $S_{v,r} = 0$ für $0 < v < \frac{r(r+1)}{2}$, und $S_{0,r} = (-1)^{r-1}$;

zweitens die Formel:

$$T_{u,r,n} = S_{u,r} - \sum_{z=1}^{z=u-n-\frac{r(r-1)}{2}} T_{\frac{(r+1)(r-2)}{2}+z,\, r-1,\, u-\frac{r(r-1)}{2}-z}.$$

Diese zwei Formeln werden für $r = 2, 3, 4, 5$ entwickelt.

Druckfehler: Die obere Grenze der Summe an der rechten Seite der Formel (5) muss sein: $n+1-\frac{r(r-1)}{2}-r$; in Formel (22) muss man $3n(n+4)$ statt $3n(n+4)$ setzen.

Vi.

F. Roth. Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis. Hoppe Arch. (2) II. 82-100.

Dies ist die Fortsetzung des Aufsatzes (Hoppe Arch. (1) LXX. 427-435. F. d. M. XVI. 1884. 171) und behandelt die weniger gewöhnlichen Combinationen und Variationen.

H.

W. Gosiewski. Ein leichter Beweis der Umkehrung des Bernoulli'schen Satzes. Krak. Ber. XIII. (Polnisch.)

Der Beweis dieses bekannten Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschieht hier durch eine geschickte Transformation der Formel:

$$P = \frac{\int_{\frac{\alpha}{s}-\varepsilon}^{\frac{\alpha}{s}+\varepsilon} x^\alpha (1-x)^\beta dx}{\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx} \qquad (\beta = s-\alpha),$$

welche die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass die einfache Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses, das in einer Anzahl von s Versuchen α-mal eingetroffen, zwischen den Grenzen $\frac{\alpha}{s} - \varepsilon$ und $\frac{\alpha}{s} + \varepsilon$ eingeschlossen bleibt, so dass

$$\frac{\alpha}{s} - \varepsilon \leqq p \leqq \frac{\alpha}{s} + \varepsilon.$$

Dn.

E. Grohmann. Eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zeitschr. f. Realsch. X. 708-710.

Eine Lotterie enthält die Nummern $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ im ganzen n Nummern. Davon werden r ($< n$) Nummern gezogen. Angenommen, man habe s Gruppen von Nummern besetzt, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine dieser Nummern gezogen werde? Bezeichnet man mit dem Ausdruck $(abc\ldots)_k$ irgend eine Combination k^{ter} Klasse (ohne Wiederholung) der Elemente $a, b, c, \ldots$, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich dem Bruche

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=s} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n-(a+b+c+\cdots)_k}{r-(a+b+c+\cdots)_k}}{\binom{n}{r}}.$$

$\binom{n}{r}$ bedeutet wie gewöhnlich den Numerus Combinationum o. W. von n Elementen zur r^{ten} Klasse.

Gr.

G. K. Gilbert. The problem of the Knight's tour. Wash. Bull. VII. 88.

Eine kurze Note in Betreff des rückkehrenden Rösselsprunges hauptsächlich mit Rücksicht auf symmetrische Rosselsprünge auch auf andern als den gewöhnlichen Schachbrettern. Der Verfasser führt an, dass sich empirisch zeigen lasse, dass das kleinste quadratische Brett, auf welchem der Rösselsprung möglich ist, 36 Felder haben muss, dass auf demselben 21 Fälle mit biradialer Symmetrie möglich seien, von denen 5 Fälle auch quadriradiale Symmetrie zeigen. Ls.

WEILL. Quelques problèmes élémentaires relatifs au jeu de dés. Mathesis V 152-154.

Verschiedene Fälle folgender Aufgabe: Die Wahrscheinlichkeit des einmaligen Zuges des Buchstabens a aus einer Urne, welche A Buchstaben a, B Buchstaben b, ..., L Buchstaben l enthält, wenn man k mal zieht und jedesmal den gezogenen Buchstaben wieder in die Urne legt. Mn. (Lp).

W. J. C. MILLER, D. BIDDLE. Solutions of questions 6413 and 7151. Ed. Times XLIII. 71-75.

Eine Münze wird beliebig auf eine Ebene geworfen, welche durch drei Systeme von parallelen Geraden in gleichseitige Dreiecke geteilt ist. Die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, dass die Münze 1, 2, 3, 4, 5, 6 der Dreiecke teilweise deckt. Der von Herrn Miller behandelte besondere Fall betrifft ein reguläres Sechseck, in welchem die drei Hauptdiagonalen gezogen sind. Lp.

S. TEBAY, D. BIDDLE. Solution of question 5200. Ed. Times XLII. 94-95.

Eine kleine elastische Kugel wird beliebig auf die quadratische Platte eines Tisches gelegt, der einen erhabenen Rand besitzt. Die Kugel wird nach einer beliebigen Richtung gestossen. Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass dieselbe

1) zwei Gegenseiten, 2) zwei anstossende und eine Gegenseite, 3) drei aufeinanderfolgende Seiten, 4) alle vier Seiten der Reihe nach anläuft.

Lp.

E. Lemoine. Divers problèmes de probabilités. Franç. Ass. Congrès de Grenoble.

Es handelt sich um einige Aufgaben der geometrischen Wahrscheinlichkeit, und zwar:

1) Der Umfang eines Dreiecks sei gleich $2p$, x und z seien die grösste und die kleinste Seite, y sei die dritte. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass $xz > y^2$?

2) Es werden 3 Punkte A, B, C willkürlich auf einer Kreisperipherie gewählt; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle drei an derselben Seite eines Diameters liegen?

Die Lösung ist $\frac{1}{4}$, und wird nach zwei Methoden gewonnen.

3) Auf einem Kreisumfang werden 4 Punkte willkürlich gewählt; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht alle an derselben Seite eines Diameters liegen?

Die Lösung ist $\frac{1}{2}$; es werden wieder zwei Methoden angegeben.

4) Die Aufgabe wird auf n Punkte ausgedehnt.

Ohne die Zwischenrechnungen anzuführen giebt der Autor die Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{2^{n-1}-n}{2^{n-1}}$$

und leitet daraus folgenden Satz ab:

Wenn auf einer Curve (geometrisch definirt, oder nicht, geschlossen oder nicht, und von willkürlicher endlicher Länge) n Punkte willkürlich bestimmt werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei auf einander folgende Punkte von einander getrennt sind durch ein Stück der Curve, welches nicht grösser ist als die Hälfte der betrachteten Curve, gleich

$$\frac{2^{n-1}-n}{2^{n-1}}.$$

5) Eine Uhr wird zweimal im Verlauf einer Stunde beobachtet. Welches ist die Wahrscheinlichkeit:

1) dass die Beobachtungen in der ersten halben Stunde stattfinden,

2) dass eine in der ersten halben Stunde, die andere in der zweiten geschieht,

3) dass beide Beobachtungen in der zweiten halben Stunde stattfinden?

Die Wahrscheinlichkeiten sind bezw. $\frac{1}{2}(1-l2)$, $\frac{1}{4}l2$, $\frac{1}{2}$.

6) 1) Man hat 2 Urnen, jede mit n Kugeln, mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz der beiden gezogenen Zahlen grösser ist als p?

2) Die Aufgabe wird auf drei Urnen ausgedehnt; eine jede mit n Kugeln, mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die grösste Differenz zwischen zwei von den drei gezogenen Zahlen die Zahl p übersteigt?

7) Es werden auf einer Linie von gegebener Länge zwei Punkte willkürlich genommen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Entfernung derselben von einander kürzer ist, als eine bestimmte Strecke?

8) Ein Molekül bewegt sich auf einem gegebenen Kreise stets in demselben Sinne. Es werden drei Beobachtungen gemacht, und es wird gefunden, dass das Molekül sich in A, B, C befindet. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass A, B, C ein spitzwinkliges Dreieck bilden, wenn zwischen der ersten und der letzten Beobachtung höchstens p complete Umkreisungen des Moleküls liegen?

Der Verfasser findet die schliessliche Lösung gleich $\frac{1}{4}$, also unabhängig von p. Lz.

G. de Marco. Soluzioni delle quistioni 45 e 50.

Batt. G. XXIII 230-232.

Es werden die folgenden beiden Sätze bewiesen: „Nimmt man ganz willkürlich irgend ein Dreieck, so darf man nicht mehr

als 3 gegen 2 wetten, dass einer seiner Winkel, und nur einer, kleiner als ein gegebener Winkel α sei", und „Das Dreieck mit den Winkeln 35°, 65°, 80° ist das mittlere, der Form nach, von allen schiefwinkligen Dreiecken". M.

G. DE MARCO. Soluzioni delle quistioni 53 e 55. Batt G XXIII 377-379.

Die hier bewiesenen Sätze lauten: „Der 105[te] Teil der Fläche eines Kreises stellt die mittlere Fläche aller Dreiecke dar, deren Umfang gleich dem Radius des Kreises ist", und „Betrachtet man alle Dreiecke von gegebenem Umfang, so verhalten sich die mittleren Längen der kleinsten, mittleren und grössten Seiten wie 7:13:16". M.

W. J. C. MILLER, D. BIDDLE. Solution of a question. Ed. Times XLII 23-24

Eine Diagonale eines regelmässigen $(2n+1)$-Ecks werde beliebig gezogen, danach noch eine. Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Diagonalen innerhalb des Umfangs sich schneiden, ist $\frac{1}{3}n(2n-1)$ dividirt durch $(2n+1)(n-1)-1$, wenn die beiden Diagonalen verschieden sein sollen; dagegen dividirt durch $(2n+1)(n-1)$, wenn die zweite mit der ersten identisch sein darf.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit für das Schneiden zweier beliebiger Sehnen eines Kreises ein Drittel. Lp.

T. R. TERRY, N. SARKAR, D. EDWARDES. Solution of question 7780. Ed. Times XLII. 120

Der mittlere Wert für die vierten Potenzen der Entfernungen aller Punkte innerhalb eines dreiaxigen Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c vom Mittelpunkte desselben ist

$$\tfrac{1}{35}\{(a^2+b^2+c^2)^2+2(a^4+b^4+c^4)\}.$$

Lp.

T. C. Simmons, H. McColl, D. Biddle. Solutions of question 7849. Ed. Times XLII. 106-107.

Fällt man von einem beliebigen Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Lote auf die Seiten, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Lote 1) ein beliebiges Dreieck bilden können, gleich $\frac{1}{4}$, 2) ein spitzwinkliges Dreieck bilden können, gleich $3l2-2$. Lp.

T. C. Simmons, D. Edwardes, Roy. Solution of question 7943. Ed. Times XLIII. 120.

Der mittlere Wert der n^{ten} Potenz des Abstandes zwischen zwei beliebigen Punkten innerhalb eines gegebenen Kreises ist, jenachdem n eine gerade positive Zahl, oder eine ungerade positive Zahl so wie auch -1 ist, bezw.:

$$\frac{2^{n+4}}{n+2}\cdot\frac{1.3.5\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots(n+4)}\,r^n,\qquad \frac{2^{n+5}}{\pi(n+2)(n+3)}\,\frac{2.4.6\ldots(n+3)}{1.3.5\ldots(n+4)}\,r^n.$$

Lp.

M. Petitcol. Loi de probabilité des écarts. Nouv. Ann. (3) IV. 441-448.

Der Verfasser will das Fehlergesetz aus einem speciellen Beispiel ableiten, ohne irgend eine Voraussetzung oder Hypothese über das Fehlergesetz zu Grunde zu legen, und will das Resultat sodann verallgemeinern.

Er wählt dazu das bekannte Spiel des Aufwerfens von m Münzen (m soll eine gerade Zahl sein) und untersucht, wie viel Münzen Kopf, und wie viel Wappen zeigen. Als Fehler betrachtet er die Abweichung von $\frac{m}{2}$, und giebt eine graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Fehler. Er berechnet sodann den mittleren Fehler aus der Summe der Producte jedes einzelnen Fehlers multiplicirt mit seiner Wahrscheinlichkeit, wobei alle Fehler als positiv angesehen werden. Diese mittlere Abweichung, γ_m genannt, wird auf die Form gebracht

$$\gamma_m = \frac{1.3.5.7...(m-1)}{2.2.4.6...(m-2)};$$

dieselbe wächst also mit m gegen ∞, ebenso wie die grösstmögliche Abweichung $\frac{m}{2}$, dagegen wird das Verhältnis der mittleren Abweichung zu der grösstmöglichen:

$$K_m = \frac{\gamma_m}{\frac{m}{2}} = \frac{1.3.5...(m-1)}{2.4.6...m}.$$

Dies Verhältnis bewegt sich in den Grenzen $\frac{1}{2}$ bis 0, während m von 2 bis ∞ wächst.

Nun meint der Verfasser dieses Ergebnis auch auf andere Beobachtungen ohne weiteres übertragen zu dürfen; als Beispiel nennt er das Gesetz der Verteilung der Abweichungen im Treffen bei dem wiederholten Abfeuern einer Kanone unter constantem Winkel. Aus den verschiedenen Messungen bestimmt er die mittlere und die grösste Abweichung, und das Verhältnis dieser beiden Grössen betrachtet er als gleichbedeutend mit dem vorhin bei dem Aufwerfen der Münzen gefundenen K_m, so dass sich m leicht bestimmen lässt. Er nimmt an, dass die Abweichungen bei dem Abfeuern der Kanone unter constantem Winkel sich ebenso verteilen, wie bei dem Aufwerfen der m Münzen.

Dass wir dieser Schlussfolgerung nicht zustimmen können, dürfte nach dem Vorbemerkten einer weitern Ausführung nicht bedürfen, und wir werden uns auch nicht darüber wundern dürfen, dass der Verfasser sich schliesslich gegen das Fehlergesetz

$$y = c^2 e^{-a^2 x^2}$$

wendet und dasselbe für unzulässig erklärt. Ls.

P. Mansion. Note sur la méthode des [illegible]

Belg. Bull. (3) IX. 9-14.

Wenn man auf die Gleichungen

$$(1)\quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = h \qquad (\text{[illegible]}$$

die Methode der kleinsten Quadrate anwendet, so findet man n Normalgleichungen:

$$(2)\quad A_{1j}X_1 + A_{2j}X_2 + \cdots + A_{nj}X_n = B_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Statt der n Gleichungen (2) kann man die $m+n$ Gleichungen nehmen:

$$(3)\quad \begin{cases} a_{1i}X_1 + a_{2i}X_2 + \cdots + a_{ni}X_n = h_i + \xi_i, \\ a_{j1}\xi_1 + a_{j2}\xi_2 + \cdots + a_{jm}\xi_m = 0 \end{cases}$$

Vermittelst des dem Systeme (2) äquivalenten Hülfssystems (3) beweist man leicht folgenden Satz: „Wenn man nach der Determinantentheorie auf alle möglichen Arten zwischen den Gleichungen (1) p Unbekannte eliminirt, so führt das aus den neuen Gleichungen durch die Methode der kleinsten Quadrate hergeleitete Normalsystem für die $n-p$ verbleibenden Unbekannten zu denselben Werten wie das Normalsystem (2) der ursprünglichen Gleichungen". Dieser Satz ist gleichzeitig die Verallgemeinerung desjenigen, mit welchem Jacobi seine Determinantentheorie schliesst, und desjenigen, welchen Herr Catalan im ersten Paragraphen seiner „Bemerkungen über die Theorie der kleinsten Quadrate" beweist. (F. d. M. X. 1878. 160).

Mn. (Lp.)

F. H. van Kooten. De middelbare fout in waarnemingen ter bepaling van meer dan eene onbekende. Nieuw Arch XII. 94-108.

Ein Beitrag zu der Theorie des mittleren Fehlers bei Beobachtungen zur Bestimmung von mehr als einer Unbekannten. Die Untersuchung schliesst sich an die von Landré (F. d. M. XV. 1883. 163) an und stützt sich auf die Grundformeln von Gauss. G.

P. A. Nekrassoff. Die Bestimmung der Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate bei einer sehr grossen Anzahl der Unbekannten. Mosk. math. Samml. XII. 189-204.

Herr Seidel hat in seiner Abhandlung: „Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen“ (Abhandl. der K. bayer. Akad. d. Wis. 1874 Bd. XIII., F. d. M. VI. 1874. 147) ein Verfahren angegeben, die linearen Gleichungen durch successive Annäherung aufzulösen. Um aber über die Schnelligkeit der Annäherung urteilen zu können, ist es notwendig die allgemeinen Ausdrücke der Fehler der successiven Annäherung zu haben. Diese allgemeinen Ausdrücke sind zum ersten Mal von Herrn Nekrassoff gegeben. Zu diesem Zwecke wird ein System simultaner Differenzengleichungen, deren Integrale diese Ausdrücke geben, aufgestellt und mit Hülfe dieser Ausdrücke die Möglichkeit gezeigt, a priori über die Schnelligkeit des Seidel'schen Verfahrens zu urteilen. Am Ende betrachtet der Verfasser die Schnelligkeit der Annäherung im Seidel'schen Verfahren bei der vorteilhaftesten Auswahl der Folge der Unbekannten. Wi.

P. A. Nekrassoff. Die cyklischen Gleichungen, ihr Zusammenhang mit der Methode der kleinsten Quadrate und ihre Anwendung auf die Astronomie. Mosk. math. Samml. XII. 377-420.

Cyklisches System linearer Gleichungen heisst ein System von Gleichungen folgender Form:

$$1)\quad \begin{cases} p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_{n-2} x_{n-2} + p_{n-1} x_{n-1} = A_0, \\ p_{n-1} x_0 + p_0 x_1 + p_1 x_2 + \cdots + p_{n-3} x_{n-2} + p_{n-2} x_{n-1} = A_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 x_0 + p_2 x_1 + p_3 x_2 + \cdots + p_{n-1} x_{n-2} + p_0 x_{n-1} = A_{n-1} \end{cases}$$

Mit Hülfe der Eigenschaften der primitiven Wurz[eln der] Gleichung $x^n = 1$ bekommt man für $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ f[olgende] Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x_0 &= A_0 \delta_0 + A_1 \delta_1 + \cdots + A_{n-1} \delta_{n-1}, \\ x_1 &= A_0 \delta_{n-1} + A_1 \delta_0 + \cdots + A_{n-1} \delta_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= A_0 \delta_1 + A_1 \delta_2 + \cdots \end{aligned}$$

wo

$$\delta_i = \frac{1}{n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{1}{\zeta^{i\lambda} c_\lambda}, \quad c_\lambda = \sum_{m=0}^{m=n-1} p_m \zeta^{m\lambda},$$

ζ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$. Im Falle, dass die Gleichungen (1) ein System von Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate bilden und damit $p_m = p_{n-m}$ ist, kann man δ_i durch trigonometrische Functionen darstellen. Hiernach betrachtet der Verfasser die Systeme von Gleichungen, welche einige Abweichungen vom cyklischen Bau darstellen, und zeigt, wie man sie in cyklische Systeme verwandeln kann. Endlich werden die speciellen cyklischen Systeme untersucht, welche als Systeme von Normalgleichungen bei den astronomischen Arbeiten sehr häufig vorkommen, z. B. bei den astrophotometrischen Untersuchungen des Glanzes der Sterne und bei den Untersuchungen der Teilungen der Instrumente. Als ein sehr specieller Fall werden die sogenannten Argelander'schen Formeln abgeleitet. Wi.

H. M. Doolittle. On the verification of prediction.

Wash. Bull. VII. 122-127

Anknüpfend an die meteorologischen Prognosen hat man sich seit einigen Jahren mit der Frage beschäftigt, in welcher Weise sich ein Mass aufstellen lasse, um durch dasselbe die Güte der Voraussagungen nicht allein mit Rücksicht auf den erzielten Erfolg, sondern mit Rücksicht auf die Güte der angewandten Methode zu bestimmen.

Finlay hatte 2803 Prognosen gemacht über das Eintreffen oder Nicht-Eintreffen eines Orkans.

Bezeichnet: (aa) die Zahl der Fälle, wo ein Ereignis vorausgesagt wurde und eintrat,

(ab) die Zahl der Fälle, wo es vorausgesagt wurde und nicht eintrat,

(ba) die Zahl der Fälle, wo das Nicht-Eintreten vorausgesagt wurde, das Ereignis aber eintrat,

(bb) die Zahl der Fälle, wo das Nicht-Eintreten vorausgesagt wurde, und wo das Ereignis nicht eintrat.

So ist für Finlay's Voraussagungen des Orkans

$$(aa) = 28, \quad (ab) = 72, \quad (ba) = 23, \quad (bb) = 2680.$$

Er zog daraus den Schluss, die Güte seiner Prognosen-Reihe werde durch den Wert

$$\frac{(aa)+(bb)}{(aa)+(ab)+(ba)+(bb)} = \frac{2708}{2803} = 0{,}9661$$

gemessen werden.

Dem trat G. K. Gilbert (Science IV, 1884) mit dem Bemerken entgegen, dass das Verhältnis der günstig ausgefallenen Prognosen zur Zahl der Prognosen überhaupt nichts über die Güte der angewandten Methode aussage. Wenn in dem vorliegenden Beispiel ein Ignorant stets vorausgesagt hätte, es werde kein Orkan stattfinden, so würde die Formel $\frac{2752}{2803} = 0{,}9818$, ein noch grösseres Gütemass ergeben haben. Gilbert will, dass das Gütemass in Beziehung tritt zu der Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses.

Setzt man zur Abkürzung:

$s = (aa)+(ab)+(ba)+(bb)$ = Anzahl der Fälle überhaupt,

$o = (aa)+(ba)$ = Anzahl der Fälle, in denen das Ereignis eingetreten ist,

$p = (aa)+(ab)$ = Anzahl der Fälle, in denen das Ereignis vorausgesagt wurde,

$c = (aa)$ = Anzahl der Fälle, in denen das Ereignis vorausgesagt wurde und eingetreten ist,

i = dem Teil des Erfolges der Voraussagungen, welcher der Geschicklichkeit des Voraussagenden und nicht dem Zufall zuzuschreiben ist, gewissermassen also der Grad des Zusammenhangs zwischen dem Ereignis und der Voraussagung,

so lautet die von Gilbert aufgestellte Formel

$$i = \frac{c - \frac{o}{s}\,p}{(o+p-c) - \frac{o}{s}\,p};$$

für die vorstehend angeführten Zahlen wird dies gleich [illegible]216.

Wieder eine andere Formel stellt C. S. Peirce auf (ebenfalls Science IV. 1884). Dieselbe lautet

$$i = \frac{c - \frac{o}{s}p}{o - \frac{o}{s}p}$$

und ergiebt für die vorstehenden Zahlen 0,523.

Doolittle betrachtet den ganzen Erfolg der Prognosen als proportional $\frac{c}{o}$ und auch $\frac{c}{p}$ also proportional $\frac{c^2}{op}$; bei der Feststellung des Gütemasses bringt er aber von den einzelnen Grössen den Wert $\frac{o}{s}p$, den er als durch den Zufall beherrscht betrachtet, in Abzug, und so findet er

$$i = \frac{c - \frac{o}{s}p}{o - \frac{o}{s}p} \cdot \frac{c - \frac{o}{s}p}{p - \frac{o}{s}p} = \frac{(cs - op)^2}{op(s-o)(s-p)}.$$

Er sucht diese Formel zu begründen, und weist darauf hin, dass sich dieselbe auch auf die Form bringen lässt:

$$i = \left(\frac{c}{o} - \frac{p-c}{s-o}\right)\left(\frac{c}{p} - \frac{o-c}{s-p}\right);$$

den ersten Factor erläutert er als die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis in geschickter Weise vorausgesagt wird; dieser Factor ist gleich dem von Peirce aufgestellten Gütemass. Der zweite Factor bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass eine Voraussagung, welche logisch richtig gewesen, in Erfüllung geht.

Für die Finlay'schen Zahlen ergiebt diese Formel $i = 0{,}142$. Der ganze Erfolg $\frac{c^2}{op}$ ist $= 0{,}154$; es kommt also 0,923 des Erfolgs auf die Geschicklichkeit oder auf die Methode der Voraussagung und 0,077 auf den Zufall. Bei den Voraussagungen des Nichteintretens des Orkans kommen hingegen nur 0,147 auf die Geschicklichkeit und 0,853 auf den Zufall.

Der Verfasser zeigt ferner, dass seine Formel allen den Bedingungen entspricht, welche Gilbert für das Gütemass ver-

langt hat, und er erläutert, aus welchen Ursachen er eine Erweiterung der Formel auf drei oder mehr Arten von Ereignissen für unmöglich hält.

Das behandelte Problem ist unzweifelhaft ein höchst interessantes; wir glauben aber nicht, dass dasselbe auf dem bisher betretenen Wege seiner Lösung entgegengeführt werden kann. Nach unserer Ansicht kann die Güte der Prognosen lediglich aus ihrem Erfolg bestimmt werden, und diejenigen sind die besten, welche die meisten Erfolge aufweisen. Die Güte der angewandten Methode wird sich niemals direct messen lassen, weil es nicht erkennbar ist, welcher Teil des Erfolges auf Rechnung der Güte der Methode zu bringen ist. Man wird in dieser Richtung vielleicht die absolute Grösse der Zahlen mit in Betracht zu ziehen haben und annehmen dürfen, dass bei hinreichend grossen Zahlen der zufällige Erfolg mehr und mehr zurücktreten wird. Im übrigen wird man darauf angewiesen sein, bestimmte Annahmen zu Grunde zu legen und die Richtigkeit oder vielmehr die Wahrscheinlichkeit derselben nachzuweisen.

Ls.

Th. Wittstein. Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften sowie aller auf dem Spiele des Zufalls beruhenden Institute. Hannover. Hahn'sche Buchhandlung. VI u. 106 S.

Der hier behandelte Gegenstand ist bereits früher von andern Autoren behandelt worden, die gefundenen Resultate weichen jedoch von einander ab, weil die Voraussetzungen, von denen man ausgegangen, verschieden waren und weil auch dasjenige, was unter Risiko verstanden sein sollte, verschieden definirt war.

Die Wittstein'sche Schrift hat das grosse Verdienst, dass sie, von den einfachsten Verhältnissen ausgehend, ganz präcise definirt, was das „mathematische Risiko" genannt werden soll; in Folge dessen gelangt der Verfasser auch zu ganz präcisen Resultaten bei den von ihm behandelten verwickelteren Fällen.

Ausgehend von dem Begriff der mathematischen Hoffnung

eines Preises, welcher auf das Eintreffen eines bevorstehenden, vom Zufall abhängigen Ereignisses gesetzt ist, kommt Wittstein zu der mathematischen Hoffnung des Gewinns oder des Verlustes, welcher entsteht, nachdem der Einsatz bei einem Spiel, einer Wette u. dgl. gemacht ist, und diese mathematische Hoffnung nennt er „das mathematische Risiko".

Für den Fall eines einzigen Preises C, dem der Einsatz $E = wC$ gegenübersteht, wo w die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis, auf welches der Preis gesetzt ist, eintritt, wird die mathematische Hoffnung des Gewinns $k = w(C-E)$, die des Verlustes $k' = (1-w)E$, also das mathematische Risiko

$$k = k' = w(1-w)C.$$

„Um sich von der Bedeutung des mathematischen Risikos ein vollständiges Bild zu machen, kann man sich in dem einen wie in dem andern Falle den Wert von k oder k' wie eine Prämie denken, gegen deren Erlegung ein zu diesem Zwecke errichtetes Institut in jedem einzelnen Fall die Verpflichtung übernehmen darf, dem Spieler oder seinem Gegner den eingetretenen Verlust zu ersetzen."

Dieses Institut würde selbstverständlich wieder ein mathematisches Risiko laufen, welches wir als Risiko zweiter Ordnung bezeichnen wollen; berechnen wir dieses analog wie vorhin, so finden wir als Wert desselben

$$k_1 = k_1' = w(1-w)^2C.$$

Fährt man so fort, so findet man ein mathematisches Risiko dritter, vierter Ordnung u. s. w. $w(1-w)^3C$, $w(1-w)^4C$ u. s. w. und als Gesamt-Risiko

$$wC\{(1-w) + (1-w)^2 + (1-w)^3 + \cdots \text{in infin.}\} = C(1-w).$$

Die Summe aus Einsatz und Gesamt-Risiko giebt also stets den Wert des Preises. Vielleicht könnte man auch den Einsatz oder die mathematische Hoffnung des Preises als das mathematische Risiko nullter Ordnung ansehen. Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall erweitern, dass es sich um verschiedene Preise mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten handelt. Der Verfasser zeigt die Anwendung bei dem Würfelspiel, der Lotterie.

dem Roulettespiel, der Feuerversicherung, der Leibrente und der Lebensversicherung, im ersten Teil aber immer nur für den einzelnen Interessenten gegenüber der Gesellschaft und umgekehrt.

Im zweiten Teil zieht der Verfasser das mathematische Risiko der Gesamtheit der Interessenten gegenüber der Gesellschaft und umgekehrt in Betracht.

Unter der Annahme, dass λ Spieler vorhanden sind, wo λ eine grosse Zahl sein soll, dass der Preis mit C, der Einsatz mit E und die Wahrscheinlichkeit mit w bezeichnet werde, findet der Verfasser näherungsweise

$$k = \frac{hC}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2 z^2} dz - \frac{C}{2h\sqrt{\pi}},$$

wo

$$h^2 = \frac{1}{2\lambda w(1-w)},$$

also

$$k = 0{,}39894\, C\sqrt{\lambda w(1-w)}.$$

Es wird der Zusammenhang zwischen dem mathematischen Risiko und dem mittleren Fehler gezeigt, und es werden die Betrachtungen ausgedehnt auf den Fall, wo λ' Spieler jeder um den Preis C' mit der Wahrscheinlichkeit w', λ'' Spieler um den Preis C'' mit der Wahrscheinlichkeit w'' u. s. w. vorhanden sind, und die Anwendung wird wieder in Beispielen gezeigt, ebenso wie es in dem ersten Teile geschehen ist.

Führt man auch hier wieder das mathematische Risiko erster, zweiter Ordnung u. s. w. ein, so lässt sich auch für diesen combinirten Fall leicht der Nachweis führen, dass das Gesamt-Risiko bezüglich der Gesamtsumme der Einsätze so gross ist wie die Gesamtsumme der sämtlichen Preise.

Als Anhang sind dem Buche einige Hülfstafeln beigefügt für die Berechnung des mathematischen Risikos bei der Lebensversicherung. Ls.

J. P. Janse. Over de constructie en afronding van sterfte-tafels. Diss. Amsterdam. Stemler. 161 Seiten.

Handelt über die Construction und Abrundung von Sterblichkeitstafeln. Das Buch zerfällt in drei Abschnitte. In dem ersten wird nach einer kurzen geschichtlichen Betrachtung die Construction von Sterblichkeitstafeln besprochen, *A*) aus statistischen Erfahrungen, *B*) aus particularen Erfahrungen. Dabei werden die allgemeinen Methoden des Engländers Halley, des Schweden Wargentin, des Deutschen Dr. Knapp und des Holländers Herrn van Pesch ausführlich auseinander gesetzt und an Beispielen erläutert. Darauf kommen die besonderen Methoden an die Reihe, wobei die wahrscheinliche Sterblichkeit aus der Erfahrung particularer Vereine und Gesellschaften abgeleitet wird. Hierbei treten die Untersuchungen Kerseboom's, Deparcieux's, Finlaison's, Dr. Heym's und Samot's in den Vordergrund.

Im zweiten Abschnitt behandelt der Verfasser die Bestrebungen zur Auffindung einer algebraischen Beziehung zwischen dem Alter des Menschen und der Anzahl der Lebenden, welche aus einer bestimmten Zahl Geborener in jedem Alter übrig bleibt. Die erste und einfachste Formel rührt von Moivre her, später stellten Lambert, Babbage, Th. Young, Lettrour, Moser und andere zusammengesetztere auf, ohne dass dieselben ausreichten. Wichtiger war die Formel von Gompertz, besonders in der von Makeham angegebenen verbesserten Form, zunächst weil dabei die zweite Hauptursache des Ablebens Erwachsener, nämlich das Abnehmen der Lebenskraft und die zufällige Sterblichkeit, welche nicht vom Alter abhängt, in Rechnung gebracht wird, sodann auch wegen des Nutzens, der davon bei der Berechnung von Leibrenten auf zwei oder mehr Personen gezogen wird. Die genannte Formel wird abgeleitet und ihre Uebereinstimmung mit der Erfahrung nachgewiesen. Darauf geht der Verfasser über zu der Bestimmung der Constanten der Formel, was am besten durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate geschieht. Endlich wird sie zur Berechnung von Leibrenten angewandt. Der dritte Abschnitt handelt über die Abrundung der Sterblichkeitstafeln, zu-

erst auf graphischem Wege nach John Herschell's Methode. Sodann durch Interpolation, wofür durch Herrn McCay eine Methode hergestellt ist. Zum Schlusse wird länger bei einer neuen Behandlungsweise verweilt, welche besser und schneller als jene der Vorgenannten zu einem sehr genauen Resultat führt. Sie rührt von Herrn van Pesch her und beruht auf der bekannten parabolischen Interpolationsformel. Die bequeme Anwendung und der geringe Umfang der Rechnungen in Verbindung mit einer grossen Genauigkeit sichern dieser Methode den Vorzug vor allen andern; nach des Verfassers Ansicht dürften die Sterblichkeitstafeln, welche mittels dieser Methode berechnet würden, für die besten zu halten sein, welche bisher aufgestellt sind.

G.

A. J. van Pesch. Sterfte-tafels voor Nederland afgeleid uit de waarnemingen over het tijdvak 1870-1880. Haarlem. Enschede & Zonen. 46 und CXLI Seiten.

Diese Sterblichkeitstafeln sind abgeleitet aus den Ergebnissen der Volkszählungen in den Niederlanden vom 1. December 1869 und 31. December 1879 und aus den Standesamtsregistern der Zwischenzeit. Sie gelten also für das ganze Königreich der Niederlande und sind für das männliche und weibliche Geschlecht besonders bearbeitet. Diesen allgemeinen Tafeln schliessen sich specielle an, welche auf die Bevölkerung der zwanzig grössten Städte und die übrige Bevölkerung Bezug nehmen, um den Einfluss des Zusammenwohnens in Städten auf die Sterblichkeit zu untersuchen, welcher Einfluss auch sehr beträchtlich zu scheint. Für die Lebensversicherungswissenschaft sind Tafeln von grosser Wichtigkeit; vom Standpunkt der r Mathematik ist es auch die ausführliche Bearbeitung un genaue Correction nach der in dem vorigen Referat besprocl und nur auf der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung ruhenden Methode. Die so erhaltenen Sterblichkeitstafeln unzweifelhaft die besten für die Niederlande, aber sie könn auch den Vergleich mit den vorzüglichste Länder b

stehen, weil sie nicht wie diese auf der Beobachtung einzelner Kreise, sondern auf der der gesamten Bevölkerung beruhen, wodurch viele Abweichungen eliminirt werden. G.

P. J. Hollmann. Wiskundige schets der levensverzekering. Alkmaar. Coster & Zoon. 198 Seiten.

Ein Handbuch für die mathematische Theorie der Lebensversicherung und ihre Benutzung zur Berechnung der Tarife. G.

P. van Geer. Formulen voor de bepaling der waarde van het menschelijk leven. Nieuw Arch. XII. 60-81.

Anregung zu dieser Arbeit gab die Abhandlung „der Kapitalwert des Menschen" in Dr. Wittstein's mathematischer Statistik. Jetzt wird die Aufgabe verallgemeinert durch den eingeführten Unterschied zwischen dem Erziehungswerte und dem Productionswerte, auch dadurch, dass die jährlichen Kosten und Production veränderlich genommen werden. Die Formeln für diese Werte in jeder Lebenszeit werden entwickelt und dabei sowohl das Absterben als der Rentenkurs in Rechnung gebracht. Darauf wird das Maximum der Werte bestimmt und verschiedene Eigenschaften aus den Formeln hergeleitet. Die Rechnungen werden auf bestimmte Fälle angewandt und Tafeln, welche den Wert des Lebens in verschiedenen Perioden darstellen, mitgeteilt. Schliesslich zeigt Verfasser, welche Form die obigen Formeln erhalten, wenn ein allgemeines Sterblichkeitsgesetz, wie die Formel von Gompertz-Makeham zu Grunde gelegt wird. G.

C. L. Landré. Waarde eener lijfrente en koopsom eener levensverzekering. Nieuw Arch. XII. 174-181.

B. L. Landré. Over het risico der uitkeering bij levensverzekering. Nieuw Arch. XII. 182-187.

Zwei Beiträge zu der Theorie der Lebensversicherung. Im Anschluss an die obengenannte Arbeit van Geer's wird im ersten von dem Werte einer Leibrente und der Kaufsumme einer Lebensversicherung gehandelt und der Zusammenhang zwischen beiden nachgewiesen.

Im zweiten bespricht der Verfasser das Risiko einer Lebensversicherung und stellt dafür eine Formel auf, aus der verschiedene Folgerungen gezogen werden. Als diese Abhandlung bereits geschrieben war, erschien die Schrift Th. Wittstein's über denselben Gegenstand (F. d. M. XV. 1883. 173), deren Resultate mit denen des Verfassers übereinstimmen. G.

Martin Pokorny. Ueber die Invalidenrente. Cas. XIV. 111, 159, 201 und 249. (Böhmisch.)

Diese umfangreiche, mit Tabellen und Illustrationen versehene Abhandlung enthält eine theoretisch wie praktisch brauchbare Erledigung des genannten Themas, dessen Wesen zugleich eine gründliche Kritik erfährt. Std.

L. Lindelöf. Statistiska beräkningar angående Finska Civilstatens enke och pupillkassa. Helsingfors Vetensk. Soc. Acta XIV. 1-83.

Ausführliche statistische Berechnungen, um der Stellung der Finländischen Wittwen-Kasse zur Controlle zu dienen.

E.

W. Lazarus. Zur deutschen Lebensversiche[...] lichkeitstafel. Assecuranz-Jahrbuch 12-18.

Der Verfasser giebt zunächst einige allgemeine [...] und Erläuterungen zu der 1883 erfolgten Veröffe[...] aus den Erfahrungen der deutschen Lebensversicher[...] schaften abgeleiteten Sterblichkeit. Dann geht er n[...] von Herrn Zillmer gegebene Ausgleichung der Sterblich[...]

ein. Für diese sind die Bedingungen, die sie erfüllen soll, sowie das Princip, nach dem sie berechnet ist, nicht angegeben. Herr Lazarus stellt für eine specielle Reihe, für die der Männer mit vollständiger ärztlicher Untersuchung, eine andere Ausgleichung auf Grund der gegebenen statistischen Angaben auf, welche der Sterblichkeit der Makeham'schen Formel entspricht. Für diese Ausgleichung werden die mathematischen Formeln und die durch Näherungsrechnungen gewonnenen Constanten gegeben. Hinzugefügt sind vergleichende Tabellen über die Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahre zu sterben für die verschiedenen Altersklassen, wie sie sich aus den Beobachtungszahlen nach der von Herrn Zillmer und der von Herrn Lazarus gegebenen Ausgleichung ergeben. Ferner auch solche, die nach den vom Verfasser berücksichtigten Bedingungen ausgeglichen aber auf Grund anderen deutschen, englischen und amerikanischen statistischen Materials aufgestellt sind. Hch.

V. Baerlocher. Zinseszins-Renten-Anleihen-Obligationen-Rechnung. Zurich. Orell Füssli & Co.

Mit Recht bemerkt der Verfasser in der Vorrede, dass diejenigen Disciplinen der politischen Arithmetik, welche der Hülfe der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung bedürfen (Leibrenten, Anwartschaften, Versicherungen), in den letzten Jahrzehnten vielfach der Gegenstand eingehender Behandlung gewesen sind, während das Gebiet der Anleihen und Obligationen weit weniger berucksichtigt worden ist. Namentlich Deutschland ist in auffallender Weise hierin zurückgeblieben, und es ist der Zweck des vorliegenden Lehrbuchs, diese Lücke auszufüllen. Wir dürfen hinzufugen, dass dieser Zweck vollständig erreicht worden ist. Zwar beschränkt sich die Aufgabe nach der Angabe des Verfassers darauf, die in England und Frankreich publicirten Special Arbeiten hervorragender Finanzmänner und Gelehrten in gedrängter Zusammenstellung den deutschen Geschäftsleut Beamten und Finanzmännern vorzuführen; die „Zusammenstellu

ist aber in so lichtvoller, klarer und übersichtlicher Weise geschehen, dass die Arbeit sehr wohl als eine selbständige anzusehen ist, wenngleich der Verfasser den Inhalt seines Buches als wesentlich referirender Natur bezeichnet, und lediglich die Umänderung der sechsten Thoman'schen Tafel und die Berechnung der siebenten Tafel nach einer von ihm aufgestellten Formel als seine Arbeit betrachtet wissen will. Es liegt in der Natur einer solchen Arbeit, dass die Formeln, welche der Rechnung zu Grunde zu legen sind, bereits früher vorhanden waren, das Verdienst den ganzen Stoff in zweckmässig geordneter Weise, in genügender Ausführlichkeit mit Vermeidung alles überflüssigen Beiwerks und in entsprechender übersichtlicher Form dargestellt zu haben, wird dadurch keineswegs geschmälert. Nach einer historischen Einleitung behandelt das Buch die Zinsrechnung, die Rentenrechnung, die Anleihenrechnung und die Obligationenrechnung. Vorausgesetzt wird die Kenntnis der kaufmännischen Arithmetik und der elementaren Algebra, nur in wenigen Fällen war es notwendig, in das Gebiet der Analysis hinüber zu greifen. Die abgeleiteten Formeln werden stets durch angewandte Aufgaben illustrirt.

Am Ende des Buches befinden sich 7 Tafeln, teils den Werken von Thoman und Charlon entnommen, teils wie bereits bemerkt, von dem Verfasser selbst construirt, welche unentbehrlich sind, wenn es sich um die Lösung praktischer Aufgaben handelt.

Auch die Ausstattung des Buches durch vorzüglichen Druck und Papier verdient hervorgehoben zu werden. Grade bei der grossen Anzahl von teils recht [illegible] Formeln ist es besonders erfreulich, wenn durch [illegible] im Druck sofort Alles in das richtige L[illegible]

W. Launhardt. Mathematisch[illegible] wirtschaftslehre. Leipzig. W. E[illegible]

W. Launhardt. [illegible] de[illegible] rungsfrage. [illegible]

Der Verfasser verfolgt ähnliche Ziele wie Herr L. Walras (Cf. F. d. M. XV. 1883. 171) in seiner „Théorie mathématique de la richesse sociale", nämlich die Volkswirtschaftslehre mathematisch aufzufassen und zu begründen. Ausser diesem schweizerischen Gelehrten, dessen eben genanntes Werk dem Verfasser erst kurz vor Vollendung des Druckes zugegangen ist, sind als Vorgänger auf diesem Wege zu nennen: Cournot (Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris, 1838), Gossen (Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln. Braunschweig, 1854) und Jevons (The theory of political economy. London, 1879). Die fundamentalen Begriffe des Wertes, des Nützlichkeitsgrades und der Preiswürdigkeit sind ähnlich formulirt wie bei Jevons und Walras. In dem ersten, allgemeineren Werke wird der Stoff in drei Abschnitten vom Tausche, von der Gütererzeugung und von der Güterversendung abgehandelt. Das zweite Werk gelangt zu dem Resultate, dass Deutschland durch Einführung der Doppelwährung ernsten Gefahren ausgesetzt werden würde.

Ein Eingehen auf den volkswirtschaftlichen Inhalt ist an diesem Orte nicht wohl möglich. Referent ist mit dem Verfasser auch darin vollständig einverstanden, dass die Behandlung von Quantitäten, wie sie in der Volkswirtschaftslehre nötig ist, derjenigen Wissenschaft nicht entbehren kann, welche die Sprache und Operationen hierfür ausgebildet hat. Indessen sind die Schwierigkeiten einer Anwendung der Mathematik auf die vorliegenden Probleme der Nationalökonomie so gross, dass nach der geistvollen Besprechung der Werke von Cournot und Walras in Darboux Bull. (2) VIII. 293ff. durch J. Bertrand viele Zweifel an der Anwendbarkeit der Schlussfolgerungen übrig bleiben.

Die Functionen, die zur Darstellung der Abhängigkeit einer betrachteten Grösse von einer anderen hier gebraucht werden, sind absolut unbekannt. Herr Walras hatte meistens graphische Methoden zur Erläuterung benutzt. Herr Launhardt erzielt durch fassliche Resultate, dass er die Function in eine P der unabhängigen Variabeln entwickelt und von di

nur die Glieder bis zur zweiten Potenz einschliesslich beibehält, die Curven also als Parabeln annimmt. Ist z. B. m die Mühsal einer Arbeit nach einer Arbeitszeit t, so wird $m = \beta t + \beta' t^2$ gesetzt, wo β und β' zwei positive Constanten sind. Da nun die Mühsal bei continuirlich wachsender Zeit jedenfalls nach einem endlichen Zeitintervalle τ unerträglich, d. h. unendlich wird, so ist es klar, dass m für $t = \tau$ unendlich werden, d. h. ein Glied etwa von der Form $\frac{\gamma}{t-\tau}$ enthalten muss. Hieraus erhellt klar die Unzulänglichkeit jener Näherungsformel des Verfassers. Ebenso braucht die Curve der Nützlichkeit y eines Gutes, von dem jemand die Menge x besitzt, nicht symmetrisch zu beiden Seiten des Maximums zu sein, wie dies in der angenommenen Parabel $y = \alpha x - \alpha' x^2$ der Fall ist.

Obschon daher die mathematischen Entwickelungen auf sehr unsicherer Basis ruhen, so ist es bemerkenswert, dass die gewonnenen Ergebnisse mit der Erfahrung nicht in Widerspruch geraten. Jedenfalls verdienen die Bestrebungen des Verfassers volle Beachtung; die Werke sind anregend geschrieben, und besonders ist der Abschnitt des ersten Buches von der Güterversendung, welcher der Verfasser schon länger Forschungen gewidmet hat, von eigentümlichem Interesse. Lp.

Fünfter Abschnitt.

R e i h e n.

Capitel 1.

A l l g e m e i n e s.

L. Euler. Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Teil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser. Berlin. J. Springer. XII u. 320 S. gr. 8°.

A. L. Cauchy. Algebraische Analysis. Deutsch herausgegeben von C. Itzigsohn. Berlin. J. Springer. XII u. 398 S. gr. 8°.

Die Verlagsbuchhandlung von J. Springer beabsichtigt, „mathematische Werke, welche auf die Entwickelung der reinen Mathematik einen wesentlichen Einfluss geübt haben, allen denen, welche die Wissenschaft an der Quelle zu schöpfen wünschen, in leichterer Weise, als dies bisher der Fall gewesen ist, zugänglich zu machen. ... Die ältere mathematische Literatur ist meist vergriffen, teils existirt sie nur in sehr teueren Ausgaben. ... Diesem Missstande sollen billige Ausgaben, die es jedem gestatten, derartige Werke stets bei der Hand zu haben, Abhülfe bringen. Um die Abziehung vom mathematischen Inhalte auf ein Minimum zu reduciren, werden diese Werke in deutschen Uebersetzungen erscheinen; gleichwohl soll der Geist der Originale mit allen Eigentümlichkeiten der zeitweisen Anschauungen möglichst gewahrt bleiben: es werden historische, nicht kritische Ausgaben geboten."

Es soll hier unerörtert bleiben, ob nicht eine correcte Ausgabe des Textes der Originalsprache dem wissenschaftlichen Zwecke des Unternehmens mehr entsprochen hätte, so dass der Gedanke des Verfassers dem Leser nicht erst durch das Medium des Uebersetzers überliefert würde, und dass die nicht deutsch sprechenden Mathematiker diese neuen Ausgaben ebenfalls hätten benutzen können. Gewiss werden auch in der gewählten Form die beiden wichtigen klassischen Werke von Euler und Cauchy unter den deutschen Mathematikern Liebhaber finden. Die Uebersetzung ist zwar frei, aber sachgemäss, die Ausstattung gut.

Von dem Euler'schen Werke, dessen deutsche Uebersetzung durch Michelsen (1788-1791) bei vielen Geometern die Stelle des Originals vertreten musste, ist nur der erste Teil herausgegeben worden, an den man zunächst immer denkt, wenn man die Bedeutung von Euler's Introductio in analysin betont; er fasst nach dem Ausdrucke Euler's in der Vorrede alles das zusammen, was zur reinen Analysis gehört. Der zweite Teil, welcher die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes enthält, ist ja in der That als Ganzes minder wichtig, und es wäre wohl schwierig gewesen, die interessanteren Partien auszuscheiden und für sich dem ersten Teile anzuhängen, wie z. B. Cap. VII und VIII des zweiten Buches von den unendlichen Zweigen der Curven und von den Asymptoten, Cap. XVIII desselben Buches von der Verwandtschaft der Curven, Cap. V des Anhangs, wo sich die erste Klassificirung der Flächen zweiter Ordnung findet, u. s. w.

Die algebraische Analysis von Cau[illegible] den Deutschen durch die Uebersetzung von Huzler zu[illegible], wird aber den jüngeren Mathematiker[illegible] gewiss willkommen sein. Denn die Aus[illegible] der Pariser Akademie veröffentlichten ges[illegible] Cauchy zu erwarten ist, dürfte schon weg[illegible] der einzelnen Bände keine grosse Verbreitu[illegible].

In beiden Werken ha[illegible] Uebersetzer durch Anwendung versch[illegible] Typen müssen geglaubt, ohne da[illegible]

geben hätten. Für den Berichterstatter hatte diese Bevormundung der Lectüre etwas Störendes. Lp.

P. Mansion. Principe fondamental de la méthode des limites. Mathesis V. 193-196.

Beweis des Princips: Eine immerfort wachsende Veränderliche hat eine Grenze. Drei Fälle: 1. Die Grenze ist unendlich, 2. sie ist endlich und commensurabel, 3. sie ist endlich und incommensurabel. Mn. (Lp.)

P. Mansion. Caractère général de convergence. Mathesis V. 270-277.

Ein alle Einzelheiten berücksichtigender Beweis des Cauchy'schen Satzes, von dem Abel in seiner Abhandlung über die Binomialreihe so ausgedehnten Gebrauch gemacht hat: Eine veränderliche Grösse, deren Schwankungen den Grenzwert Null haben, besitzt eine endliche Grenze, oder ausführlicher: Sind $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ solche aufeinander folgenden Werte einer Veränderlichen, dass man für jedwede positive vorweg angenommene Grösse ε derartig n bestimmen kann, dass man, absolut genommen, hat:

$$s_{n+1}-s_n < \varepsilon, \quad s_{n+2}-s_n < \varepsilon, \quad s_{n+3}-s_n < \varepsilon, \quad \dots, \quad s_{n+p}-s_n < \varepsilon,$$

wie gross auch p sei, so strebt die Reihe $s_1, s_2, s_3, \dots$ einer Grenze zu. Vergleichung der Theorie der Grenzen von Lipschitz mit derjenigen, die hier und sonst vom Verfasser angewandt wird. Mn. (Lp.)

C. Pelz. Notiz über unendliche Reihen. Cas. XIII pag 18. (Böhmisch.)

Der Verfasser ist bestrebt, durch elementare Ableitung den Grenzbegriff für Schüler an Mittelschulen klar zu machen. Std.

J. L. W. V. JENSEN. Om Grænseværdi og irrationale Tal. Zeuthen T. (5) III. 33-39.

Es wird gezeigt, dass, wenn eine Reihe von Grössen $a_1, a_2, \dots, a_n$ einen bestimmten Grenzwert a hat, für ein gewisses n und alle grösseren n

$$|a_{n+n'} - a_n| < \delta$$

sein muss, wo δ eine beliebig gewählte kleine Grösse darstellt. Diese Bedingung ist für die Existenz eines Grenzwertes sowohl notwendig als hinreichend. Gm.

H. G. ZEUTHEN. En Udledelse af Duhamel's Konvergensbetingelse. Zeuthen T. (5) III. 147-149.

Herr Zeuthen beweist den Satz von Duhamel durch Umwandlung der Reihe $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ in

$$s_n = (u_1 - u_2) + 2(u_2 - u_3) + 3(u_3 - u_4) + \dots + (n-1)(u_{n-1} - u_n) + nu_n$$

und Vergleichung mit einer andern Reihe von der Art, dass immer $\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{m}{m+\alpha}$.

Gm.

C. ARZELÀ. Sui prodotti infiniti. Bologna Mem. (4) IV. 419-439.

In dem unendlichen Producte

$$P = (1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)\dots$$

seien $r_1, r_2, \dots$ eindeutige reelle Functionen einer reellen Veränderlichen x in einem gegebenen Intervalle von a bis b. Wenn die r_n gewissen Bedingungen genügen, so ist dazu, dass P, a
von x betrachtet, eine der folgenden Eigenschaften:
im gleichen Grade, Annäherung an einen Grenzwert,
Differentiirbarkeit und speciell gliedweise, Integrirb
speciell gliedweise besitze, notwendig und hinreichend,
bezügliche Eigenschaft der absolut convergenten Reihe
komme. Die genannten Voraussetzungen über die r_n b
darin, dass $\Sigma|r_n|$ in dem ganzen Intervalle von a bis b

einer endlichen Zahl L liegt und v_n beim Wachsen von n in gleichem Grade zur 0 convergirt. Handelt es sich um die Differentiirung von P nach x, so kommt noch die Bedingung hinzu, dass $\Sigma|x'_n|$ im ganzen Intervalle unter einer endlichen Zahl L_1 liegt. St.

A. Börsch. Zur Convergenz der Reihen. Hoppe Arch. (2) II. 445-447.

Die unendliche Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_k + \cdots,$$

wofür $\text{Lim}\ \frac{t_{k+1}}{t_k} = -1$ sein soll, convergirt, wenn

$$\text{Lim}_{k=\infty}\left\{k\left(-\frac{t_k}{t_{k+1}}-1\right)\right\} > 0$$

ist. St.

A. Pringsheim. Ueber das Verhalten gewisser Potenzreihen auf dem Convergenzkreise. Klein Ann. XXV. 419-426.

Der Verfasser giebt Potenzreihen an, welche für die gesamte Peripherie ihres Convergenzkreises und dennoch nur bedingt convergiren. St.

A. de Saint-Germain. Étude sur un théorème d'Abel relatif aux séries et sur un développement en série souvent utile en astronomie. Nouv. Ann. (3) IV. 159-169.

A. de Saint Germain. Note sur la discontinuité de certaines séries. Nouv. Ann. (3) IV. 331-334.

Der Verfasser giebt einen strengen Beweis des Satzes von Abel über die Stetigkeit der Summe einer Potenzreihe an der Convergenzgrenze und erklärt die Unstetigkeit der unendlichen Reihe

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{x^{4p-3}}{4p-3}+\frac{x^{4p-1}}{4p-1}-\frac{x^{2p}}{2p}\right\}$$

bei $x = 1$, ohne übrigens von den einschlägigen Arbeiten anderer Kenntnis zu nehmen. Dann wird der Abel'sche Satz auf die Potenzreihe von z angewandt, welche aus der Gleichung

$$\cos\theta = \cos\varphi + z$$

für θ sich ergiebt. Im zweiten Artikel rechtfertigt Herr Saint-Germain seine Darstellung gegenüber einer Einwendung des Herrn Catalan. St.

A. Pringsheim. Ueber die Multiplication trigonometrischer Reihen. Klein Ann. XXVI. 157-165.

Wie der Verfasser früher gezeigt hat (vgl. F. d. M. XV. 1883. 2..), bildet die Convergenz der Reihe $\Sigma a_\nu a'_\nu$, wo a_ν, a'_ν positive mit wachsendem Index niemals zunehmende Grössen bedeuten, eine hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit der Cauchy'schen Multiplicationsregel auf die beiden als bedingt convergent vorausgesetzten Reihen $\Sigma(-1)^\nu a_\nu$, $\Sigma(-1)^\nu a'_\nu$. Hier führt er den analogen Nachweis für zwei nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen einer reellen Grösse x fortschreitende Reihen, deren Coefficienten Grössen von der Beschaffenheit jener a_ν, a'_ν mit durchweg gleichen oder alternirenden Vorzeichen sind. Auch lassen sich die Producte solcher Reihen durch blosse Umordnung der Glieder in trigonometrische Reihen verwandeln, wobei aber gewisse Werte von x auszuschliessen sind. St.

A. Pringsheim. Ueber analytische Ausdrücke mit hebbaren Unstetigkeiten. Klein Ann. XXVI. 167-192.

Wenn eine Function $f(x)$ der reellen Variablen x so beschaffen ist, dass die Functionswerte auf beiden Seiten einer gewissen Stelle $x = a$ beliebig wenig von einander differiren, sobald nur x hinlänglich der Stelle a genähert wird, während $f(a)$ selbst einen Wert besitzt, der von jenen Nachbarwerten um ein Endliches oder Unendlichgrosses abweicht, so sagt man, $f(x)$ erleide an der Stelle $x = a$ eine hebbare Unste[illegible] Solche

Unstetigkeiten sind ganz und gar nichts Ungewöhnliches. Die ungleichmässige Convergenz der Reihen, welche die Ursache der sprungweisen Aenderungen bildet, erzeugt nämlich noch viel öfter hebbare Unstetigkeiten. Es bezeichne $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ eine unendliche Folge von Functionen von x, die innerhalb eines gewissen Intervalles $x_0 < x < x_1$ stetig sind. Die Reihe

$$(1) \qquad \sum_0^\infty {}_\nu\, \varphi_\nu(x)$$

sei für alle Werte von x im Intervalle (x_0, x_1) mit Ausnahme eines einzigen $x = a$ unbedingt, für diesen bedingt convergent, und es stelle ihre Summe $S(x)$ eine für das ganze Intervall stetige Function von x dar. Stellt man jetzt die Glieder der Reihe so um, dass sie für $x = a$ eine gegebene, von $S(a)$ verschiedene Summe erlangt, so ist die Summe der so umgeordneten Reihe eine Function, welche an der Stelle a eine hebbare Unstetigkeit von beliebig vorzuschreibender Grösse besitzt. Mittels dieses Verfahrens kann man aus jeder bedingt convergenten Reihe Σc_ν unendlich viele Functionen mit der verlangten Eigenschaft ableiten. Bezeichnet nämlich $f(x)$ eine im Intervalle (x_0, x_1) stetige Function von x, die an der Stelle $x = a$, und nur an dieser, ihre obere Grenze erreicht, so wird die Reihe

$$\sum_1^\infty {}_\nu\, c_\nu \left\{ \frac{f(x)}{f(a)} \right\}^\nu$$

die der Reihe (1) beigelegten Eigenschaften besitzen.

Das Vorstehende lässt sich in folgender Art verallgemeinern. Die Reihe (1) sei innerhalb des Intervalles $x_0 < x < x_1$ convergent, gleichgültig ob bedingt oder unbedingt, jedoch im allgemeinen gleichmässig, so dass ihre Summe $S(x)$ eine eindeutige, im allgemeinen stetige Function darstellt. Nun werde gesetzt

$$\varphi_\nu(x) = \varphi_\nu^{(1)}(x) - \varphi_\nu^{(2)}(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo die $\varphi_\nu^{(1)}(x)$ und $\varphi_\nu^{(2)}(x)$ Functionen von demselben Charakter wie die $\varphi_\nu(x)$ bedeuten. Sind dann die beiden Reihen

$$S^{(1)}(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, \varphi_\nu^{(1)}(x), \quad S^{(2)}(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, \varphi_\nu^{(2)}(x)$$

im Intervalle $x_0 < x < x_1$ mit Ausnahme einer Stelle $x = a$ zu-

gleich mit (1) gleichmässig convergent und für $x = a$ divergent und zwar jede mit unendlichem Grenzwerte, so wird die Reihe

$$\bar{S}(x) = \lim \left\{ \sum_{\nu}^{n_1} \varphi_\nu^{(1)}(x) + \sum_{\nu}^{n_2} \varphi_\nu^{(2)}(x) \right\} \qquad (n_1 = \infty,\ n_2 = \infty)$$

zunächst mit Ausschluss der Stelle $x = a$ dieselbe Summe wie (1) besitzen, unabhängig davon, wie n_1 und n_2 ins Unendliche wachsen; an der Stelle $x = a$ aber nur dann, wenn $n_1 = n_2$ ist oder doch zwischen n_1 und n_2 ein bestimmtes Abhängigkeitsverhältnis stattfindet. In jedem anderen Falle werden $S(a)$ und $\bar{S}(a)$ sich von einander unterscheiden.

Am Schlusse werden aus Ausdrücken mit sprungweisen Aenderungen nach Art der Fourier'schen Reihen und Integrale solche mit hebbaren Unstetigkeiten abgeleitet. Ein Teil der so erzeugten Unstetigkeiten lässt sich mit Hilfe eines im vorhergehenden Referate berührten Satzes auf die oben erwähnten Ursachen zurückführen.

Sämtliche schematisch beschriebenen Erscheinungen sind durch Beispiele erläutert. St.

M. Lerch. Remarque sur la théorie des séries.

Teixeira J. VII. 79-80.

Der Verfasser giebt ein Beispiel einer convergenten Reihe, für welche ein Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

des Quotienten zweier auf einander folgenden Glieder nicht besteht, und wo dieser Quotient einen beliebig grossen Wert annehmen kann.

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$u_n = \delta^{n-(\lg n)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\lg n)[1+(\lg n)]},$$

wo $(\lg n)$ den ganzen Teil des gewöhnlichen Brigg'schen Logarithmus von n bezeichnet, und δ und g positive Grössen sind, die die Bedingung erfüllen $\delta < 1$, $g > 1$, $\delta\sqrt{g} < 1$.

Tx. (Hch.)

E. Cesaro. Remarques sur la théorie des séries. Teixeira J. VII. 171-177.

Herr Cesaro nimmt die im vorigen Referat von Herrn Lerch besprochene Frage wieder auf und giebt einfachere Beispiele von Reihen, für welche das Verhältnis $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ gegen keine bestimmte Grenze convergirt. Eine derartige convergente Reihe ist

$$\varrho^2+\varrho^2+\varrho^4+\varrho^4+\varrho^6+\varrho^6+\cdots$$

für $\varrho < 1$. Der Wert von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ist für dieselbe 1 oder ϱ^2, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Es giebt zahlreiche derartige arithmetische Reihen.

Der Verfasser betrachtet gleichzeitig die Grenze $\sqrt[n]{u_n}$ und zeigt, dass wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, je nach der Form von n, ν verschiedene Grenzwerte hat, $\sqrt[n]{u_n}$ sich einer bestimmten Grenze nähert.

Darauf zeigt er noch, dass eine Reihe convergent sein kann, trotzdem sie weder für $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ noch für $\sqrt[n]{u_n}$ einen bestimmten Grenzwert besitzt.

Er schliesst die Arbeit mit interessanten Betrachtungen über den Grenzwert von nu_n in convergenten Reihen.

Tx. (Hch.)

C. van Aller. Enkele opmerkingen omtrent het onderzoek naar de convergentie of divergentie van oneindig voortloopende reeksen. Nieuw Arch. XII 204-215.

Wie der Titel es ausspricht, enthält diese Arbeit einige Bemerkungen über die Untersuchung der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen und Anwendung derselben auf einige besondere Fälle.

G.

O. Olsson. Från fysisk-matematiska föreningen i Upsala. III. Zeuthen T. III. 164-168.

Enthält als dritte Mitteilung einen vom Herrn A. Meyer gelieferten Beweis des folgenden Satzes.

Addirt man Glied für Glied die beiden Potenzreihen $P(x|a)$ und $P_1(x|a)$, so kann die Summe keinen anderen Convergenzbereich haben als denjenigen, welcher den beiden Reihen P und P_1 gemeinsam ist, nebst Discussion des Satzes auch für Reihen mit mehreren Variabeln.

Der oben genannte Aufsatz enthält als erste Mitteilung den Satz

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^n\psi d\psi}{\left(1-k^2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)^{n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{k_1^{n+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \quad (k^2+k_1^2=1),$$

der nur ein Specialfall des folgenden ist:

$$\int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{k_1\sin\psi}{\Delta^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right)}{\Delta^2\left(\frac{\psi}{2}\right)} d\psi = \frac{1}{k_1}\int_0^{\pi} f(\sin\psi)d\psi,$$

wo

$$\Delta\left(\frac{\psi}{2}\right) = \sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\psi}{2}}.$$

Der Beweis gründet sich auf gewisse Eigenschaften der Ellipse. Gm.

O. Ježek. Ueber das formale Bildungsgesetz der Coefficienten des Quotienten zweier Potenzreihen. Prag. Ber. 127-144.

Wird der Quotient der Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_0^{\infty} a_\lambda x^\lambda, \quad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^{\infty} b_\lambda x^\lambda,$$

worin b_0 von 0 verschieden ist, mit

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty c_\lambda x^\lambda$$

bezeichnet, so findet man

$$c_n = \frac{1}{b_0^{n+1}} \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} a_\lambda b_0^\lambda D_{n-\lambda},$$

unter D_n die Determinante n^{ter} Ordnung

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix},$$

verstanden. D_n hat 2^{n-1} Glieder. Vereinigt man die gleichen unter ihnen, so erhält man für D_n den Ausdruck

$$\sum \frac{(n-\lambda_0)!}{\lambda_1! \dots \lambda_n!} (-1)^{\lambda_0} b_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} \dots b_n^{\lambda_n},$$

worin für $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ jedes System von ganzzahligen, nicht negativen Lösungen der Gleichungen

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n$$

zu setzen ist. Beim Beweise dieses Satzes, sowie bei Berechnung der ersten zehn D_n ist benutzt der Ausdruck der Summe der n^{ten} Potenzen der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades durch die Coefficienten des Gleichungspolynoms. Derselbe liefert auch die Coefficienten der Entwickelung von $l\mathfrak{P}_1(x)$ nach Potenzen von x. Es sind auch berechnet die Coefficienten der analogen Entwickelung von $e^{\mathfrak{P}_1(x)}$. St.

S. Dautheville. Étude sur les séries entières par rapport à plusieurs variables imaginaires indépendantes. Ann. de l'Éc. N. (3) II. Suppl. 3-51.

Bericht in Abschnitt VII. Cap. 1.

Ptaschitzky. Ueber die Entwickelung einiger Functionen von mehreren Veränderlichen nach der Maclaurin'schen Reihe. Chark Ges. 1884. 73-79 (Russisch).

Es werden zwei Methoden gegeben, um die von Hermite (Cours d'Analyse p. 64) gegebenen Entwickelungen der Functionen von zwei Veränderlichen aus der Maclaurin'schen Reihe zu erhalten.

Wi.

T. J. Stieltjes. Sur une généralisation de la série de Lagrange. Ann. de l'Éc. N. (3) II. 93-98.

Die r Veränderlichen $X, Y, Z, \dots$ werden nach Potenzen der r Veränderlichen $x, y, z, \dots$ entwickelt, welche mit ihnen durch die r Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= x + a\varphi(X, Y, Z, \dots), \\ Y &= y + b\psi(X, Y, Z, \dots), \\ Z &= z + c\chi(X, Y, Z, \dots), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

verbunden sind. Für den Fall $r = 2$ hat Herr Darboux die Formeln aufgestellt (vergl. F. d. M. II. 1870. p. 295).

St.

E. Cesaro. Généralisation de la série de Lagrange. Nouv. Ann. (3) IV. 316-321.

Es wird durch den Schluss von p auf $p+1$ bewiesen, dass der Coefficient von x^p in der Entwickelung der Function $z = f(y)$, wo y durch die Gleichung

$$y = a + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \cdots$$

erklärt ist, sich in der Form

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{d^p z}{dx^p}\right)_0 = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \left\{ \frac{1}{\nu!} \frac{d^{\nu-1}}{da^{\nu-1}} f'(a) \mathop{S}_p^{\nu} [\varphi^{\nu}(a)] \right\}$$

darstellen lässt. Hier bezeichnet der „isobarische Algorithmus" $\overset{\nu}{\underset{\varkappa}{S}}[\varphi_\varkappa(a)]$ die Summe aller Producte

$$\varphi_{n_1}(a)\varphi_{n_2}(a)\dots\varphi_{n_\nu}(a) \qquad (n_1+n_2+\cdots+n_\nu = p).$$

Der genannte Coefficient wurde von Herrn Teixeira im J. de Sciencias mathematicas 1880 angegeben (vgl. auch F. d. M. XIII. 1881. 180). St.

P. A. NEKRASSOFF. Die Reihe von Lagrange und Annäherungsausdrücke für die Functionen sehr grosser Zahlen I. Abteilung. Die Reihe von Lagrange. Mosk. Math Samml XII. 49-189, 315-377, 481-579, 643-725 (Russisch.)

Unter den verschiedenen Untersuchungsmethoden der Reihe von Lagrange ist die bequemste, einfachste und dem Inhalte nach reichste diejenige, welche sich auf die Eigenschaften des Moduls des Ausdrucks $z^{-1}f(u+z)$ und auf die Theorie der complexen Integrale stützt. Doch hat diese Untersuchungsmethode noch nicht die erwünschte Vollkommenheit erreicht. So wie in den Arbeiten Cauchy's, welcher zuerst diese Methode zur Erforschung der Lagrange'schen Reihe angewandt hat, so hat auch der Verfasser bei anderen Geometern in Werken, die diese Methode betreffen, viel Unklares und Ungenaues gefunden; dies hat ihn bewogen, die ganze Lehre von der Reihe von Lagrange aufs neue durchzusehen. Es wurden besonders zwei Hauptziele dabei von ihm festgehalten, erstens auf alle Ungenauigkeiten der vorhandenen Literatur über die Reihe von Lagrange hinzuweisen, zweitens die Untersuchungsmethode dieser Reihe wo möglich zu verbessern. Demgemäss kann die Arbeit in zwei Teile geteilt werden.

Der erste (erstes Capitel) ist einer ausführlichen historisch-kritischen Uebersicht der Literatur der Reihe von Lagrange gewidmet. Da Ungenauigkeiten, welche schon in einem Werke verbessert worden sind, sich dennoch in einem anderen von neuem wiederholen, so hat der Verfasser in seiner Uebersicht

nicht nur auf die noch nicht verbesserten Ungenauigkeiten hingewiesen, sondern auch auf die schon von andern verbesserten aufmerksam gemacht. In dieser historisch-kritischen Uebersicht sind der Reihe nach die Untersuchungen von Lagrange, Laplace, Bürmann, Chio, Cauchy, Marie, Rouché, Picart, Menabrea, Tschebyscheff, Zolotareff u. a. in gründlichster Weise auseinander gesetzt, kritisirt und studirt. Der Referent kann nur bedauern, dass er viele neue Theoreme, die diese Untersuchungen ergänzen, nicht anführen kann.

Der zweite Teil der Arbeit (zweites und drittes Capitel) ist den Untersuchungsmethoden gewidmet, welche auf den Eigenschaften des Moduls der Function $z\ {}^1f(u+z)$ gegründet sind. Unter diesen Methoden ist diejenige mehr bekannt, in welcher der sogenannte Modul maximum maximorum betrachtet wird. Diese Methode ist im zweiten Capitel des Werkes behandelt; sie unterliegt Einschränkungen, welche von niemandem vor dem Verfasser bemerkt wurden, führt jedoch in gewissen Fällen zu einfachen und anwendbaren Resultaten, welche sowohl die Frage nach der Charakterisirung der Wurzel, auf die sich die Reihe von Lagrange bezieht, wie auch die Frage nach dem Modul des Complementärgliedes der Lagrange'schen Reihe betreffen, und daher ein aufmerksames und ausführliches Studium verdienen. Bei diesem Studium hat der Verfasser neue Begriffe über die Veränderung des Moduls maximum maximorum der Function $z\ {}^1f(u+z)$ festgesetzt und sie zur Bestimmung der Bedingungen angewandt, bei denen die Methode selbst anwendbar ist (diese Bedingungen treffen nicht immer mit den Bedingungen der Convergenz der Lagrange'schen Reihe zusammen). Dieselben Begriffe werden hiernach angewandt, um die Bedingungen zu erhalten, unter denen die Charakterisirung der Wurzel, welche durch die Reihe ausgedrückt wird, nach der Methode von Lagrange möglich ist. Dann zeigt der Verfasser, dass seine Untersuchungen auch zur Untersuchung der von Cauchy in seiner Abhandlung: „Résumé d'un mémoire sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites“ gegebenen Methode zur Bestimmung der höchsten Grenzen des allgemeinen und com-

plementären Gliedes der Reihen dienen. Damit endet das zweite Capitel des Werkes.

Bei der Untersuchung des Moduls maximum maximorum betrachtet man die Kreise, welche um den Anfang der Coordinaten beschrieben sind. Da die Methode des Moduls maximum maximorum Einschränkungen unterliegt, führt der Verfasser im dritten Capitel eine Verallgemeinerung ein, indem er nicht nur solche Kreise, sondern auch andere Curven betrachtet, die wichtiger für die Untersuchung der Lagrange'schen Reihe erscheinen. Die Idee dieser Verallgemeinerung gehört zwar Cauchy, aber der Verfasser hat zum ersten Male die volle Entwickelung dieser Idee durchgeführt. Er betrachtet dabei die Oberfläche des Moduls einer gegebenen Function; das genaue und vollständige Studium dieser Flächen, der Niveaucurven und ihrer orthogonalen Trajectorien nimmt die grössere Hälfte des dritten Capitels ein. Auf diesen Betrachtungen beruht nun die vollständige Theorie der Lagrange'schen Reihe und das allgemeine Gesetz ihrer Convergenz. Da das allgemeine Convergenzgesetz der Lagrange'schen Reihe äusserst verwickelt ist, so bietet der Verfasser mehrere gut anwendbare Regeln zur Bestimmung der Convergenzbedingungen in den wichtigsten Fällen. In demselben Capitel betrachtet der Verfasser die Constructionsmethode der geschlossenen Umläufe, welche die Wurzel, auf die sich die Reihe von Lagrange bezieht, charakterisiren.

Die Fortsetzung der Arbeit ist dem Zusammenhange der Lagrange'schen Reihe und der Theorie der angenäherten Ausdrücke der Functionen sehr grosser Zahlen gewidmet.

Wi.

Ch. Lagrange. Formule nouvelle pour le développement des fonctions, en particulier des intégrales. Belg. Bull. LV 114-117.

Es sei

$$x = a+h, \quad 0 < \theta < 1;$$

dann ist

$$F(x) = F(a) + \tfrac{1}{2}h(F'(x) + F'(a)) - \tfrac{1}{2}\frac{h^2}{1.2}(F''(x) - F''(a))\frac{n-1}{2n-1}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}(F'''(x) + F'''(a))\frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-2)} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{2}\frac{h^n}{n!}(F^{(n)}(x) - (-1)^n F^{(n)}(a))\frac{1.2\ldots(n-1)}{(n+1)\ldots(2n-1)}$$
$$+ (-1)^n \tfrac{1}{2}F^{(2n+1)}(a+\theta h)\frac{\theta^n}{n(n+1)}\frac{h^{2n+1}}{1.2\ldots(2n-1)}$$

Mn.

P. Mansion. Sur une forme du reste dans la formule de Taylor et dans celle de M. Ch. Lagrange. Belg. Bull. LV. 846-849.

I. Im allgemeinen ist der reelle Teil von $(a+bi)$ plus dem imaginären Teile von $(c+di)$ gleich $\lambda\sqrt{2}.e^{\omega i}$ multipliert mit dem grösseren der beiden absoluten Beträge $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{c^2+d^2}$, wobei λ eine positive Grösse bedeutet, die höchstens gleich der Einheit ist. Mithin kann für die Functionen einer complexen Veränderlichen der Rest der Taylor'schen Reihe:

$$R = \frac{(Z-z_0)^n}{n!}\frac{n}{p_1}(1-\theta_1)^{n-p_1}F^{(n)}(z_1) + I\frac{(Z-z_0)^n}{n!}\frac{n}{p_2}(1-\theta_2)^{n-p_2}F^{(n)}(z_2)$$

$(z_1 = z_0 + \theta_1(Z-z_0),\ z_2 = z_0 + \theta_2(Z-z_0),\ 0 < \theta_1$ und $\theta_2 < 1)$ auf die Form gebracht werden:

$$\lambda\sqrt{2}e^{\omega i}\frac{(Z-z_0)^n}{n!}\frac{n}{p}(1-\theta)^{n-p}F^{(n)}[z_0+\theta(Z-z_0)].$$

II. Man setze voraus, es seien $F(Z), F'(Z), \ldots, F^{n}(Z)$ nach dem Taylor'schen Satze entwickelt bis zu den Gliedern in $(Z-z_0)^{2n}$ mit dem Reste:

$$\int_{z_0}^{z}\frac{(Z-t)^{2n}F^{(2n+1)}(t)dt}{1.2.3\ldots 2n}$$

für die erste Function und ähnlich für die übrigen. Eliminirt man zwischen den $n+1$ Entwickelungen

$$F^{(n+1)}(z_0),\quad F^{(n+2)}(z_0),\ \ldots,\ F^{(2n)}(z_0),$$

so erhält man die im vorigen Bericht abgedruckte Formel des Herrn Ch. Lagrange mit dem Reste:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{(Z-t)^n(z_0-t)^n}{1.2.3\ldots 2n} F^{(2n+1)}(t)dt;$$

hieraus lässt sich der Ausdruck des Herrn Ch. Lagrange herleiten. Mn. (Lp.)

de Tilly et P. Mansion. Rapport sur le mémoire intitulé: Solution du problème universel de Wronski et d'un autre problème relatif à l'intégration des équations différentielles, par Ch. Lagrange. Belg. Bull. (3) X. 536-549, 550-558.

I. Das Wronski'sche „Universalproblem" ist das folgende: „Wenn eine Beziehung gegeben ist:

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \cdots + x_n f_n(x),$$

eine Function $F(x)$ von x nach den Potenzen und Producten der unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu entwickeln." Dieses Problem ist leicht auf das Lagrange'sche zurückzuführen. Man setze $b-z = f(x)$ und führe überall die Veränderliche z statt x ein. Die Aufgabe wird nun in die folgende umgewandelt: „Wenn eine Beziehung:

$$z = b + x_1\varphi_1(z) + x_2\varphi_2(z) + \cdots + x_n\varphi_n(z)$$

gegeben ist, eine Function $\psi(z)$ nach den Potenzen und Producten von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu entwickeln".

Man macht hiervon sofort die Lösung der Lagrange'schen Reihe abhängig, indem man zunächst annimmt:

$$z = b + tx_1\varphi_1(z) + tx_2\varphi_2(z) + \cdots + tx_n\varphi_n(z),$$

$\psi(z)$ nach den Potenzen von t entwickelt und t gleich -1 macht.

Der Verfasser der Abhandlung macht die eben angedeutete Reduction, berechnet die Coefficienten der Entwickelung und bestimmt den Rest der Reihe nach der „loi suprême" (zum ersten

Male durch Herrn Ch. Lagrange bewiesen). Danach giebt er verschiedene Verallgemeinerungen des Universalproblems, hierauf Anwendungen, unter andern die folgende: Eine Function einer Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$ nach den Potenzen von $\varphi(a)$ zu entwickeln, wo a ein angenäherter Wert der Wurzel ist. Hierzu genügt es, diese Entwickelung nach den Potenzen von $\varphi(x) - \varphi(a)$ zu machen, sodann zu beachten, dass $\varphi(x) = 0$.

Dann und wann ist Herr Lagrange in diesem Teile seiner Abhandlung nicht scharf in der Bestimmung der Existenzbedingungen der von ihm ausgesprochenen Sätze, weil er sich nicht die neueren Arbeiten über die Lagrange'sche Reihe zu Nutzen macht.

II. Der zweite Teil der Abhandlung enthält einen Versuch zur Integration der Differentialgleichungen nach der Methode der Variation der willkürlichen Constanten und durch Entwickelung des Integrals in eine Reihe nach den Potenzen eines Parameters.

Nach Herrn De Tilly, der die Anwendung dieses Entwickelungsverfahrens auf die Aufgabe der Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung versucht hat (in der Form, die Herr De Tilly ihr gegeben hat), scheint diese Methode neue Perspectiven für diejenigen zu eröffnen, die sich mit jener schwierigen Frage befassen, welche er bei dieser Gelegenheit auf verschiedene Arten transformirt.

Nach Herrn Mansion werden die Formeln des Herrn Lagrange inbetreff der Variation der willkürlichen Constanten in seiner Abhandlung nicht bewiesen, aber sie sind unter gewissen Bedingungen wahr, und der Bericht enthält einen Beweis derselben. Was die Entwickelung des Integrals nach den Potenzen eines Parameters betrifft, so scheint es fast unmöglich, auf eine allgemeine Weise zu ermitteln, in welchem Falle sie berechtigt ist.

Folgendes ist das auf die Variation der willkürlichen Constanten bezügliche Theorem des Herrn Ch. Lagrange: Wenn das allgemeine Integral der Gleichung

$$x'' = f(t, x, x', 0)$$

unter die Form gebracht werden kann:

$$c = \varphi(t, x, x'), \quad g = \psi(t, x, x'),$$

so lässt sich die Integration der Gleichung

$$y'' = f(t, y, y', a)$$

auf die des Systems zurückführen:

$$u' = \chi(t, u, v, a), \quad v' = \pi(t, u, v, a),$$

worin u, v zwei neue Functionen, χ, π bekannte, aus φ und ψ abzuleitende Functionen sind. Mn. (Lp.)

E. Catalan et P. Mansion. Rapport sur le mémoire intitulé: Sur certains développements en séries par M. S. Deruyts. Belg. Bull. LV. 522-528.

Es seien

$$\varphi(x) = A_0 T_0(x) + A_1 T_1(x) + A_2 T_2(x) + \cdots,$$
$$f(x) = A_0 \qquad + A_1 x \qquad + A_2 x^2 \qquad + \cdots$$

zwei convergente Reihen, die sich nach Multiplication mit gewissen Functionen Glied für Glied integriren lassen. Wenn es solche Functionen $\psi(x)$ giebt, dass

$$\int_c^d \psi_n(x) T_n(x) dx = 1, \quad \int_c^d \psi_n(x) T_{n+k}(x) dx = 0$$

ist, so erhält man:

$$A_n = \int_c^d \varphi(x) \psi_n(x) dx, \quad f(z) = \int_c^d \varphi(x) \Psi(z, x) dx,$$

wenn man setzt:

$$\Psi(z, x) = \psi_0(x) + z\psi_1(x) + z^2\psi_2(x) + \cdots.$$

Ebenso folgt die Umkehrung der vorigen Formel:

$$\varphi(x) = \int_a^b \lambda(x, u) f[\theta(x, u)] du,$$

[redacted]

$$T_n(x) = \int_a^b \lambda(x, u) [\theta(x, u)]^n du.$$

Mn. (Lp.)

O. Hölder. Ueber eine neue hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Function durch die Fourier'sche Reihe. Berl. Ber. 419-434.

Herr Hölder beweist und erweitert den nachstehenden von Herrn Weierstrass aufgestellten, aber noch nicht veröffentlichten Satz. „Es sei x eine reelle Veränderliche und $f(x)$ eine in dem Intervalle

$$a < x < b$$

eindeutig definirte und stetige Function derselben. Man denke sich auf der diese Function darstellenden Curve irgend eine Reihe von Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$, deren Abscissen beziehlich mit $a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}$ bezeichnet seien, so angenommen, dass die Differenzen

$$\Delta_1 = a_2 - a_1, \quad \Delta_2 = a_3 - a_2, \ldots, \Delta_r = a_{r+1} - a_r$$

sämtlich positiv sind. Versteht man dann unter s_p (für $p = 1, 2, \ldots, r$) den absoluten Inhalt des Flächensegments, welches von dem zwischen den Punkten A_p, A_{p+1} liegenden Teile der Curve und der zugehörigen Sehne begrenzt wird, so kann die Function $f(x)$ so beschaffen sein, dass die Summe

$$(1) \qquad \sum_{p=1}^{p=r} \frac{s_p}{\Delta_p}$$

sich der Grenze Null nähert, wenn man, die Endpunkte A_1, A_{r+1} festhaltend, die Grössen Δ_p sämtlich unendlich klein werden lässt. Ist dies der Fall, so wird $f(x)$ für jeden zwischen a und b liegenden Wert von x durch die Fourier'sche Reihe

$$(2) \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x')dx' + \frac{2}{b-a}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\int_a^b f(x')\cos\frac{2\nu\pi}{b-a}(x-x')dx'$$

dargestellt."

Die Summe (1) hat aber, wenn man sich zufolge der obigen Definition

$$s_p = \int_{a_p}^{a_{p+1}} \operatorname{mod}\left\{f(x) - f(a_p) - \frac{x-a_p}{a_{p+1}-a_p}\, f((a_{p+1}) - f(a_p))\right\} dx$$

gesetzt denkt, für jede Punktfolge $A_1, A_2, \ldots$ auch in dem Falle

eine bestimmte Bedeutung, dass $f(x)$ lediglich in dem Intervalle $a \dots b$ endlich und integrirbar ist. Wenn nun ferner vorausgesetzt wird, dass die Summe (1) stets unter einer angebbaren Grenze bleibe, wie auch die Punkte a_1, $a_2, \dots$ in dem Intervalle $a \dots b$ angenommen werden, so gelten die folgenden Sätze:

1) Die Summe der n ersten Glieder der Reihe (2) schwankt für jeden einzelnen Wert von x zwischen endlichen Grenzen, und es existirt jedesmal nur eine endliche Anzahl m von Punkten, für welche die Unbestimmtheitsgrenzen der Reihe von einander und von $f(x)$ um mehr als eine beliebig vorgeschriebene Grösse δ verschieden sind.

2) Die Reihe (2) convergirt für jeden einzelnen Wert von x, für den

$$\lim_{\alpha=0} \tfrac{1}{2}\{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}$$

einen bestimmten, endlichen Wert hat, und ihre Summe ist gleich diesem Grenzwerte. Da die Function $f(x)$ integrirbar ist, giebt es in jedem noch so kleinen Teile der Strecke $a \dots b$ Stellen, in denen $f(x)$ stetig ist; in ihnen muss also die Reihe gegen den Wert $f(x)$ convergiren.

Unter die Bedingungen des letzten Satzes fallen diejenigen Functionen, welche Herr C. Jordan „Fonctions à oscillation limitée" genannt hat (vgl. F. d. M. XIII. 1881. 185).

Die obige Weierstrass'sche Bedingung, sowie ihre Verallgemeinerung, sind nicht notwendige Bedingungen zur Darstellbarkeit einer Function durch eine Fourier'sche Reihe.

St.

O. Beau. Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. 2. Auflage. Halle. Nebert.

Im ersten Abschnitte werden die Coefficienten der Cosinus- und Sinusreihe durch ein bereits von Herrn Kronecker zu ähnlichem Zwecke benutztes Verfahren (vgl. F. d. M. X. 1878. 183) in Integrale mit unendlichen Intervallen umgeformt. Ist

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_\nu \cos \nu x + \cdots,$$
$$\varphi(x) = \qquad b_1 \sin x + \cdots + b_\nu \sin \nu x + \cdots,$$

so ergeben sich auf diesem Wege die Formeln

$$(1) \quad \begin{cases} a_\nu = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty f(x)\cos(\nu+\eta)x \sin \alpha x \,\dfrac{dx}{x}, \\ b_\nu = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \varphi(x)\sin(\nu+\eta)x \sin \alpha x \,\dfrac{dx}{x}. \end{cases} \qquad (0 < \alpha + \eta < 1)$$

Sie werden sodann direct in die Formeln

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos \nu x \, dx, \quad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x) \sin \nu x \, dx$$

übergeführt.

2. Abschnitt. Man setze in (1) $\alpha = \frac{1}{2}$ und hierauf $\nu + \eta = \alpha$. Durch Integration der so erhaltenen Functionen von $\alpha : \chi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ nach dieser Veränderlichen ergeben sich zwei Formeln, von denen die eine durch weitere Umgestaltungen zu der Fourier'schen Formel

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \cos \alpha(z - x)\, dx \\ = \psi(z) \text{ bez. } \dfrac{\psi(z-0) + \psi(z+0)}{2}, \end{cases}$$

die andere zu der ihr verwandten Gleichung

$$(3) \quad \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \sin \alpha(z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, \frac{dx}{z - x}$$

führt. Und zwar erhält der Herr Verfasser die Formel (2) unter der Voraussetzung, dass $\psi(z)$ innerhalb eines beliebigen endlichen Intervalles eindeutig, endlich und mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten stetig ist und der Dirichlet'schen Bedingung genüge; die Formel (3), worin $\psi(x)$ für $x = z$ verschwinden muss, anscheinend nur unter der weiteren Beschränkung, dass $\psi(x)$ in dem genannten Intervalle stetig ist, welche er sodann durch eine von der Theorie der Sinusreihe unabhängige Betrachtung aufzuheben sucht. Hierauf werden die Formel (3) und ihre Specialisirungen zur Berechnung bestimmter Integrale verwendet, woran

sich einige Folgerungen aus den bisherigen Sätzen schliessen, u. a. eine Darstellung einer Function einer Veränderlichen durch ein n-faches Integral.

Der dritte Abschnitt knüpft an die obigen Integrale $\chi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ an, setzt darin an Stelle von α eine Function einer neuen Veränderlichen ϑ und integrirt nach ϑ. Vermittelst der so entstandenen Gleichungen lassen sich Summen unendlicher Reihen von der Gestalt

$$(4)\qquad \begin{cases} -a_0\lambda(0)+\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}(a_\nu-a_{\nu+1})\lambda(\nu+\frac{1}{2}), \\ \sum\limits_{\nu=0}^{\nu=\infty}(b_\nu-b_{\nu+1})\lambda(\nu+\frac{1}{2}), \end{cases}$$

worin $\lambda(\alpha)$ eine eindeutige, stetige, monotone, differentiirbare Function bedeutet, durch Doppelintegrale, welche (2) bez. (3) ähnlich sind, darstellen. Es folgen Untersuchungen über die Convergenz der Reihen (4) und über die Umkehrbarkeit der Integrationsfolge bei jenen Doppelintegralen. Beispiele zu den entwickelten Formeln bilden den Schluss des Abschnittes.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung der Ausdrücke (1) für die a_ν, b_ν. Es werden die Formeln

$$a_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{f(x).\cos\nu x.\zeta(x)}{\lambda(x)}\,dx,$$

$$b_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\varphi(x).\sin\nu x.\zeta(x)}{\lambda(x)}\,dx,$$

worin $\zeta(x)$ eine gerade oder ungerade Function und $\lambda(x)$ die daraus durch die Gleichung

$$\lambda(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\zeta(x+2m\pi)$$

bestimmte Function bezeichnet, aufgestellt und daraus einige specielle Ausdrücke für die a_ν, b_ν abgeleitet.

Der fünfte Abschnitt enthält eine zweite Methode zur Ableitung der Fourier'schen Integralformeln und ihrer Analoga, welche von der Theorie der trigonometrischen Reihen unabhängig ist und sich auf die Differentiation nach einem hinter dem Integralzeichen stehenden Parameter stützt. St.

C. Arzelà. Sopra una certa estensione di un teorema relativo alle serie trigonometriche. Rom. Acc. L. Rend (4) I. 637-640.

Der Cantor'sche Satz und die von Herrn C. Neumann gegebene Verallgemeinerung desselben, welche im XV. Bande des Jahrbuchs p. 369 angeführt sind, erscheinen als besondere Fälle des folgenden Satzes. „Es sei in der Ebene gegeben eine Schar von unbegrenzten Geraden $y=y_1$, $y=y_2, \ldots$, welche die Gerade $y=y_0$ zur Grenzgeraden haben; auf jeder von ihnen bezeichne man im Intervalle von $x=a$ bis $x=b$ von einander getrennte Segmente $\delta_{r,s}$ in endlicher Anzahl, welche mit der Annäherung der Geraden $y=y_r$ an die Grenzgerade ins Unendliche wachsen kann. Wenn dann für alle Punkte der Intervalle (a, b) auf den Geraden $y=y_1$, $y=y_2, \ldots$ eine Function $f(x, y)$ eindeutig definirt ist, und wenn auf jeder von ihnen Stücke $\delta_{r,s}$ vorhanden sind, in deren jedem Punkte $|f(x, y)|$ grösser ist als eine bestimmte positive Zahl c, wenn ferner $\varphi(y)$ eine für jeden der obigen Werte y_r definirte Function bezeichnet, und wenn in jedem Punkte zwischen a und b die Bedingung erfüllt ist:

$$\lim_{y_r=y_0} \varphi(y_r) f(x y_r) = 0,$$

so muss sein

$$\lim_{y_r=y_0} \varphi(y_r) = 0".$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung eines Satzes, welchen der Herr Verfasser im nämlichen Bande dieser Rendiconti p. 263 mitgeteilt hat. (Siehe Abschn. VII.) St.

H. Poincaré. Sur les séries trigonométriques. C. R. CI. 1131-1134.

Im Anschlusse an eine frühere Note (F. d. M. XIV. 1882. 185) zeigt Herr Poincaré an Beispielen, dass die Summe der Reihe $\Sigma A_p \sin \alpha_p t$ im Falle, dass sie nicht für alle Werte von t gleichmässig convergirt, sowohl zugleich mit t unendlich werden, als auch für $\lim t = +\infty$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ schwanken, somit jeden Wert unendlich oft annehmen kann. St.

E. Cesaro. Sur l'inversion de certaines séries.
Brioschi Ann. (2) XIII. 339-351

Es sei $x = \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x) \ldots$ eine Folge von Functionen, welche der Relation

$$\varepsilon_\alpha[\varepsilon_\beta(x)] = \varepsilon_{\alpha\beta}(x)$$

genügen. Ist ferner

$$(1) \qquad G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) f[\varepsilon_n(x)]$$

und

$$F(n) = h(a) g\left(\frac{n}{a}\right) + h(b) g\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots,$$

wo $a, b, \ldots$ sämtliche Teiler von n bedeuten, so hat man

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} h(n) G[\varepsilon_n(x)] = \sum_{n=1}^{n=\infty} F(n) f[\varepsilon_n(x)].$$

Wenn die Function $g(x)$ die Bedingung

$$(3) \qquad g(x) g(y) = g(xy)$$

erfüllt und $h(x) = g(x)\mu(x)$ ist, wo $\mu(x)$ die von Herrn Mertens eingeführte Function bezeichnet (vgl. Borchardt J. LXXVII. 289), so ist $F(1) = g(1)^2$, sonst aber $F(n) = 0$. Man findet demnach aus (2) als Umkehrung der Reihe (1)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)\mu(n) G[\varepsilon_n(x)].$$

Aus dieser Formel ergeben sich, wenn man $\varepsilon_n(x) = nx$ setzt und für $g(x)$ einen der Ausdrücke

$$1, \quad \tfrac{1}{2}[1-(-1)^x], \ \sin\frac{\pi x}{2}$$

wählt, drei von Tschebyscheff im J. von Liouville (1851) aufgestellte Formeln. Sie werden auf die Fourier'schen Reihen angewandt. Ferner kann man $f(x) = q^x$ (mod. $q < 1$) oder allgemeiner $f(x) = q^x \psi(x)$, wo $\psi(x)$ ebenfalls der Relation (3) genügen soll, setzen. Als Beispiel der auf diese Art erzielten Resultate sei angeführt die Formel

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log s_{nm},$$

worin s_m die Summe der reciproken m^{ten} Potenzen aller natürlichen, σ_m die der reciproken m^{ten} Potenzen aller Primzahlen bedeutet.

Herr Cesaro nimmt für $\varepsilon_n(x)$ auch die Functionen

$$\frac{x}{n},\quad x^n,\quad \frac{xU(n)}{1-xV(n)},$$

worin $U(n)$ und $V(n)$ passend zu bestimmen sind. Um die Reihe (1) umzukehren, kann man $g(n)$ und $h(n)$ auch folgendermassen bestimmen. Wir zerlegen n in seine Primfactoren

$$n = u^\alpha v^\beta w^\gamma \dots$$

und setzen

$$g(n) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots}.$$

$g(1)$ sei 1 und $h(n)$ 1 oder 0, je nachdem n Primzahl ist oder nicht.

Am Schlusse wird in der Formel (2) $h(n)$ sowohl durch $g(n)\nu(n)$, als auch durch $g(n)\lambda(n)$ ersetzt. $\nu(n)$ ist 0, ausser wenn n Potenz einer Primzahl ϖ ist; dann sei $\nu(n) = \log\varpi$. $\lambda(n)$ ist $+1$ oder -1, je nachdem n in eine gerade oder ungerade Anzahl von Primfactoren zerfällt. St.

G. Teixeira. Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle. Ann de l'Éc N (3) II. 321-324.

„Die Reihe

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

wo a_0, a_1, ... rationale Zahlen in reducirter Form bedeuten, kann nicht die Entwickelung einer durch eine algebraische Gleichung zwischen x, y, y' mit ganzzahligen Coefficienten

$$F(x, y, y') = 0$$

definirten Function sein, wenn es einen bestimmten Wert von n giebt, von dem an die Nenner der a_{n+1}, a_{n+2}, ... Primfactoren enthalten, welche beziehentlich grösser als $n+1$, $n+2$, ... sind."

St.

Bendixson. Sur la formule d'interpolation de Lagrange. C. R. CI. 1050-1053, 1129-1131.

Anknüpfend an eine Formel des Herrn Hermite (F. d. M. IX. 1877. 312) zeigt Herr Bendixson zuerst, dass, wenn die Werte $A_1, \dots, A_\nu, \dots$ der Function $f(x)$ in den Punkten $a_1, \dots, a_\nu, \dots$ $(\lim a_\nu = a)$ gegeben sind und $f(x)$ im Punkte $x = a$ regulär ist, man jeden Wert von $f(x)$ in einer hinlänglich kleinen Umgebung von a finden kann durch die Gleichung:

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + A_3''(x-a_1)(x-a_2) + \cdots \\ \qquad \cdots + A_{n+1}^{(n)}(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) + \cdots, \end{cases}$$

wobei die Coefficienten $A_{n+1}^{(n)}$ durch die Formel

$$A_\nu^{(n+1)} = \frac{A_\nu^{(n)} - A_{n+1}^{(n)}}{a_\nu - a_{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

aus den Grössen $A_n = f(a_n)$ zu berechnen sind. Ferner wird der Satz bewiesen: „Sind Grössen

$$A_1, \dots, A_\nu, \dots a_1, \dots, a_\nu, \dots, \qquad (\lim a_\nu = a)$$

gegeben, so drückt die Convergenz der Reihe (1) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass es eine im Punkte a reguläre Function $f(x)$ giebt, welche bei hinlänglich grossem m den Bedingungen

$$A_{m+\nu} = f(a_{m+\nu}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

genügt". Ist der Punkt a für die Function $f(x)$ singulär, so convergirt die Reihe (1) im allgemeinen nicht. In besonderen Fällen jedoch erhält sich die Convergenz und führt zu interessanten Formeln, welche den Gegenstand der zweiten Note bilden.

St.

G. Teixeira. Sur l'interpolation au moyen des fonctions circulaires. Nouv. Ann. (3) IV. 351-359.

Der Verfasser löst die Aufgabe, diejenige homogene ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\sin x$ und $\cos x$, $f(x)$, zu bestimmen, für welche gegeben sind die folgenden Werte:

$$f(a),\quad f'(a),\ldots,f^{(i-1)}(a);$$
$$f(b),\quad f'(b),\ldots,f^{(j-1)}(b);$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(i+j+\cdots=n).$$

Damit ergiebt sich zugleich eine Zerlegung von

$$\frac{f(\sin x,\cos x)}{\sin^i(x-a)\sin^j(x-b)\ldots},$$

wo $f(\sin x, \cos x)$ irgend eine homogene ganze Function $(n-1)^{ten}$ Grades von $\sin x$ und $\cos x$ sein darf, in Brüche, deren Nenner $\sin(x-a),\ldots,\sin^i(x-a)$, $\sin(x-b),\ldots,\sin^j(x-b),\ldots$ sind. Diese Zerlegung wurde im Falle, dass $i=j=\cdots=1$ ist, schon von Schellbach (Ellipt. Integrale p. 99) und im allgemeinen von Hermite (cours d'Analyse p. 321) behandelt. St.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

M. d'Ocagne. Sur certaines déterminations de limites; moyennes limites de deux nombres. Teixeira J. VII. 19-26.

Der Verfasser bestimmt zuerst den Grenzwert des Ausdruckes

$$\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_n)}{n},$$

wenn $\varphi(x)$ eine gegebene Function ist und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Glieder einer arithmetischen Reihe darstellen. Darauf betrachtet er das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$; er bestimmt die Grenzen, gegen welche diese Mittel convergiren, wenn n in's Unendliche wächst, für die Fälle, dass $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Glieder arithmetischer oder geometrischer Reihen sind. Tx. (Lp.)

E. Cesaro. Extrait d'une lettre à M. d'Ocagne.
Teixeira J. VII. 28-39.

Indem der Verfasser auf die vorhergehende Arbeit des Herrn d'Ocagne Bezug nimmt, erweitert er die von jenem erhaltenen Resultate. Er geht von einer Verallgemeinerung des Begriffes „Mittel“ aus; er nennt Mittel der Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$ die Grösse M, die durch folgende Gleichung definirt ist:

$$n\varphi(M) = \varphi(y_1) + \varphi(y_2) + \cdots + \varphi(y_n).$$

Dieser Begriff des Mittels wird darauf noch einmal dadurch erweitert, dass Herr Cesaro ihn durch folgende Gleichung definirt:

$$S(M, M, \dots, M) = S(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

wo S eine symmetrische Function der $y_1, y_2, \dots, y_n$ bezeichnet.

Tx. (Hch.)

O. Fouret. Sur la loi de succession des coefficients dans la formule du binôme. Nouv. Ann. (3) IV. 357-358.

St.

O. Schlömilch. Eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes. Schlömilch Z. XXX. 191-192.

Die ganzen algebraischen Functionen $f_1(\mu)$, $f_2(\mu)$, $f_3(\mu)$, ... sind so zu bestimmen, dass der Summe

$$F(\mu) = 1 + f_1(\mu)x + f_2(\mu)x^2 + f_3(\mu)x^3 + \cdots$$

die Eigenschaft

$$F(\mu)F(\nu) = F(\mu + \nu)$$

zukommt. Es muss

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = \cdots = 0$$

sein, und es bestehen die Differentialgleichungen

$$f'_1(\mu) = c_1, \quad f'_2(\mu) = c_1 f_1(\mu) + c_2,$$
$$f'_3(\mu) = c_1 f_2(\mu) + c_2 f_1(\mu) + c_3, \dots$$

St.

T. R. TERRY, W. J. C. SHARP, W. J. BARTON. Solution of question 7584. Ed. Times XLII. 78.

Die Summe der Reihe, deren $(p+1)^{\text{tes}}$ Glied die Form hat:

$$\frac{(n+p-1)!}{p!}(n-p)2^{n-p},$$

ist Null. Lp.

E. WEISS. Notiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen. Wien. Anz. 63-64; Wien. Ber. XCI 587-596.

Die betrachteten Reihen sind die folgenden:

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} X_r^{(m)} &= 1+\frac{m}{1}x+\frac{m}{2}\binom{m+2r+1}{1}x^2+\cdots \\ &\quad \cdots+\frac{m}{n}\binom{m+nr+n-1}{n-1}x^n+\cdots \\ Y_r^{(m)} &= 1+\binom{m+2r+1}{1}x+\cdots \\ &\quad \cdots+\binom{m+nr+n-1}{n-1}x^{n-1}+\cdots. \end{aligned}\right.$$

Die Summe der ersteren ist eine Potenzfunction; sie genügt nämlich der Relation

$$X_r^{(m)}X_r^{(n)} = X_r^{(m+n)},$$

woraus, wenn man statt $X_r^{(1)}$ X_r schreibt, unmittelbar folgt

$$X_r^{(m)} = X_r^m.$$

X_r erfüllt identisch die Gleichung

$$xX_r^{r+1}-X_r+1=0.$$

Die zweite Reihe hängt mit der ersten durch die Formel

$$Y_r^{(m)} = \frac{1}{m}\cdot\frac{dX_r^{(m)}}{dx}$$

zusammen, woraus sich ergiebt

$$Y_r^{(m)} = \frac{X_r^{m+r+1}}{(r+1)-rX_r}.$$

Die Reihe (A) stimmt im wesentlichen überein mit dem Hauptfalle der Lambert'schen Reihe, mit deren Summirung sich

auch eine Abhandlung von Euler (Acta acad. sc. Petropol. ann. 1779 T. II.) beschäftigt. St.

Th. Muir. Note on a function of two integral arguments. Edinb. Math. Soc. Proc. III. 19-21.

Es handelt sich um die Function:

$$|i,j| = [i]^j + \frac{j}{1}[i]^{j-1} + \frac{j(j-1)}{1.2}[i]^{j-2} + \cdots + 1,$$

wo $[i]^j$ für $i(i-1)\ldots(i-j+1)$ steht. Gbs. (Lp.)

Escary. Remarque concernant la limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Nouv. Ann. (3) IV. 101-102.

Setzt man im n^{ten} Gliede des obigen Ausdruckes $m = n^2\omega$, so hat er bei ins Unendliche wachsenden m und ω den Grenzwert e. St.

E. Cesaro. Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers. Mathesis V. 55-56.

Beweis der symbolischen Formel:

$$S_p = \frac{(n+B)^{p+1} - B^{p+1}}{p+1}.$$

Mn. (Lp.)

C. O. Boije af Gennäs. Sur la sommation des puissances semblables des n premiers nombres entiers. Stockh. Vet. Akad. Bihang 10. 6 S.

Herleitung einer Recursionsformel für $\sum_{k=1}^{k=n} k^p$, die jedoch viel leichter mit Hülfe der Differenzenrechnung hätte erhalten werden können. E.

E. Cesaro. Algorithme isobarique. Nouv. Ann. (3) III. 561-579.

Mit $\overset{m}{S}_p f(x)$ bezeichnet der Verfasser die Summe der Producte von m Factoren, welche dieselbe Function f der m ganzen Zahlen x sind, deren Summe constant $= p$ ist, und zwar heisst m der Grad, p das Gewicht, die Bildung des Ausdrucks isobarischer Algorithmus. Die Theorie desselben hat er in Battaglini G. in dem Artikel „Intorno a talune funzioni isobariche omogenee" (F. d. M. XVI. 1884. 127) gegeben und macht hier Anwendung davon auf die Summe der p^{ten} Potenzen einer Reihe von Grössen und Producten zu p Factoren, auf den Fall, wo diese Grössen die Wurzeln einer Gleichung sind, auf die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen und auf die recurrenten Reihen.

H.

F. G. Teixeira. Note sur les nombres de Bernoulli. Newcomb Am. J. VII. 288-292.

Mit Hülfe der independenten Formeln für den n^{ten} Differentialquotienten einer zusammengesetzten Function von x werden die Coefficienten von x^n in den Potenzreihen für die Functionen

$$(1+e^x)^{-1},\quad (1+e^x)^{-p},\quad \sec x,\quad \sec^p x$$

berechnet. Mit den beiden letzten Potenzreihen beschäftigte sich auch Herr Ely (vgl. F. d. M. XV. 1883. 200). So werden Ausdrücke für die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen erlangt. Bezeichnet E_{2n} die n^{te} Euler'sche Zahl und C_{2n} den Coefficienten von $x^n:(2n)!$ in der Entwickelung von $\sec^{p+1}x$, so ist

$$C_{2n} \equiv E_{2n} (\text{mod.}\, p).$$

Daraus folgt, dass der a. a. O. erwähnte Satz des Herrn Lucas über die Euler'schen Zahlen auch für die C_{2n} gilt; es ist also

$$C_{2n} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{2n+p-1} (\text{mod.}\, p).$$

St.

J. C. d'Oliveira Ramos. Sobre a decomposição das funcções circulares. Teixeira J. VII. 7-12.

Der Verfasser zerlegt den Bruch

$$\frac{f(\sin x, \cos x)}{\sin^{\alpha}(x-a_1)\sin^{\beta}(x-a_2)\dots},$$

in dem $f(\sin x, \cos x)$ eine ganze homogene Function von der Ordnung $\alpha+\beta+\gamma+\cdots-1$ ist, in Partialbrüche von der Form

$$\frac{A\cos^{k-1}(x-a_n)}{\sin^{\alpha-k+1}(x-a_n)}.$$

Er gelangt so zu Formeln, die vom Referenten vorher in den Nouv. Ann. (siehe p. 226 dieses Bandes) veröffentlicht sind, und für den Fall $\alpha=\beta=\gamma=\cdots=1$ zu einer von Herrn Hermite gegebenen Formel. Tx. (Hch.)

E. Cesaro. Sur la série harmonique. Nouv. Ann. (3) IV. 295-296.

Es ist

$$1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+l\sqrt{n(n+1)}+\frac{\theta}{6n(n+1)},$$

wo C die Euler'sche Constante, θ eine Zahl zwischen 0 und 1 bezeichnet. St.

A. Cayley. On the value of $\tan(\sin\theta)-\sin(\tan\theta)$. Mess. XIV. 191.

Beweis, dass dieser Ausdruck gleich $\frac{1}{30}\theta^7+\frac{29}{756}\theta^9+\cdots$ ist. Glr. (Lp.)

Cochez, B. H. Rau, B. Easton. Solution of question 7673. Ed. Times XLII. 38-39.

Die Reihe

$$\Sigma\frac{1}{n\log n(\log\log n)^{\alpha}} \qquad (n=2,3,\dots)$$

ist convergent, wenn $\alpha>1$, divergent, wenn $\alpha\leq 1$.

Lp.

KÖPCKE. Ueber die Reihe $\sum_1^\infty \sin(n!x\pi)$. Hamb. Mitt. 105-107.

Die Reihe $\sum_1^\infty \cos(n!x\pi)$, welche für alle rationalen x divergirt und auch für solche irrationalen, für die $\sum_1^\infty \sin(n!x\pi)$ convergirt, ist convergent für den Wert

$$x = \frac{1}{4!2} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!2} - \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!2} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!2} + \frac{1}{11!} + \cdots$$

St.

A. R. JOHNSON. Expansion of a function in a functional series. Mess. XV. 81-87.

Die Methode aus Fourier's Wärmetheorie in ihrer Anwendung auf die Entwickelung einer Function in eine allgemeine Functionalreihe unter der Form:

$$f(x) = A_1\,\Phi(a_1 x) + A_2\,\Phi(a_2 x) + \cdots + A_n\,\Phi(a_n x)$$

Eine symbolische Methode wird angewandt, in der Γ so beschaffen ist, dass $\Gamma\,\frac{f(0)}{\Phi(0)} = \frac{f'(0)}{\Phi'(0)}$.

Glr. (Lp.)

CH. M. SCHOLS. De half-convergente reeks ter berekening van de integraal

$$\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^{\infty} e^{-z^2}\,dz.$$

Amst. Versl. en Meded. (3) II. 40-55.

DELFT. Annales de l'École Polyt. I. 213-227.

Bekanntlich kann dies Integral nicht durch directe Integration gefunden werden, vielmehr muss man für die Ausrechnung zu Reihenentwicklungen seine Zuflucht nehmen. Dies ist schon wiederholt ausgeführt, u. a. durch Laplace, dessen Reihe sich für grosse Werte von Z eignet. Zur Berechnung des Restes dieser

Reihe werden einige einfache Ausdrücke abgeleitet, die eine sehr grosse Annäherung ergeben. Durch einige Zahlenbeispiele wird gezeigt, welche Annäherung durch diese Ausdrücke erhalten werden kann. Die Resultate werden zum Schlusse mit denen verglichen, welche durch Radau (Annales de l'observatoire de Paris XVIII) für die gleiche Restentwickelung erhalten sind.

G.

J. W. L. Glaisher. On the square of the series in which the coefficients are the sums of the divisors of the exponents. Mess. XV. 156-163.

Die Reihe, auf welche die Arbeit Bezug hat, ist

$$\sigma(1)x+\sigma(2)x^2+\sigma(3)x^3+\sigma(4)x^4+\cdots,$$

wo $\sigma(n)$ die Summe der Divisoren der Zahl n bedeutet. Der Verfasser findet, dass das Quadrat dieser Reihe gleich ist:

$$\tfrac{1}{12}[\{5\sigma_3(2)-11\sigma(2)\}x^2+\{5\sigma_3(3)-17\sigma(3)\}x^3 \\ +\{5\sigma_3(4)-23\sigma(4)\}x^4+\cdots],$$

wo $\sigma_3(n)$ die Summe der Kuben der Divisoren von n bezeichnet. Das allgemeine Glied dieser Reihe ist $\{5\sigma_3(n)-(6n-1)\sigma(n)\}x^n$. Man kann dies Theorem auch in der rein algebraischen Form schreiben:

$$12\left\{\sum_1^\infty\frac{nx^n}{1-x^n}\right\}^2=\sum_1^\infty\frac{(5n^3+1)x^n}{1-x^n}-\sum_1^\infty\frac{6n^2x^n}{(1-x^n)^2}.$$

Das Resultat wird mit Hülfe der Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen erhalten:

$$\frac{4K(I+G+E)}{\pi^2}=1-24\sum_1^\infty\sigma(n)q^{2n},$$

$$\frac{16K^2(I+G+E)^2}{\pi^4}=1+48\sum_1^\infty\{5\sigma_3(n)-6n\sigma(n)\},$$

die bewiesen werden.

Glr. (Lp.)

E. J. Nanson. On a certain inequality. Mess. XIV. 192.

Vereinfachter Beweis der von Herrn G. F. Walker in Mess. XII. 87 (F. d. M. XIV. 1882. 192) gegebenen Ungleichung.
Glr. (Lp.)

Markoff. Extrait d'une lettre.

T. J. Stieltjes. Note à l'occasion de la réclamation de M. Markoff Ann. de l'Éc. N. (3) II. 183-184.

Es handelt sich um die Priorität bezüglich gewisser Ungleichungen und ihres Beweises (F. d. M. XVI. 1884. 236, 242). Herr Stieltjes fügt eine neue Eigenschaft der a. a. O. erwähnten Coefficienten A_k hinzu.
St.

P. G. Tait. Summation of certain series. Edinb Math. Soc. Proc. III. 107-108.

Die Reihen kommen bei einem Versuche vor, die verschiedenen möglichen Formen von Knoten beliebiger Ordnung aufzuzählen. Nur ein Auszug aus dem in der Gesellschaft vorgetragenen Artikel „On the detection of amphicheiral knots, with special reference to the mathematical processes involved" wird in den Proceedings mitgeteilt.
Gbs. (Lp.)

Schulze. Zur Geschichte der hypergeometrischen Reihe. Hamb Mitt. 110-111.
St.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

H. Laurent. Traité d'analyse. Tome I. Calcul différentiel, applications analytiques et géométriques.
Paris, Gauthier-Villars. XII u. 392 S. 8°.

Das vollständige Werk soll nach der Vorrede den Umfang von sechs Bänden erhalten und ist als Compendium der gesamten Analysis für solche bestimmt, die nicht in der Lage sind, eine grössere Anzahl von Werken über die einzelnen Disciplinen zu benutzen; man findet daher viele Gegenstände abgehandelt, denen sonst selbständige Bücher gewidmet werden.

Der vorliegende erste Band enthält die Differentialrechnung bis zur Bestimmung der Maxima und Minima nebst der Behandlung der unbestimmten Symbole einschliesslich. Nach einem einleitenden Capitel über die Begriffe der Continuität und der complexen Zahlen wird die Reihentheorie behandelt (S. 11-62), danach die Theorie der Ableitungen mittels der Grenzmethode und sofort die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe (S. 65-91). Ein Capitel über die Differenzen der Functionen einer Veränderlichen (S. 97-116) leitet nun erst zur Theorie der Differentiale von Functionen einer (S. 119-129) und mehrerer (S. 133-155) Veränderlichen über. Das nächste Capitel behandelt die Functionaldeterminanten (S. 158-179) und ein folgendes die Functionen complexer Veränderlichen. Die Vertauschung der Variablen, u. a.

it einer Anwendung auf elliptische Coordinaten, wird in einem esonderen Capitel (S. 194-221) gelehrt. Als vollständig neu in nem Lehrbuche der Differentialrechnung sind die beiden folgenn Capitel über die Theorie der linearen Substitutionen (S. 227-279), n kurzer Abriss der algebraischen Formen, und über die Eliination (S. 286-337), ein Abschnitt aus der Theorie der Gleiungen, zu bezeichnen. Die letzten zwei Capitel enthalten die ıflösung der Aufgaben über extreme Werte von Functionen . 347-364) und über solche Werte, die sich unter singulärer rm darstellen (S. 370-377).

Der Verfasser bekennt sich nachdrücklich als Schüler von uchy und sucht überall den Standpunkt seines berühmten eisters festzuhalten. Die neueren deutschen Untersuchungen er die abgehandelten Gegenstände finden daher keine Berückchtigung, sind dem Verfasser vielleicht auch nicht bekannt georden, wie z. B. die über den Zahlenbegriff. In der ersten ıte wird die Frage nach der Existenz von Functionen, die ine Ableitung besitzen, für eine offene erklärt; die bezüglichen itersuchungen von Herrn Weierstrass werden dabei nicht erähnt. Wenn es gilt, für Cauchy oder einen Landsmann des erfassers eine Entdeckung zu beanspruchen, so wird dies herrgehoben, aber in der durchaus verwerflichen Manier, dass eder Ort noch Zeit der bezüglichen Veröffentlichung angedeutet ird. Da nun Entdeckungen anderer Geometer nicht als ihnen kommend gekennzeichnet sind, so wäre es wohl besser, gar inen Namen zu erwähnen.

Den einzelnen Abschnitten sind Uebungsaufgaben beigegeben, anche leicht, andere so schwer, dass auch hier die Quelle, nicht oss der Name des beigedruckten Autors genau hätte bezeichnet erden sollen.

Lp.

. Gambardella. Lezioni di calcolo infinitesimale Napoli. Pellerano.

Es ist zur Genüge bekannt, dass die Grundlagen der Inaitesimalrechnung eine vollständige Umwälzung in den letzten

Jahrzehnten erlitten haben, zumal da der Satz, dass jede Function eine Ableitung besitze, als nicht allgemein richtig erkannt wurde. Diese neuere Auffassung in der Infinitesimalrechnung, die auf eine scharfe Begründung des Functionsbegriffes im wesentlichen hinauskommt, scheint Herr Gambardella gar nicht beachtet zu haben. Anfangs definirt er als Function einer Variabeln eine Grösse, deren Werte von denen der Veränderlichen abhängen, ohne auf die verschiedenen möglichen Arten von Abhängigkeit einzugehen. In der Folge erscheint aber die Function durchgängig als ein analytischer Ausdruck; so liest man z. B (S. 5): „Will man die Grenze einer Function für eine angegebene Grenze der Veränderlichen bestimmen, so braucht man nur in die Function statt der Veränderlichen deren Grenze einzusetzen" u. s. w. Aber es findet sich noch Schlimmeres. Der Verfasser nimmt stillschweigend an, jede Function sei durch eine Curve darstellbar (siehe z. B. S. 132); eine Annahme, welche, wie bekannt, mit dem oben angedeuteten unrichtigen Satze völlig gleichbedeutend ist.

Die Vernachlässigung der modernen functionentheoretischen Untersuchungen wird noch an manchen andern Stellen sichtbar. So wendet der Verfasser die Reihenintegration wiederholt an (S. 121, 288), ohne zu untersuchen, wann diese Operation erlaubt ist. Ferner glaubt er beweisen zu können (S 167), dass:

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{d^2 f}{dy\,dx}$$

ist, ohne die Annahme vorauszuschicken, dass die ersten und zweiten Abgeleiteten von f stetig sind; und man weiss doch, dass diese Bedingung zum Bestehen der obigen Gleichung notwendig ist.

Weitere Fehler sind folgende: Der Beweis § 180 hat keinen Sinn, weil in ihm ein und derselbe Buchstabe in einem Ausdrucke zwei verschiedene Bedeutungen erhält. Die Aufstellung der Taylor'schen Reihe enthält einen störenden Fehler; in der That, da k in der ersten Formel S. 261 offenbar von b und a abhängt, so muss dasselbe in der zweiten Formel von b und x abhängen, und kann daher nicht in der darauffolgenden Derivation als

constant betrachtet werden, wie dies im Texte geschieht. Der Satz (S. 163-4), dass die Taylor'sche Entwickelung brauchbar ist, sobald alle Abgeleiteten von $f(x)$ im Intervalle $x \ldots x+h$ stetig sind, ist nicht streng bewiesen; denn es folgt nicht notwendig aus der ausgesprochenen Voraussetzung, dass $\lim f^n(x+\theta h)$ für $n=\infty$ endlich sei. S. 318 wird die Lösung $\frac{dF}{dy}=\infty$ nicht beachtet. Ausserdem kann man die Fortlassung der Theorie der Singulärlösungen der Differentialgleichungen selbst in einem elementaren Lehrbuche nicht billigen, um so mehr, als die Theorie der Enveloppen ausführlich erörtert wird.

Einige Teile des Buches sind beachtenswert. Ueberhaupt sind im vorliegenden Werke die geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung ganz sorgfältig behandelt; wir heben die Theorie der Singulärpunkte und die der Epicykloiden besonders hervor. Vi.

W. J. Millar. An introduction to the differential and integral calculus with examples of application to mechanical problems. London. Blackie and Son.

Nach dem Referate in Nature, 3. Dec. 1885, p. 99 ein für studirende Techniker geschriebenes, elementares Lehrbuch, das sich durch klare Darstellung und sorgfältige Wahl der Beispiele aus dem Gebiete der Mechanik auszeichnet.

Lp.

L. Huebner. Die Elemente der höheren Analysis ohne Benutzung unendlich kleiner Grössen neu dargestellt. Pr. Schweidnitz.

Die Schrift beginnt mit so vielen unrichtigen Aufstellungen, dass kein verständlicher Gedankeninhalt übrig bleibt. (Nachweis in Hoppe Arch. (2) III. Lit. B. p. 2.) H.

J. A. Serret. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweiter Band: Erste Hälfte, Integralrechnung. Zweite Hälfte, Differentialgleichungen. Leipzig. Teubner.

Vgl. F. d. M. XVI. 1884, p. 224-226. Lp.

H. Amstein. L. A. Sohncke's Sammlung von Aufgaben aus der Integralrechnung. Fünfte verbesserte Auflage. Halle. H. W. Schmidt. VIII u. 300 S. gr. 8°.

H. Amstein. Figurentafeln zur Sohncke-Amstein'schen Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Fünfte Auflage. Zweiter Teil, enthaltend 19 Figurentafeln zur Integralrechnung. Halle. H. W. Schmidt.

Die alte Sohncke'sche Sammlung von Uebungsaufgaben ist von Herrn Amstein zuerst 1876 zweckmässig vermehrt worden, so dass sie allen billigen Ansprüchen völlig entsprach. Die Thatsache, dass eine neue Auflage dieser auf den doppelten Umfang vermehrten Sammlung notwendig geworden ist, zeigt, dass der vom jetzigen Verfasser 1876 ausgesprochene Wunsch erfüllt ist, durch diese Neubearbeitung zur Erleichterung der mathematischen Studien beizutragen. Lp.

W. Jochnick. Exempel till det vigtigaste af differential- och integralräkningen. Förra häftet. Differentialräkning. Stockholm. Norstedt. 8°. 4) u. 166 u. V S.

Beispielsammlung zur Differentialrechnung. E.

O. Stolz. Die unendlich kleinen Grössen. (Fortsetzung.) Berichte des naturw.-med. Vereins in Innsbruck. XIV. 37-43.

Ueber den ersten Artikel gleichen Titels ist F. d. M. XVI. 1884. 48 berichtet worden. Zum besseren Verständnisse des vorliegenden Aufsatzes ist es jedoch notwendig, auf jenen ersten Artikel zurückzugreifen.

Nach Cauchy versteht man unter einer unendlich kleinen Grösse eine Veränderliche, welche sich der Grenze Null nähert. In der älteren Literatur erscheinen dagegen die unendlich kleinen Grössen zumeist als von den extensiven Grössen, beziehungsweise von den diese darstellenden Zahlen, wesentlich verschieden. Derartiger unendlich kleiner Grössen bedarf gegenwärtig die Analysis nicht mehr. Wenn man sich indes die Aufgabe vorlegt, Grössen von solchen Eigenschaften zu definiren, wie sie die älteren Analysten den unendlich kleinen Grössen beilegten, so liegt folgende Theorie nahe. Man bilde ein System von Functionen von x, welche bei einem und demselben Grenzübergang von x gegen Null convergiren und der Forderung genügen, dass jede rationale Function von beliebig vielen unter ihnen bei diesem Grenzübergang von x einen Grenzwert besitzt, und ordne einer jeden derselben $f(x)$ eine neue Grösse zu, welche der Verfasser das Moment von $f(x)$ nennt und mit $\mathfrak{u}(f)$ bezeichnet. Alsdann setze man fest, dass zwei Grossen $\mathfrak{u}(f)$ und $\mathfrak{u}(f_1)$ einander gleich seien, falls $\lim(f:f_1)$ gleich 1, und dass $\mathfrak{u}(f)$ grösser als $\mathfrak{u}(f_1)$ sei, falls dieser Grenzwert grösser als 1 ist. Es lassen sich hierauf für das neue Grössensystem und eine zweckmässige Erweiterung desselben auch die vier Species definiren und zwar in der Art, dass man mit den so gewonnenen Grössen in der Hauptsache, d. h. abgesehen von wenigen Additions- und Subtractionsregeln, so rechnen kann wie mit den absoluten Zahlen. Lp.

E. Schimpf. Untersuchungen aus der Infinitesimalrechnung. Bochum. Stumpf.

Der Begriff des bestimmten Integrals, dargestellt als Grenzwert einer Summe, wird hier derart erweitert, dass der allgemeinere das Integral, den primitiven und den derivirten Functionswert als Specialfälle in sich begreift. Sei z complexe Variable,

die von a bis b variirt, ν unendlich grosse ganze Zahl, das Intervall in $\nu+1$ unendlich kleine Differenzen $z_1-z_0=dz_0$, etc. geteilt; dann soll sein

$$\int_a^b f(z)dz^n = \lim \sum_0^\nu \frac{n}{1}\frac{n+1}{2}\cdots\frac{n+\nu+1}{\nu} f(z_\nu)\,dz_\nu^n.$$

Hiermit wird eine zulässige Verschiebung der ganzen z-Reihe durch Substitution von $z_\lambda+\frac{c}{\nu}$ für z_λ verbunden, wirkungslos für stetige Functionen f. Bei Unterbrechungen der Stetigkeit entsteht eine Differenz, mit ihr die Frage, ob sie von der Constanten c abhängig sei. Doch kommt die Verschiebung nicht weiter vor. Es ist bemerkenswert, dass aus der Definition fliesst:

$$\int_a^b f(z)dz^1 = \int_a^b f(z)dz; \quad \int_a^b f(z)dz^0 = f(b); \quad \int_a^b f(z)dz^{-1} = \frac{df(b)}{db},$$

dass also der Uebergang von einer Function zu ihrem Integral und Differential stetig, durch Variation von n, vollzogen werden kann. Der grösste Teil der Abhandlung besteht nun in Berechnung der so erweiterten Integralgrössen für specielle Functionen f und specielle Teilungsgesetze, Untersuchung und Discussion der Resultate. Einige der gewöhnlichen Theorie analoge Sätze werden auch entwickelt. H.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

G. Teixeira. Applicações da formula que dá as derivadas de ordem qualquer das funcções de funcções. Teixeira J. VII. 156-165.

Der Zweck des Verfassers ist, aus der bekannten Formel

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n! \frac{d^i y}{du^i}(u')^a (u'')^b \dots (u^{(n)})^l}{a! b! \dots l! (2!)^b (3!)^c \dots (n!)^l},$$

$$a + 2b + 3c + \dots + nl = n, \quad i = a + b + \dots + l,$$

welche die n^{te} Ableitung von y ausdrückt, das durch die Gleichungen

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

definirt ist, einige Formeln abzuleiten, welche der Analysis angehören, und zwar folgende:

1) Den Ausdruck der Legendre'schen Polynome.
2) Die Jacobi'sche Formel für die $(n-1)^{te}$ Ableitung der Function $(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$.
3) Die Reihenentwickelung von arc(tang x).
4) Die Reihenentwickelung von sin(sin x), cos(sin x), etc.
5) Die Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.
6) Die Ableitungen des Quotienten zweier Functionen.
7) Die Ableitungen der inversen Functionen.
8) Die Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

Tx. (Hch.)

E. Cesaro. Dérivées des fonctions de fonctions.
Nouv. Ann. (3), IV. 41-55.

Der Verfasser entwickelt den n^{ten} Differentialquotienten von $\varphi(e^x)$, $\varphi(\log x)$, etc. und bestimmt die Coefficienten durch Specialisirung von φ; dadurch ergeben sich symbolische Ausdrücke, die durch Integration und Anwendung des isobarischen Algorithmus zu einer grossen Anzahl von Relationen führen. H.

Chrystal. On certain formulae for repeated differentiation. Edinb. Math. Soc. Proc. III. 94-95.

Dieser Artikel erörtert eine Methode, schnell die Entwickelungen von $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (y^n)$ und von $\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^k y^n)$ zu erhalten, die in der Theorie der ebenen Curven oft verlangt werden.

Gbs. (Lp.)

G. Torelli. Un problema sulle espressioni differenziali.
Brioschi Ann. (2) XIII. 23-38.

In doppelter Erweiterung des Problems von Pfaff und des einen Schritt weiter geführten Problems von Ricci (l. c. XII. 135, F. d. M. XVI. 1884. 230) wird hier das allgemeinere Problem behandelt: Gegeben ist ein Differentialausdruck vom Grade r:

$$\varphi = \sum_1^n a_{s_1 \dots s_r} dx_{s_1} \dots dx_{s_r},$$

wo die Indices-Gruppe $s_1, \dots, s_r$ eine Disposition mit Wiederholung der Zahlen 1, 2, ..., n, die Summe auf alle möglichen Dispositionen ausgedehnt ist, und die Coefficienten a, Functionen der n Variabeln x, bei veränderter Reihenfolge der Indices unverändert bleiben. Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gesucht, damit sich der Ausdruck φ in einen andern vom Typus

$$\mu \sum_1^{n-1} c_{i_1 \dots i_r} du_{i_1} \dots du_{i_r}$$

transformiren lässt, wo die c Functionen der $n - 1$ Variabeln u sind —, und es soll für diesen Fall die Transformation ausgeführt werden. Ferner wird das Pfaff'sche Problem aus anderm Gesichtspunkt erweitert. Man hat die r Gruppen von n Unabhängigen

$$x_{h1},\ x_{h2}, \dots, x_{hn} \qquad (h = 1, 2, \dots, r)$$

und den Differentialausdruck

$$\psi = \sum_1^n a_{s_1 \dots s_r} dx_{1s_1} \dots dx_{rs_r},$$

wo die Coefficienten a Functionen der nr Variabeln x (verschieden für verschiedene Reihenfolge der Indices) sind. Man sucht die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit sich ψ mittels r distincter Substitutionen der r Gruppen von x in einen Ausdruck

$$\mu \sum_1^{n-1} c_{i_1 \dots i_r} du_{1i_1} \dots du_{ri_r}$$

transformiren lässt, wo die c Functionen der $(n - 1)r$ Variabeln u,

ihrerseits wie auch μ von den nr Variabeln x abhängig sind — die Transformation soll unter dieser Voraussetzung ausgeführt werden. Beide Probleme werden nach analogem Verfahren gelöst. H.

G. Torelli. Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali. Annali del R. Ist. tecnico e naut. di Napoli. II.

Herr Casorati hat bewiesen (Chelini, Coll. math. p. 307; F. d. M. XIII. 1881. 236), dass, wenn man mit g die Discriminante der Gleichung bezeichnet:

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{i=m} f_i(u,v)\omega^{m-i} = 0,$$

und mit G die Discriminante derjenigen Gleichung, die aus der Elimination von ω zwischen (1) und ihrer Ableitung

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{i=m}\left(\frac{\partial f_i}{\partial u} + \frac{\partial f_i}{\partial v}\frac{dv}{du}\right)\omega^{m-i} = 0$$

folgt die Beziehung besteht:

$$(3)\qquad G = gk^2,$$

wo k eine ganze rationale algebraische Function der ersten Ableitungen der Functionen f_i ist. (Inbetreff des Falles $m = 2$ vergleiche man eine Arbeit desselben Verfassers in Brioschi Ann. (2) VII, F. d. M. VIII. 1876. 182.

Herr Torelli gelangt auf einem anderen Wege zur Gleichung (3); ausserdem, während Herr Casorati sich auf die Aufstellung des Ausdruckes von k für $m = 2$ beschränkt, und zufolge einer Aeusserung des Herrn Brioschi eine Methode zur Auffindung für $m = 3$ und $m = 4$ angegeben hat, findet Herr Torelli denselben in der Form einer Determinante von der Ordnung $m-1$.

La. (Lp.)

E. Goursat. Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 255-288. C. R. CI. 309-312.

Der Satz des Herrn Darboux (Darb. Bull. (2) V. 376—384 und 395—424; s. F. d. M. XIII. 1881. 209 und XIV. 1882. 203), dass, wenn für irgend eine Function f beliebig vieler Variablen x_i das n^{te} totale Differential $d^n f$ ein Teiler von $d^{n+1} f$ ist, dasselbe auch ein Teiler aller höheren Differentiale ist, wird zunächst dahin ausgedehnt, dass ein gemeinsamer Factor von $d^n f$ und $d^{n+1} f$ auch Factor aller höheren Differentiale ist. Dies führt zu der Aufgabe, alle Functionen f zu bestimmen von der Beschaffenheit, dass $d^n f$ und $d^{n+1} f$ durch denselben Factor teilbar sind. Ist der gemeinsame Teiler linear in Bezug auf die Differentiale dx_i, so ist die Lösung durch das System

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \cdots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u) = 0, \\ f = F(x_1, x_2, \ldots, x_\mu), \end{cases}$$

worin u zu eliminiren ist, gegeben; $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu, \psi$ bezeichnen beliebige Functionen von u und F ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in den x_i, dessen Coefficienten willkürliche Functionen von u sind. Im Falle, dass der gemeinsame Factor eine p^{te} Potenz einer in den dx_i linearen Function ist, ergiebt sich

$$f = \int_0^u [x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \cdots + x_n\varphi_\mu(u) + \psi(u)]^{p-1} F_1(x_1, \ldots, x_\mu)\,du,$$

wo die obere Grenze durch die Gleichung (1) bestimmt ist.

Ist endlich der gemeinsame Factor nicht linear in den dx_i und auch keine Potenz einer linearen Function, dann giebt es zwei Formen für f:

$$(\text{I})\qquad f = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\sqrt{R(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)},$$

wo Q ein Polynom vom Grade $n-2$ und R eine ganze Function 2ten Grades ist;

$$(\text{II})\qquad f = \varphi_0\left(\frac{R}{u}\right)^p + \varphi_1\left(\frac{R}{u}\right)^{p-1} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(\frac{R}{u}\right) + \varphi_p,$$

wo φ_i eine ganze Function vom Grade $n+p-1-q(p-i)-i$, R eine ganze Function vom Grade q und u eine lineare Function ist. Wie unmittelbar ersichtlich, kann zu jeder Lösung ein willkürliches Polynom vom Grade $n-1$ hinzugefügt werden. Der Verfasser giebt auch an, wie in jedem Falle der gemeinsame Factor von $d^n f$ und $d^{n+1} f$ gefunden werden kann. H.

H. DE LA GOUPILLIERE. Propriétés nouvelles du paramètre différentiel du second ordre des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes. C. R. CI. 18-19.

Der Verfasser untersucht die n-mal wiederholte Operation des Differentialparameters, nach Lamé Augment genannt, an Functionen dreier unabhängigen Variabeln, für den besonderen Fall, wo die behandelten Functionen direct beliebig nur von bestimmten „typischen" Functionen abhängig sind, d. h. von solchen, dass die Wiederholung der Operation den Charakter nicht ändert. Diese Eigenschaft besitzen die Systeme von Kugeln und von Rotationscylindern mit parallelen Axen. Die Ausführung wird nicht mitgeteilt, dagegen sind zwei Probleme angegeben, die sich mittels der Theorie der Augmente n^{ter} Ordnung leicht lösen lassen, ohne dieselbe schwierig sein würden. (S. das folgende Referat.) H.

H. DE LA GOUPILLIERE. Propriétés nouvelles du paramètre différentiel du second ordre de plusieurs variables indépendantes. Brux. Soc. sc. Ann. IX. B. 151-180.

Man bezeichne durch δ die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Die Berechnung von $\delta^n f[\varphi(x, y, z)]$ wird einfach, sobald φ so beschaffen ist, dass $\delta f(\varphi) = F(\varphi)$, wie auch sonst f beschaffen ist. Der Verfasser beweist, dass dies nur eintreten kann, wenn φ = const. die Gleichung concentrischer Kugeln oder coaxialer Umdrehungscylinder ist. Er untersucht darauf, in welchem Falle

$$\delta f[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] = F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

ist. Die gefundenen Resultate wendet er auf die Erforschung von $\delta^n f$ in verschiedenen Fällen an; darauf verallgemeinert er noch die erhaltenen Formeln, indem er die Operation δ durch die Beziehung

$$\delta = P_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+P_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+P_p\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$$

definirt annimmt in dem Falle, wo $P_1, P_2, \dots, P_p$ Constanten sind, p gleich 2, 3 oder einer grösseren Zahl ist. (Siehe das vorangehende Referat.) Mn. (Lp.)

A. Cayley. On a differential operator. Mess. XIV 190-191.

Verification des Satzes von Herrn MacMahon, dass, wenn

$$1 + bx + cx^2 + \cdots = (1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)\dots,$$

dann jede „nicht unitare" Function der Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ durch die Operation

$$d_b + bd_c + cd_d + \cdots$$

auf Null reducirt wird. Glr. (Lp.)

T. B. Sprague. Note on the evaluation of functions of the form 0^0. Edinb. Math. Soc. Proc. III. 70-77.

Gbs.

E. B. Elliott. On conjugate maxima and minima. Mess. XIV. 182-185.

Man denke sich n unter einander verbundene Grössen A_1, $A_2, \dots, A_n$, die fähig sind zu variiren und zwar derartig, dass das Festhalten irgend einer von ihnen den Aenderungen der anderen Beschränkungen auferlegt. Man nehme ferner an, dass, indem man alle mit Ausnahme von einer, z. B. $A_2, A_3, \dots, A_n$, constant und zwar bezw. gleich $a_2, a_3, \dots, a_n$ setzt, man imstande sei, die möglichen Maximal- und Minimal-Werte der noch übrigen Grösse A_1 zu bestimmen. Es sei a_1 einer der so bestimmten Werte von A_1. Dieser Aufgabe entsprechen $n-1$ conjugirte Aufgaben erster Ordnung, von denen die eine typische wie folgt aufgestellt werden möge. Es möge A_1 constant und zwar gleich seinem Werte a_1 gehalten, alle übrigen, ausgenommen A_r, constant belassen werden und zwar bezw. gleich $a_2, \dots, a_{r-1}$, $a_{r+1}, \dots, a_n$ wie zuvor. Dann ist im allgemeinen a_r ein Maximal- oder ein Minimal-Wert der einen veränderlichen Grösse A_r,

und die Unterscheidung zwischen dem Falle eines Maximum oder Minimum hängt nur von den bezüglichen Zeichen von $\frac{dF}{da_1}$ und $\frac{dF}{da_r}$ ab. Glr. (Lp.)

F. Haluschka. Reciproke Maxima und Minima. Schlömilch Z. XXX 57-59.

Sind u und v Functionen von x und y, und nehmen bei constantem x beide gleichzeitig zu oder ab, so tritt bei constantem v ein Maximum oder Minimum von u unter derselben Bedingung ein, wie bei constantem u ein Minimum oder Maximum von v. Nach Beweis dieses Satzes wird Anwendung auf gleichseitige Vielecke gemacht. H.

A. Enneper. Ueber das Maximum eines Vierecks von gegebenen Seiten. Gött. Nachr 175-180.

Der Verfasser will eine „möglichst einfache Herleitung“ des Satzes geben, dass der Inhalt des Vierecks ein Maximum ist, wenn sich dasselbe einem Kreise einbeschreiben lässt. Der Ausgangspunkt wird von der analytischen Geometrie hergenommen, und die Rechnung beansprucht sechs Seiten. Demnach kann die Ableitung des bekannten und oft bewiesenen Satzes nicht gerade einfach genannt werden. Die Existenz eines Minimums, das ebenfalls auftreten kann (Vgl. die bezügliche Notiz des Referenten in Kronecker J. XCVI. 78—81), ist übersehen worden. Lp.

H Hennessey. On the geometrical construction of the cell of the honey-bee. Lond R. S. Proc. XXXIX. 253-254.

Das wohlbekannte Problem der Bienenzelle bietet ein interessantes Beispiel geometrischer Maxima und Minima. Im Jahre 1743 teilte Maclaurin der Royal Society eine im Bande XLII der Transactions veröffentlichte Lösung mit, und es scheint, dass

die Vergleichung zwischen mathematischen Resultaten und Winkelmessungen an den wirklichen Zellen ausgeführt wurde. Die vorliegende Notiz enthält eine einfache Methode, die dem Verfasser zur Construction der Figur einfiel, ohne dass Winkel gebraucht würden, und er zeigt, wie ein Modell der Zelle leicht in Cartonpapier mit Hülfe des Zirkels construirt werden kann. (Der Uebersetzer verweist im übrigen wegen der Geschichte des Problems auf die Arbeit von Herrn Müllenhoff, über welche F. d. M. XV. 1883. p. 213 berichtet ist.) Cly. (Lp.)

A. Mukhopâdhyây. Solution of question 1927.
Ed. Times XLIII 132-133.

Die von Herrn Burnside einst gestellte und im Bd. VIII der Ed. Times behandelte Aufgabe, den Kegelschnitt kleinster Excentricität zu finden, der durch vier gegebene Punkte geht, wird hier vom Verfasser nach einfachster Art durch Behandlung der Gleichung in schiefwinkligen Coordinaten nochmals vorgenommen. Für den Fall der Ellipse hat bekanntlich Steiner eine ungemein einfache Lösung angegeben (Werke, I. 121). Lp.

R. A. Roberts. On triangles of maximum and minimum area inscribed in a plane cubic. Mess. XV 24-25.

Die Aufgabe besteht darin, der Curve ein Dreieck so einzubeschreiben, dass die Tangenten in den Ecken die Gegenseiten in Punkten treffen, die auf einer gegebenen Geraden liegen, nämlich der Geraden im Unendlichen. Wenn dies für eine Curve dritter Ordnung der Fall ist, so muss das Dreieck die Curve abermals in drei Punkten treffen, die in einer Geraden liegen. Nun giebt es nach der Theorie dieser Curven drei unterschiedliche Systeme solcher Dreiecke für die Curve ohne Singularitäten, eins für die Curve mit Doppelpunkt, keins für die Curve mit einer Spitze. Der Verfasser findet 48 Dreiecke in dem nicht singulären Fall, 9 in dem Falle eines Doppelpunktes.

Glr. (Lp.)

CHRYSTAL. On a method for obtaining the differential equation to an algebraical curve. Edinb. Math. Soc. Proc. III. 95-100. Gbs.

Capitel 3.

Integralrechnung.

L. KRONECKER. Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. Berl. Ber. 841-862.

Die Formel, von welcher in der vorliegenden Abhandlung eine grosse Zahl interessanter und wichtiger Anwendungen entwickelt werden, lautet folgendermassen:

$$(J)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx \\ = \sum_{1}^{n}{}_h \int_{x_0}^{x} d[f^{(h-1)}(x)\,g^{(n-h)}(-x)]. \end{cases}$$

Man verificirt dieselbe ohne weiteres, indem man beiderseits nach x differentiirt. Die Anwendungen sind die folgenden:

1) Es entsteht aus (J) die Taylor'sche Entwicklung, wenn man die Integrationsvariable mit z anstatt mit x bezeichnet und

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz, \quad g(z) = \frac{(x+z)^n}{n!}$$

setzt.

2) Bei der Annahme $g(x) = e^{ux}$ entsteht die Formel:

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(x)e^{-ux}dx - u^n \int_{x_0}^{x} f(x)e^{-ux}dx$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_h u^{n-h}[f^{(h-1)}(x)e^{-ux} - f^{(h-1)}(x_0)e^{-ux_0}].$$

3) Nimmt man für $f(x)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, für $g(x)$ die Function $(x+x_0)^n(x+x_1)^n$ und setzt die obere Grenze

der in der Formel (J) auftretenden Integrale gleich x_1, so ergiebt sich der folgende für die Theorie der mechanischen Quadratur wichtige Satz:

Sei

$$\varphi(x) = \frac{d^n[(x-x_0)(x-x_1)]^n}{dx^n},$$

so ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

wenn $f(x)$ irgend eine ganze Function vom Grade $n-1$ bedeutet.

4) Es bedeute $f(x)$ eine ganze Function, welche ebenso wie ihre $n-1$ ersten Ableitungen im Intervalle $x=0$ bis $x=1$ stetig ist, an den beiden Grenzen des Intervalls denselben Wert besitzt und deren n^{te} Ableitung durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar ist. Setzt man nun in der Formel (J)

$$g(x) = \cos 2k(x+y)\pi,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl und y eine Variable bedeutet, so kommt:

$$\int_0^1 f^{(n)}(x)\cos 2k(y-x)\pi\,dx = (2k\pi)^n\int_0^1 f(x)\cos(2ky-2kx+\tfrac{1}{2}n)\pi\,dx.$$

Diese Gleichung besagt aber, dass die Fourier'sche Entwicklung von $f(x)$ durch n-malige gliedweise Integration aus der von $f^{(n)}(x)$ abgeleitet werden kann.

5) Wählt man für $f(x)$ eine Function, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen im Intervalle von $x=x_0$ bis $x=x_r$ endlich und stetig ist und für $g(x)$ eine solche, deren $(n-1)^{te}$ Ableitung an den aufeinander folgenden Stellen

$$x = x_1,\ x_2, \ldots, x_{r-1}$$

des Intervalls (x_0, x_r) unstetig, dabei jedoch überall endlich ist, so entsteht aus der Gleichung (J) eine merkwürdige Summenformel. Um diese bequem schreiben zu können, seien

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x)$$

r stetige, differentiirbare Functionen, ferner

$$g^{(n-1)}(-x) = \varphi_k(x),$$

wenn x dem Intervalle (x_{k-1}, x_k) angehört. Es sind dann $g^{(n-2)}(x)$, $g^{(n-3)}(x), \dots, g(x)$ aus der Gleichung

$$g^{(h-1)}(x) = \int_{u_h}^{x} g^{(h)}(x)dx \qquad (h = n-1, n-2, \dots, 1)$$

zu bestimmen, wobei $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ willkürliche Grössen bezeichnen. Die in Rede stehende Formel lautet nun:

$$(\mathfrak{S}) \quad \begin{cases} \sum_1^r [\varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k)] f(x_k) \\ = \int_{x_0}^{x_r} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x) g(-x)dx \\ + \sum_1^n [f^{(k-1)}(x_0) g^{(n-k)}(-x_0) - f^{(k-1)}(x_r) g^{(n-k)}(-x_r)]. \end{cases}$$

Dabei ist

$$\varphi_0(x_0) = \varphi_{r+1}(x_r) = 0$$

und, für

$$x_{k-1} < x < x_k, \quad \varphi'(x) = \varphi_k'(x)$$

zu setzen.

Die besonderen Annahmen

$$u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1} = x_0$$

und

$$\varphi_k(x) = x - x'_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \dots, r),$$

wo die Grössen x' nur der Bedingung

$$x_{k-1} < x'_{k-1} < x_k$$

unterworfen sind, ergeben aus der Summenformel $(\mathfrak{S})$ den Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x_r} f(x)dx - \sum_1^{n-1} f^{(k)}(x_r) g^{(n-k-1)}(-x_r) + \int_{x_0}^{x_r} f^{(n)}(x) g(-x)dx$$

als den Wert der Summe

$$(x'_0 - x_0)f(x_0) + (x'_1 - x'_0)f(x_1) + \dots + (x_r - x'_{r-1})f(x_r).$$

Hieraus ist zu ersehen, mit welcher Annäherung letztere Summe den Wert des Integrals $\int_{x_0}^{x_r} f(x)dx$ darstellt.

6) Es seien

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots;\quad v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots$$

beliebige Grössen, welche jedoch so beschaffen sind, dass die Reihe

$$\sum_1^{\infty}{}_k \frac{a_k}{2k\pi}\cdot\cos(2kx+v_k+\tfrac{1}{2})\pi$$

für jeden Wert von x convergirt, eine innerhalb des Intervalls $x=0$ bis $x=1$ endliche, stetige, differentiirbare Function darstellt, und sich zwei verschiedenen Grenzwerten nähert, wenn man einerseits x bis zu Null abnehmen, andererseits bis zu Eins zunehmen lässt. Wählt man nun $g(x)$ so, dass $g^{(n-1)}(-x)$ jener Reihe gleich wird, und integrirt in der Formel (J) von Null bis zu einer ganzen Zahl r, so ergiebt sich:

$$(\mathfrak{E}')\quad \left\{\begin{aligned} &\delta\sum_0^{r-1}{}_k f(k)-\int_0^r f(x)g^{(n)}(-x)dx\\ &+\sum_0^{n-1}{}_h \gamma_{h+1}(f^{(h)}(r)-f^{(h)}(0))-\int_0^r f^{(n)}(x)g(-x)dx. \end{aligned}\right.$$

Hier bedeutet $f(x)$ irgend eine Function, welche nebst ihren ersten $n-1$ Ableitungen stetig ist; ferner ist:

$$g(-x)=\sum_1^{\infty}{}_k \frac{a_k}{(2k\pi)^n}\cos\left(2kx+v_k+\frac{n}{2}\right)\pi,\quad g^{(n)}(x)=\frac{d^n g(x)}{dx^n};$$

$$\gamma_h=\lim_{\varepsilon=0}\sum_1^{\infty}{}_k \frac{a_k}{(2k\pi)^h}\cos\left(2k\varepsilon^2-v_k-\frac{h}{2}\right)\pi.\qquad (h=1,2,\ldots,n),$$

$$\delta=-2\lim_{\varepsilon=0}\sum_1^{\infty}{}_k \frac{a_k}{2k\pi}\sin 2k\varepsilon^2\pi\cos v_k\pi.$$

Nimmt man $n=2m$, $a_k=-2$ und $v_k=0$, so resultirt aus $(\mathfrak{E}')$ die bekannte Poisson'sche Formel:

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)=\int_0^r f(x)dx$$

$$+\sum_1^{m}{}_h(f^{(2h-1)}(0)-f^{(2h-1)}(r))\sum_1^{\infty}{}_k\frac{(-1)^h\,2}{(2k\pi)^{2h}}$$

$$+(-1)^m\int_0^r f^{(2m)}(x)\cdot\sum_1^{\infty}{}_k\frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}\,dx.$$

Herr Kronecker macht besonders darauf aufmerksam, dass diese Formel wesentlich an Eleganz verliert, wenn man an Stelle der Reihe

$$\sum_1^{\infty}{}_k \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^m},$$

wie das seit Jacobi üblich geworden ist, ihren Ausdruck als ganze Function von x einführt. Diese Darstellung jener Reihe als ganze Function von x kann aus der Partialbruchzerlegung der Function $\frac{w.e^{2xw\pi i}}{1-e^{2w\pi i}}$ entnommen werden, indem man nämlich in der Gleichung

$$\frac{w.e^{2wx\pi i}}{1-e^{2w\pi i}} = \frac{w}{2\pi i}\lim_{\nu=\infty}\sum_{-\nu}^{+\nu}{}_k \frac{e^{2kx\pi i}}{k-w}$$

beiderseits nach steigenden Potenzen von w entwickelt.

An die Formel ($\mathfrak{E}'$) knüpfen sich nun noch weitere Betrachtungen, welche sich auf die Abschätzung der Grösse des „Restintegrals" $\int_0^r f^n(x)\varphi(-x)\,dx$ beziehen.

Schliesslich wird noch aus derselben Formel, durch die Annahmen

$$n=2m,\quad v_1=v_2=\cdots=0,\quad a_1=a_2=\cdots=a_{s-1}=0,$$
$$a_s=a_{s+1}=\cdots=-2,$$

die folgende Gleichung abgeleitet:

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)=\int_0^r f(x)\frac{\sin(2s-1)x\pi}{\sin x\pi}dx$$
$$+\sum_1^m{}_h\left(f^{(2h-1)}(0)-f^{(2h-1)}(r)\right)\sum_s^{\infty}{}_k \frac{(-1)^h.2}{(2k\pi)^{2h}}$$
$$+(-1)^m\int_0^r f^{(2m)}(x)\sum_s^{\infty}{}_k \frac{2\cos 2kx\pi}{(2k\pi)^{2m}}dx.$$

Diese Gleichung ist darum bemerkenswert, weil sie eine Verbindung zwischen der Poisson'schen und einer bekannten Dirichlet'schen Summenformel herstellt. Sie geht natürlich in die erstere Formel für $s=1$, in die letztere für $s=\infty$ über.

Bz.

C. Arzelà. Sulla integrabilità di una serie di funzioni. Rom. Acc. L. (4) I. 321-326.

C. Arzelà. Sulla integrazione per serie. Rom. Acc. L. (4) I. 532-537. 566-569.

Es sei $y_1, y_2, \dots$ eine Gruppe von reellen Zahlen, welche y_0 zur Grenze haben, es sei ferner $f(x, y)$ eine Function der reellen Variabeln x, y, welche für alle Werte $y_1, y_2, \dots$ von y in dem Intervall $x = a \dots b$ endlich und integrabel ist; ausserdem sei für jeden Wert von x zwischen a und b bestimmt und endlich $f(x, y_0) = \lim_{y_s = y_0} f(x, y_s)$. Es fragt sich, wann diese Function $f(x, y_0)$ zwischen a und b integrabel ist. Als notwendig und hinreichend hierfür ergiebt sich folgende Bedingung: wählt man beliebig klein eine positive Zahl σ und eine Zahl ε, und ist y_s eine beliebige der Zahlen $y_1, y_2, \dots$, so muss man stets aus einer endlichen Anzahl von Strecken, die je auf den Geraden $y = y_{s+1}, y = y_{s+2}, \dots$ liegen, eine Linie (linea spezzata) $y = y_{(x)}$ zusammensetzen können von der Art, dass zu jedem Punkte x zwischen a und b nur ein einziger Punkt in derselben gehört, und dass in jedem Punkte derselben $|f(x, y_0) - f(x, y_{(x)})| < \sigma$ wird, ausgenommen die Punkte x innerhalb einer endlichen Anzahl von Intervallen zwischen a und b, deren Grössen eine Summe $< \varepsilon$ haben.

In der zweiten Abhandlung wird dann weiter gezeigt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\int_a^x f(x, y_0)\, dx = \lim_{y_s = y_0} \int_a^x f(x, y_s)\, dx$$

sei, darin besteht, dass

$$\lim_{y_s = y_0} \int_a^x f(x, y_s)\, dx$$

für jedes x zwischen a und b eine endliche und stetige Function ist. Hiervon wird Anwendung gemacht auf die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integration einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ gliedweise geschehen darf.

T.

F. Gomes-Teixeira. Sur la détermination de la partie algébrique de l'intégrale des fonctions rationnelles. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 187-188.

Hermite hat in seinem Cours d'Analyse (p. 263 ff. cf. F. d. M. 1873. V. 149) den algebraischen Teil des Integrals einer beliebigen rationalen Function finden gelehrt nach zwei Methoden, von denen die zweite unabhängig ist von der Kenntnis der Nullwerte des Nenners der gegebenen Function. Der Verfasser zeigt, wie man auch die erste Methode von dieser Kenntnis unabhängig machen kann unter Zuhülfenahme der Sätze der Theorie der rationalen symmetrischen Functionen. In derselben Weise kann man auch die Coefficienten der Reihenentwickelung für den transcendenten Teil des Integrals bestimmen. T.

Duarte Leite. Sur la partie transcendante de l'intégrale d'une fraction rationnelle. Teixeira J. VII. 180-183.

Es ist bekannt, dass man den algebraischen Teil des Integrals eines Bruches rationaler Functionen erhalten kann, ohne die Werte zu kennen, für die er unendlich wird. Der Verfasser zeigt, dass in vielen Fällen die Bestimmung des logarithmischen Teils des Integrals auf ähnliche Weise geschehen kann.

Tx. (Hch.)

J. B. Pomey. Application d'un procédé particulier à la recherche de l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$. Nouv. Ann. (3) IV. 193-194.

Nach Substitution von αz für z und Integration nach α ergiebt sich das Doppelintegral leicht. H.

A. P. Starkoff. Die Integration eines rationalen Bruches mit imaginären Wurzeln im Nenner. Odessa Ges. VI. 87-92. (Russisch.)

Es wird das Verfahren C. Jordan's (Cours d'Analyse, Paris

1883. p. 14) für die Integration eines rationalen Bruches mit imaginären Wurzeln im Nenner unter Zufügung einiger Ergänzungen auseinandergesetzt. Wi.

Elling Holst. Ueber die praktische Integration rationaler Bruchfunctionen. Lie Arch. X. 290-296.

Praktische Regeln für die Integration rationaler Bruchfunctionen. L.

Toropoff. Ueber die Integration einer Klasse von Differentialen in endlicher Form. Chark. Ges. 3-27. (Russisch.)

Der Verfasser betrachtet einige Formen algebraischer irrationaler Differentiale, welche sich in endlicher Form integriren lassen. Diese Differentiale enthalten unter den Wurzelzeichen Polynome dritten oder vierten Grades oder den Quotienten zweier quadratischen Polynome und haben die Eigenschaft, entweder durch die Substitution $\frac{1}{x}$ anstatt x unverändert zu bleiben, oder sich auf solche Differentiale mittels einfacher Transformationen zu reduciren. Wi.

Th. Muir. Note on the integration of $x^m(a+bx^n)^p dx$. Edinb. Math. Soc. Proc. III 100-104.

Zeigt, dass die Integration von irgend einem unter sechs verschiedenen Integralen abhängig gemacht werden kann, und wie man diese sechs durch ein und dasselbe Verfahren erhält. Gbs. (Lp.)

C. M. Piuma. Soluzione del quesito 1427 dei Nouvelles Annales. Giornale di letture e conversazioni scientifiche di Genova. 2° sem. 165-167.

Der Wert des Integrales:

$$\int \frac{(x-1)^m x^n}{\sqrt{P_n x^n + P_{n-1} x^{n-1} + \cdots + P_1 x + P_0}}\, dx,$$

$$P_k = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+2m+1)}{1.2.\ldots(2m+1)},$$

ist

$$\frac{2(x-1)^{m+1}}{(2m+n+2)P_n} \sqrt{P_n x^n + P_{n-1} x^{n-1} + \cdots + P_1 x + P_0}.$$

La. (Lp.)

F. Gomes-Teixeira. Sur l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\, dx$.
Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 278-280.

Der Nenner der rationalen Function $f(x)$ lässt sich in der Form $M^\alpha N^\beta P^\gamma \ldots$ darstellen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ungleich sind. Lässt man nun die Wurzeln von $M = 0$, $N = 0$, etc. unbestimmt, so ist durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Form der Zerlegung von $f(x)$ in Partialbrüche bekannt. Das Integral eines jeden mit $e^{\omega x}$ multiplicirten Bruchs besteht aus rationalen Termen und einem Integrallogarithmus. Der Zähler jedes Terms, dessen Nenner Potenz eines linearen Factors von M ist, ist symmetrische Function der Wurzeln von N, desgl. von P, etc. Addirt man die Terme gleicher Form, deren Nenner gleich hohe Potenzen aller linearen Factoren von M sind, so ist die Summe symmetrische Function einzeln von den Wurzeln von $M, N, P, \ldots$ und lässt sich durch die Coefficienten dieser Factoren darstellen. Hiernach ist es möglich, den rationalen Teil des oben angezeigten Integrals zu finden, ohne die linearen Factoren des Nenners von $f(x)$ zu kennen.

H.

Obrastzoff. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.
Darb. Bull. (2) IX. 132-135.

Hermite. Note. Darb. Bull. (2) IX. 135-137.

Ist $\frac{P}{Q}$ der n^{te} Näherungsbruch des Lambert'schen Kettenbruchs

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cdots,}}}$$

wo P, Q ganze rationale Functionen von x sind, und ist

$$\varphi(x) = \frac{P\cos x - Q\sin x}{x^n},$$

dann bestehen die folgenden beiden Sätze: I. Das Integral

$$\int \varphi(ax)\varphi(bx)\,dx$$

lässt sich immer in expliciter, endlicher Form darstellen. II. Ferner ist

$$\int \frac{dx}{\varphi^2(x)} = \frac{P\sin x + Q\cos x}{P\cos x - Q\sin x}.$$

Für diese beiden in Hermite's Cours d'Analyse von 1873 (cf. F. d. M. 1873. V. 148 ff.) p. 359 befindlichen Sätze, welche auch Herr Winckler (Wien. Ber. LXX. cf. F. d. M. 1874. VI. 176 ff.) bewiesen hat, giebt Herr Obrastzoff ganz elementare, aus den Eigenschaften der Kettenbrüche selbst geschöpfte Beweise. Herr Hermite teilt im Anschluss hieran mit, dass er selbst durch die Bemerkung (cf. Borch. J. LXXVI. 303; F. d. M. 1873. V. 252 f.), dass die Ausdrücke $P\cos x - Q\sin x$, $P\sin x + Q\cos x$ die Lösungen der Bessel'schen Gleichung

$$y'' - \frac{2n}{x}y' + y = 0$$

sind, auf die obigen Sätze geführt worden ist. Die Function $\varphi(x)$ genügt dann der Gleichung

$$(\alpha) \qquad z'' = \left[\frac{n(n+1)}{x^2} - 1\right]z,$$

welche durch die Substitution $y = zx^n$ aus jener hervorgeht. Hieraus ergiebt sich für die Functionen $u = \varphi(ax)$, $v = \varphi(bx)$ sofort die Relation (β) $uv'' - vu'' = (a^2 - b^2)uv$, deren Integration unmittelbar auf den Satz I führt. Nimmt man dann $a = b = 1$, folglich $u = \varphi(x)$ und für v die zweite Lösung der Gleichung (α), so erhält man aus (β):

$$uv'-vu' = C \quad \text{oder} \quad C\int\frac{dx}{\varphi'(x)} = \frac{P\sin x + Q\cos x}{P\cos x - Q\sin x};$$

dass $C = 1$ ist, wird dann hinterher durch Reihenentwickelung gezeigt. T.

A. Mony. Quelques formules générales relatives aux intégrales définies et indéfinies. Nouv. Ann (3) IV. 176-183.

Entwickelt man das vollständige Differential einer Function mehrerer Variabeln, macht dann letztere zu Functionen einer Variabeln und integrirt die Gleichung, so erhält man eine Relation zwischen mehreren Integralen. Hiervon werden einige Anwendungen gemacht. Z. B. zeigt sich, dass das Integral einer Function einer Variabeln immer durch das Integral ihrer Inversen ausgedrückt werden kann. Ferner ergiebt sich, durch eine Erweiterung der teilweisen Integration, zuletzt folgende Methode, nach der man versuchen kann $\varphi(x)dx$ zu integriren. Man setzt für x die Buchstaben $u, v, w, \ldots$ so, dass das gegebene Differential das partielle Differential einer bekannten Function nach u wird, während die übrigen Teile des vollständigen Differentials Aussicht auf Integrabilität bieten. H.

A. Harnack. Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales. Leipz. Ber. 379-398.

Die Untersuchung betrifft das Integral

$$u+iv = f(\varrho e^{\alpha i}) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{U+iV}{z-\varrho e^{\alpha i}}\,dz,$$

gültig für jeden Punkt $\varrho e^{i\alpha}$ innerhalb der Grenzcurve

$$u+iv = U+iV.$$

Es werden zuerst die Relationen zwischen U und V gesucht. Diese sind:

$$\frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_s - \frac{1}{2\pi}\int P(d\sigma)_s = \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l} - \frac{1}{2\pi}\int Q\frac{dl}{l}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int U\frac{dl}{l} + \frac{1}{2\pi}\int P\frac{dl}{l} = \frac{1}{2\pi}\int V(d\sigma)_s - \frac{1}{2\pi}\int Q(d\sigma)_s.$$

Hier bedeutet $d\sigma$ das Element der Randcurve, $(d\sigma)_x$ den Winkel, unter dem es vom Punkte $\varrho e^{i\omega}$ aus gesehen wird, P und Q die den U und V zugeordneten Functionen derart, dass

$$P = \frac{1}{\pi}\int U(d\sigma)_x; \quad Q = \frac{1}{\pi}\int V(d\sigma)_x$$

wird, l den absoluten Abstand zwischen $d\sigma$ und $\varrho e^{i\omega}$. Ist nun für den Rand eines ebenen Gebildes eine stetige Function U gegeben, und erfüllt eine Function die genannten Bedingungen, so stellt die Gleichung

$$u = \frac{1}{2\pi}\int U(d\sigma)_x + \frac{1}{2\pi}\int V\frac{dl}{l}$$

eine Function dar, welche im Innern des Gebietes die Bedingung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt und an dem Rande den Wert U besitzt. H.

L. Königsberger. Ueber Integrale transcendenter Functionen. Kronecker J. XCVIII. 97-128.

Nach einem bekannten Satze von Abel lässt sich das Integral $\int y dx$, worin y eine algebraische Function von x bezeichnet, falls es algebraisch ist, in der Form rat. $f(x, y)$ darstellen. Dieser Satz wird zunächst in folgender Weise erweitert: Sei y_1 ein Integral einer beliebigen algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, und das Integral $\int f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m)}) dx$, worin f eine algebraische Function der hingeschriebenen Argumente ist, sei algebraisch durch y_1 und deren Ableitungen darstellbar, so lässt sich dasselbe in der Form rationale Function $(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m)}, f)$ ausdrücken, und zwar gilt die Relation für jeden Zweig von f. Ist die Differentialgleichung in y in Bezug auf $y^{(m)}$ algebraisch irreductibel und genügt y_1 nicht einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung, so bleibt die Relation auch für jedes Integral der Differentialgleichung erhalten. Insofern obiges

Integral $\int f dx$ als Lösung der Gleichung $\frac{dz}{dx} = f$ angesehen werden kann, wird das Resultat auf beliebige lineare nicht homogene Differentialgleichungen in folgender Form übertragen: Es sei die Differentialgleichung

$$(1)\quad \begin{cases} z^{(\mu)} + f_1(x, Y_1, Y_1', \ldots, Y_2, Y_2', \ldots, Y_\varrho, Y_\varrho', \ldots) z^{(\mu-1)} + \cdots \\ \cdots + f_\mu(x, Y_1, Y_1', \ldots, Y_\varrho, Y_\varrho', \ldots) z = f(x, Y_1, Y_1', \ldots, Y_\varrho, Y_\varrho') \end{cases}$$

gegeben, worin $f_1, \ldots, f_\mu, f$ algebraische Functionen und $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\varrho$ Integrale algebraischer Differentialgleichungen von der $m_1^{ten}, m_2^{ten}, \ldots, m_\varrho^{ten}$ Ordnung bedeuten; die Gleichung (1) besitze ferner eine Lösung, die in $x, Y_1, \ldots, Y_\varrho$ und deren Ableitungen algebraisch sei: so existirt auch eine in diesen Elementen und den Coefficienten $f_1, \ldots, f_\mu, f$ rationale Lösung, und zwar muss die erstere Lösung selbst in diesen Grössen rational sein, falls die reducirte Gleichung von (1) kein algebraisches Integral dieser Art oder nur in den Coefficienten rational ausdrückbare Integrale besitzt. Mit Hülfe dieser Sätze geht der Verfasser an die Aufgabe, die Beschaffenheit aller der Transcendenten anzugeben, deren Integral sich als eine algebraische Function der unabhängigen Variabeln und eben dieser Transcendenten darstellen lässt. Es ergiebt sich fürs erste, dass eine solche Transcendente das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein muss. Soll dieselbe zugleich einer linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung genügen, so muss das allgemeine Integral der ersteren Differentialgleichung eine homogene lineare Function von $m+1$ particulären Integralen derselben sein, deren Coefficienten Functionen einer willkürlichen Constanten sind. Diese Eigenschaft hat jedoch, wie der Verfasser früher nachgewiesen, eine Differentialgleichung erster Ordnung nur dann, wenn dieselbe eine lineare oder eine durch eine algebraische Substitution aus einer linearen abgeleitete ist. Von den Coefficienten der Substitution sind noch gewisse Bedingungen zu erfüllen, die des näheren angegeben werden. Hr.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

C. F. Lindman. Observations sur les tables d'intégrales définies de M. Bierens de Haan (Amsterdam 1858). Stockh. Vet. Akad. Bihang X. 258 S.

Herr Lindman hat schon früher Verbesserungen zu den bekannten Bierens de Haan'schen Integraltafeln publicirt. In der soeben genannten umfangreichen Arbeit hat er aufs neue diese Tafeln einer eingehenden Kritik unterworfen und dabei eine grosse Anzahl von Fehlern oder Ungenauigkeiten aufgedeckt, die sorgfältig erläutert und verbessert werden. E.

P. Mansion, L. Kronecker. Sur le second théorème de la moyenne. Mathesis V. 97-102.

Geometrische Deutung des einen der Beweise von P. du Bois-Reymond (Borchardt J. LXIX. 82) durch den ersten Autor; vollständiger, durch den zweiten geführter Beweis vermittelst der Abel'schen Transformation. Mn. (Lp.)

Lazarski. Kriterium der Endlichkeit bestimmter Integrale. Pr. Stanislau (Polnisch).

Die Untersuchung der Endlichkeit bestimmter Integrale wird hier mittels der Taylor'schen Reihe auf die Untersuchung der n^{ten} Ableitung der unter dem Integralzeichen stehenden Function zurückgeführt. Dn.

F. Franklin. Proof of a theorem of Tschebyscheff's on definite integrals. Newcomb Am. J. VII. 377-379.

Das Theorem lautet: Sind u und v Functionen von x, positiv zwischen $x = 0$ und $x = 1$, die entweder beide beständig

wachsen oder beide beständig abnehmen, so ist

$$\int_0^1 uv\,dx > \int_0^1 u\,dx \int_0^1 v\,dx.$$

Variiren statt dessen u, v beständig entgegengesetzt, so ist die Linke kleiner als die Rechte. Hermite, der den Satz mitteilt, giebt davon einen indirecten und langen Beweis. Der Verfasser beweist ihn ganz kurz. Dann erweitert er ihn auf beliebige Integralgrenzen, so dass die Ungleichung lautet:

$$(b-a)\int_a^b uv\,dx > \int_a^b u\,dx \int_a^b v\,dx.$$

Ferner setzt er Summen statt der Integrale und zeigt die gleiche Geltung. Von dem Satze über die Integrale folgen 10 Anwendungen auf interessante Beispiele. H.

L. Schläfli. Ueber $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$ und verwandte Integrale. Acta Math. VII. 187-196.

Im 1. Bande von Cauchy's vollständigen Werken findet sich ein Mémoire sur les intégrales définies aus dem Jahre 1814, worin p. 442 (9) und p. 488 die erwähnten Integrale behandelt werden. Der Verfasser sagt Folgendes davon. Cauchy beabsichtigt, wie er selbst sagt, nur die Berechnung der reellen Componenten der darin vorkommenden Integrale, und seine Ergebnisse sind meistens richtig, aber nicht immer. Dass der Begriff der valeur principale eines Integrales, den Cauchy aufstellt, nicht statthaft sei, braucht nicht erörtert zu werden; was er so nennt, ist eine Summe von Integralen, die einander nichts angehn. Auch die intégrale singulière ist ein bedenklicher Begriff; wo er zum erstenmale erläutert wird, geschieht es an einem Doppelintegrale, das niemand gehalten ist zu verstehen, wenn über dessen Begrenzung nichts gesagt wird. Um Cauchy's Formeln richtig zu stellen, werden dann die betreffenden Integrale aufs neue berechnet. H.

A. Enneper. Ueber ein Euler'sches Integral. Gött. Nachr. 163-168.

Der Specialwert des ersten Euler'schen Integrals

$$P=\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$$

wird zuerst in folgende Form erweitert:

$$P=(a+bi)^p\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x(a+bi)}.$$

Durch Transformation von Doppelintegralen wird daraus der bekannte Ausdruck

$$P=\frac{p}{\sin p\pi}$$

gewonnen, derselbe dann auch auf anderm Wege hergeleitet.

H.

A. Enneper. Ueber einige bestimmte Integrale. Gött. Nachr. 169-174.

Es wird bewiesen, dass

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+k\sin^2\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\log\frac{(1+\sin\varphi)(1-k\sin\varphi)}{(1-\sin\varphi)(1+k\sin\varphi)}\,d\varphi$$

unabhängig von k ist. Setzt man $k=0$, so erhält man:

$$P=\frac{\pi^2}{2}.$$

Mit Anwendung dieses Resultats ergeben sich noch die Relationen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(M\log N-M_1\log N_1)d\varphi=\frac{\pi^2}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(M_1\log N-M\log N_1)d\varphi=0,$$

wo

$$M = \frac{1}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \quad M_1 = \frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

$$N = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}; \quad N_1 = \frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}.$$

H.

M. Burguet. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.
C. R. CI 304-307.

Der Aufsatz schliesst sich an Hermite's Zerlegung

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1} = F(s)+G(s)$$

an. Wird der zweite Teil in der Form $G(s) = \Sigma c_n s^n$ dargestellt, so findet der Verfasser für c_n den angenäherten Wert

$$\sqrt{\frac{2e}{n}}\left[\frac{e}{2}(n+1)\right]^{-\frac{n}{2}}.$$

H.

M. Laguerre. Sur une intégrale définie C. R. C. 624-626.

Ausgehend von dem Satze, dass

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi,$$

wo F eine echte gebrochene rationale Function bedeutet, eine algebraische Function der Coefficienten ist, werden die Ausdrücke des Integrals für Nenner vom ersten und zweiten Grade dargestellt und von der Formel für quadratische Nenner ein interessanter Fall mitgeteilt. H.

T. J. Stieltjes. Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$.

Darb. Bull. IX. 306-311

Um das Integral für grosse a annähernd zu berechnen, wird es in der Form entwickelt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$$

$$= V_0(b) + \frac{V_1(b)}{a} + \frac{V_2(b)}{a^2} + \cdots + \frac{V_{n-1}(b)}{a^{n-1}} + \frac{R_n}{a^n}.$$

Die Polynome V werden successive aus den Relationen erhalten: $V_0(b) = \frac{1}{2}$; $V_1(b) = -\frac{1}{2}[bV_0(b)]; \ldots; V_{k+1}(b) = -\frac{1}{2}[(b+k)\,V_k(b)]$, wo $[f(b)]$ bedeutet, dass nach Entwickelung von $f(b)$ nach Potenzen von b für b^k gesetzt werden soll:

$$b^k - \frac{k}{2}b^{k-1} + \frac{k}{2}\,\frac{k-1}{2}\,b^{k-2} + \frac{k}{2}\,\frac{k-1}{2}\,\frac{k-2}{2}\,b^{k-3} + \cdots$$

Der Rest hat den Ausdruck:

$$R_n = \int_0^\infty \frac{(x-b-n+1)\,V_{n-1}(b+x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}},$$

und zwar geht er für $n = \infty$ in $V_n(b)$ über. H.

R. Fujisawa. On a certain class of definite integrals.

Mess. XV. 79-80.

Durch Reihenentwickelung bewirkte Auswertung bekannter Integrale, wie z. B.

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(x+y\cos\theta)^n}$$

Glr. (Lp.)

N. Goffart. Évaluation géométrique de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = f(\alpha).$$

Nouv. Ann. (3) IV. 171-172.

Das Differential stellt sich als Increment eines Dreieckswinkels dar, dessen variable Gegenseite $= x$, anliegende Seite

— 1, Winkel zwischen beiden = α ist. Die Grenzen des Integrals umfassen einen rechten Winkel, der in Intervallen von α positiv, in andern negativ ist. H.

J. Griffiths. On a definite integral. Mess. XIV. 190.

Beweis, dass:

$$\int_0^\pi F\left(\frac{1+e\cos\theta}{1+2e\cos\theta+e^2}\right)\frac{d\theta}{1+2e\cos\theta+e^2} = \frac{1}{1-e^2}\int_0^\pi F\left(\frac{1+e\cos\theta}{1-e^2}\right)d\theta.$$

Glr.

N. A. Oumoff. Die geometrische Bedeutung der Fresnel'schen Integrale. Odessa Ges. VI. 57-86. (Russisch.)

Es sei eine Parabel, deren Gleichung $\frac{2}{\pi}z^2 = v$ ist, auf einen Kreiscylinder aufgewickelt, so dass die Axe der Parabel mit der Basis des Cylinders zusammenfällt. Dann wird die Parabel auf dem Cylinder eine Schraubenlinie darstellen. Die Projectionen dieser Curve auf die Ebenen zx und zy (die Axe des Cylinders sei die z-Axe, ferner gehe die x-Axe durch den Scheitel der Parabel) sind zwei ebene Curven, deren Flächen den Fresnel'schen Integralen eine geometrische Bedeutung geben. Aus dieser geometrischen Darstellung fliessen die Annäherungsformeln für die Berechnung der Integrale, welche von dem Verfasser hiernach auf die Theorie der Diffraction angewandt werden.. Wi.

W. H. L. Russell. On certain definite integrals. Lond. R. S. Proc. XXXIX. 20-22, 22-23.

Zwei Notizen, von denen die erste Formeln zur Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen enthält, die zweite den

Gebrauch der Formel

$$\frac{n.n-1\ldots n-r+1}{1.\,2.\,\ldots\,r} = \frac{2^n}{\pi}\int_0^\pi \cos n\theta \cos(n-2r)\theta . d\theta$$

bei der Summation von Reihen andeutet, die Binomialcoefficienten enthalten. Cly. (Lp.)

P. du Bois-Reymond. Ueber den Begriff der Länge einer Curve. Acta Math VI. 167-168.

Der Verfasser erwidert auf einen Einwand von Scheeffer, der behauptet, dass sein Begriff der Curvenlänge zu eng sei: einen geometrischen Begriff gebe es nur, wo eine Tangente existirt. Der analytischen Erweiterung fehle noch der Nachweis, dass nicht 2 Längen einer Curve möglich seien. H.

L. Kronecker. Ueber den Cauchy'schen Satz. Berl Ber. 785-787

Die vorliegende Note enthält den Beweis des folgenden Cauchy'schen Satzes (von welchem der Verfasser einen anderen Beweis in den Berl. Ber. vom 29. Juli 1880 gegeben hat): „Wenn von einer Function $f(x,y)$ vorausgesetzt wird, dass ihre ersten und zweiten Ableitungen in einem von einer geschlossenen Curve umgrenzten Gebiete durchweg endlich und eindeutig sind, so lässt sich erschliessen, dass das über diese Curve erstreckte Integral $\int df(x,y)$ gleich Null, und dass also die Function $f(x,y)$ in dem bezeichneten Gebiete eindeutig ist.“ Aus den Voraussetzungen folgt zunächst, dass bei der Integration die Begrenzungscurve durch ein derselben eingeschriebenes geradliniges Polygon ersetzt werden darf, welches sich der Curve hinreichend nahe anschliesst. Dieses Polygon lässt sich in rechtwinklige Dreiecke zerlegen, deren Katheten den Coordinatenaxen parallel laufen, und es genügt, den Satz für die Begrenzung eines solchen Dreiecks zu beweisen.

Führt man aber in dem über die Fläche des Dreiecks ausgedehnten Integrale

$$\iint \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx\, dy$$

die Integration einmal nach x, ein anderes Mal nach y aus, so ergiebt der Vergleich der beiden Resultate direct den zu beweisenden Satz. Es wird noch bemerkt, dass man das ursprüngliche Gebiet anstatt durch ein System von rechtwinkligen Dreiecken auch durch ein System von Rechtecken, deren Seiten den Coordinatenaxen parallel laufen, hätte ersetzen können.

Auf pag. 786 dritte Zeile von unten ist in der oberen Grenze des letzten Integrals $t = 0$ in $t = 1$ zu verbessern.

Hz.

David. Sur une formule de Cauchy. Toul Mem. (8) VII. 193-215.

Die von Cauchy bewiesene Fundamentalformel der Theorie der imaginären Functionen ist, wie der Verfasser sagt, teils mehr teils weniger allgemein als diejenige, welche man gegenwärtig unter dem Namen Cauchy'scher Satz an ihre Stelle setzt. Was dem letztern an Allgemeinheit fehlt, soll ihm durch die gegenwärtige Herleitung gegeben werden, welche von einer Voraussetzung, dass die imaginären Functionen monogen seien, keine Anwendung macht. Nachdem dies geschehen, folgen einige speciellere Betrachtungen. H.

H. MacColl. On the limits of multiple integrals. Lond. M. S. Proc. XVI. 142-146.

Die gegenwärtige Arbeit schliesst sich an den Artikel „Calculus of equivalent statements“ l. c. IX. 9. an, auf welchen noch zwei Artikel IX. 177 und X. 16 gefolgt sind, und zwar in betreff der Bestimmung der Grenzen mehrfacher Integrale durch die hinreichenden Data, und hat den Zweck zu zeigen, wie der so gewonnene Ausdruck der Grenze oft vereinfacht und a[illegible]

der Integration günstige Form gebracht werden kann. Das Wesen dieses „Calculus" ist in F. d. M. X. 34, XI. 19 erklärt.

H.

W. H. L. Russell. On certain definite integrals.

Lond. R. S. Proc. XXXVII. 62-65.

Fortsetzung früherer Untersuchungen. Bezieht sich teils auf eine Klasse vielfacher Integrale, teils auf die Lösung einer gewissen partiellen Differentialgleichung durch vielfache Integrale.

Cly. (Lp.)

L. Kronecker. Ueber das Dirichlet'sche Integral.

Berl. Ber. 641-65[illegible].

In der Theorie der Fourier'schen Reihen ist es bekanntlich von Wichtigkeit zu untersuchen, unter welchen Umständen die Gleichung

$$\lim_{w=\infty}\int_0^{x'} f(x)\sin wx\pi\, d\lg x = \lim_{\sigma=0}\int_0^{\frac{x'}{\sigma}} f(\sigma x)\sin x\pi\, d\lg x = \tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

gültig ist. Dabei bedeutet $f(x)$ eine eindeutige, reelle, integrirbare Function der reellen Veränderlichen x; ferner wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ in dem Intervall $(0, X)$ absolut genommen eine bestimmte Grösse M nicht überschreitet und dass x' dem Intervalle $(0, X)$ angehört.

Es wird zunächst gezeigt, dass man ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $f(0) = 0$ annehmen kann, und dass die Grenzen $0, \frac{x'}{\sigma}$ ersetzt werden dürfen durch ξ bez. $\frac{x'}{\sigma} + \xi'$, wo ξ und ξ' irgend welche positiven Grössen bezeichnen. Wird noch

$$f(x) = x\varphi(x)$$

gesetzt, so handelt es sich also um folgende Frage: „Wann ist

$$\lim_{\sigma=0}\int_{\xi}^{\frac{x'}{\sigma}+\xi'} \sigma\varphi(\sigma x)\sin x\pi\, dx = 0,$$

vorausgesetzt, dass $x\varphi(x)$ für $x = 0$ verschwindet?"

Wählt man nun ξ gleich einer ungeraden Zahl $2m+1$ und ξ' so, dass $\frac{x'}{\sigma}+\xi'$ gleich der nächsten über $\frac{x'}{\sigma}$ liegenden geraden Zahl wird, so lässt sich das zu untersuchende Integral in der Form

$$\sum_h \int_h^{h+1} \sigma\varphi(\sigma x)\sin x\pi\,dx = \int_0^1 \sigma \sum_h (-1)^h \varphi(\sigma x+\sigma h)\sin x\pi\,dx$$

schreiben, wo der Summationsbuchstabe h alle durch die Bedingung

$$2m+1 < h \leqq 2\left[\frac{x'}{2\sigma}\right]+1$$

bestimmten ganzen Zahlen zu durchlaufen hat.

Das Zeichen $[a]$ bedeutet hier und in der Folge die der Grösse a nächste kleinere ganze Zahl. Es wird nun gezeigt, dass an Stelle von x' irgend eine andere zwischen 0 und X liegende Grösse x_0 und an Stelle der Summe $\Sigma(-1)^h\varphi(\sigma x+\sigma h)$ auch die andere $\bar{\Sigma}(-1)^h\varphi(\sigma x+\sigma h)$ gesetzt werden darf, wo der Strich über dem Summenzeichen andeuten soll, dass das erste und letzte Glied der Summe mit dem Factor $\frac{1}{2}$ zu versehen ist. Nach diesen Abänderungen darf man noch die ganze Zahl m unendlich anwachsen und den Wert x_0 unendlich abnehmen lassen, so dass man auf die Bedingung:

$$\lim_{x_0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0}\int_0^1 \sigma \bar{\sum_h}(-1)^h \varphi(\sigma x+\sigma h)\,d\cos x\pi = 0,$$

$$\left(2m+1 < h \leqq 2\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right]+1\right)$$

geführt wird. Diese Bedingung ist nun sicher erfüllt, wenn die Gleichung besteht:

$$\text{(H)}\qquad \lim_{x_0=0}\lim_{m=\infty}\lim_{\sigma=0}\bar{\sum_h}(-1)^h\varphi(\sigma x+\sigma h) = 0, \qquad (0 < x < 1).$$

Führt man hier für $\varphi(x)$ den Wert $\frac{f(x)}{x}$ ein, so ergiebt sich mit Hülfe von wenigen Schlüssen folgender Satz:

(K) „Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werte von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{x'} f(x) \sin wx\pi \, d\log x = \tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

ist, reicht es hin, eine positive Zahl N und irgend welche (beliebig kleine) Grössen σ^0, x^0 so bestimmen zu können, dass der absolute Wert der Reihe:

$$\sum_h^{\overline{\ }} (-1)^h f(\sigma x + \sigma h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2r+1;\ 0 \leqq x \leqq 1)$$

für alle Werte von σ, die kleiner als σ^0 sind, und für alle Werte von r, die kleiner als $\frac{x^0}{2\sigma}$ sind, stets kleiner als N bleibt."

Dieser Satz ist darum sehr bemerkenswert, weil er, wie Herr Kronecker nachweist, sowohl die von Dirichlet, wie die späteren von den Herren Weierstrass, Hölder, C. Jordan und Lipschitz aufgestellten Bedingungen umfasst.

In der Bedingung (II) kann die oben gemachte Voraussetzung, dass $x\varphi(x) = f(x)$ für $x = 0$ selber gleich Null ist, auch fortgelassen werden. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

„Um erschliessen zu können, dass für beliebige Werte von x', die kleiner als X sind,

$$\lim_{w=\infty} \int_h^{x'} f(x) \sin wx\pi \, d\log x = \tfrac{1}{2}\pi f(0)$$

ist, genügt es nachzuweisen, dass der Grenzwert

$$\lim_{\sigma=0} \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h} \qquad \left(2m \leqq h \leqq 2\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right];\ 0 \leqq x \leqq 1\right)$$

sich mit wachsendem m und mit abnehmendem x^0 der Null nähere."

Dieses Resultat wird nun noch auf eine sehr merkwürdige Weise direct verificirt. Es wird nämlich das Dirichlet'sche Integral $\int_0^{\frac{x'}{\sigma}} f(\sigma x) \sin x\pi \, d\log x$ in eine Summe von sieben Einzelintegralen zerlegt, von welchen das erste dem Grenzwerte $\frac{1}{2}\pi f(0)$ gleich ist, während jedes der sechs übrigen (bei der in dem Satze gemachten Annahme) in der Grenze verschwindet.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass eine grosse Zahl der in der Abhandlung aufgestellten Bedingungsgleichungen in sehr eleganter Weise geometrisch gedeutet wird. Hz.

P. Alexander. Failing cases of Fourier's double-integral theorem. Edinb. Math. Soc. Proc. III. 12-18.

P. Alexander. Boole's and other proofs of Fourier's double-integral theorem. Edinb. Math. Soc. Proc. III. 45-58.

Diese beiden Arbeiten erörtern verschiedene Beweise, die von dem Fourier'schen Satze über Doppelintegrale gegeben worden sind. Gbs. (Lp.)

O. Bkau. Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. 2te Aufl. Halle. Nebert.

Siehe Abschn. V, Cap. 1. S. 220.

A. Markoff. Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales. Klein Ann. XXV. 427-432.

Es werden drei Aufgaben gelöst, zuerst: Eine ganze Function $F(x)$ vom Grade $2n-1$ zu finden, welche nebst ihrer Derivirten für n gegebene Argumente einer gegebenen Function $f(x)$ gleich wird, dann: Für eine gegebene ganze Function $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f(x)$ das folgende Integral in der Form

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_1^n A_k f(a_k) + \sum_1^n B_k f'(a_k)$$

darzustellen, dann: Die a so zu bestimmen, dass die B Null werden. Nach jeder Lösung wird die Differenz der beliebigen Function $f(x)$ und des Näherungsausdrucks in Integralform gegeben. Es folgen eine Bemerkung und Beispiele. H.

G. Petit-Bois. Sur l'évaluation approchée des aires planes. Mathesis V. 5-7, 27-31.

Wenn für eine Curve $y = f(x)$, deren Flächeninhalt man finden will, $f''(x)$ zwischen den Endordinaten stark variirt, so ist die Simpson'sche Formel für die Quadratur nicht mehr die vorteilhafteste. Man kann in diesem Falle die Simpson'sche Parabel, die man für die Curve setzt, mit einer Hyperbel vertauschen, die eine Asymptote parallel mit der y Axe hat. Andere Formeln. Anmerkungsweise: Arbeiten über angenäherte Quadraturen in den Gergonne'schen Annalen von Kramp, Berard, Ampère Mn. (Lp.)

W. Sutherland. Mechanical integration of the product of two functions. Phil Mag XX. 175-178; XXI. (1886) 141-143.

Der Verfasser giebt in dieser Abhandlung einen Grundgedanken an, vermittelst dessen eine Maschine zur Integration des Productes zweier Functionen angefertigt werden kann, die einer unmittelbareren Anwendung fähig sein dürfte, als die des Herrn James Thomson. Diese Methode ist nach des Verfassers Ansicht nichts weiter als eine mechanische Verwirklichung derjenigen Operationen, welche Fourier im Art. 220, Cap. III, Sect. VI seiner „Analytischen Wärmetheorie" beschreibt.

Gbs. (Lp.)

D. Napoli und Abdank-Abakanowicz. Sur un nouveau modèle d'intégraphe. C R. CI. 592-594.

Der neue, hier beschriebene und abgebildete, integralzeichnende Apparat ist eine Modification des in C. R. XCIV. 783 Fig. 3 dargestellten (cf. F. d. M. XIV. 1882 232). Anstatt dass in jenem die Rolle auf der Abscissenaxe ruht, und die Ebene sich in der Richtung der Coordinaten bewegt, findet hier das Entgegengesetzte statt: die Zeichenebene ist fest, und die Rolle beschreibt die Integralcurve wie im Apparat von Boys. Als Vor-

züge sind angegeben: Die Curven sind mit Tinte in einem Linienzug gezeichnet, infolgedessen äusserst deutlich, und Anfang und Ende sehr bestimmt. In den beweglichen Teilen giebt es keinen Spielraum, was die Genauigkeit erhöht. H.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

F. Engel. Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen. Leipz. Habilitationsschrift, abgedruckt in Klein Ann. XXVII. 1-57.

In der Einleitung werden die für das Folgende unentbehrlichen Begriffe und Sätze aus der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen zusammengestellt. Erwähnt sei hier nur der Begriff der Definitionsgleichungen einer Gruppe: Lässt sich der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\delta t \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

einer endlichen oder unendlichen continuirlichen Gruppe durch ein System von Differentialgleichungen zwischen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und $x_1, \ldots, x_n$ definiren, so bezeichnet Lie diese Differentialgleichungen als die Definitionsgleichungen der betreffenden Gruppe.

In § 1 (S. 11-20) wird eine allgemeine Methode entwickelt, um Definitionsgleichungen von Gruppen der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit aufzustellen.

In § 2 (S. 21-31) wird die angegebene Methode im Einzelne durchgeführt; es zeigt sich dabei, dass dieselbe alle Gruppen einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit liefert.

In § 3 (S. 31-41) wird die in § 1 entwickelte Methode die n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten angewendet.

In § 4 und 5 (S. 41-57) werden die Definitionsgleichung gewisser Gruppen des R_n bezüglich des R_2 aufgestellt.

Bemerkenswert ist, dass die Methode des Verfassers eben so gut unendliche als endliche Gruppen li[illegible] sie also

zwischen diesen Arten von Gruppen einen Unterschied nicht macht. El.

L. Fuchs. Ueber den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln. Berl. Ber. 5-12.

Indem der Verfasser das bekannte Jacobi'sche Resultat der Unmöglichkeit der Umkehrung hyperelliptischer Integrale in der Form ausspricht:

„Unter $R(x)$ eine rationale Function höheren als vierten Grades verstanden, können die Integrale x der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$$

nicht als analytische Functionen von u aufgefasst werden," gelangt er zur Frage nach weiteren solchen Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen, durch welche zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen keine functionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes festgesetzt wird, solange jene Veränderlichen complexe Werte annehmen dürfen. Abgesehen von Differentialgleichungen, die aus der obigen durch analytische Transformation hervorgehen, giebt es für jede Ordnung und jeden Grad Klassen solcher Differentialgleichungen. Als Beispiele dafür dienen eine Differentialgleichung zweiter und eine solche erster Ordnung, die gleichzeitig einen Weg zur Bildung weiterer analoger Differentialgleichungen von beliebig höherer Ordnung und höherem Grade erkennen lassen. Für algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung ergiebt sich weiter der Satz, dass durch eine solche Differentialgleichung

$$f\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) = 0$$

stets eine analytische Abhängigkeit des y von z definirt wird, sofern die Integrale derselben nicht mit den Anfangswerten stetig verschiebbare Verzweigungspunkte besitzen, sei es, dass y als Function von z, oder z als Function von y aufgefasst wird. In

diesem Falle erweisen sich die algebraischen Functionen, welche $\frac{dy}{dz}$ als Function von y und $\frac{dz}{dy}$ als Function von z darstellen, als vom Range (Geschlecht) Null oder Eins, woraus sich der Satz nach früher (Berl. Ber. 1884, p. 699-710: „Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen“, F. d. M. XVI. 1884. 248) vom Verfasser entwickelten Principien ergiebt. Besitzen aber die Integrale der Differentialgleichung mit den Anfangswerten verschiebbare Verzweigungspunkte, dann kann es eintreten, dass die Integrale y sich nicht als analytische Function von z ergeben. Dk.

H. Poincaré. Sur un théorème de M. Fuchs. Acta Math. VII. 1-32.

In seiner Arbeit über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen (vergl. das obige Citat), hat Hr. Fuchs die Bedingungen angegeben, unter welchen die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung $F(z, y, y') = 0$ (in der F eine ganze Function von y und $y' = \frac{dy}{dz}$ bedeutet, deren Coefficienten irgendwelche Functionen von z sind) feste, sich nicht mit den Aenderungen der Anfangswerte verschiebende Verzweigungspunkte besitzen. Der Umstand, dass diese Bedingungen, falls F auch noch eine ganze Function von z ist, eine Integration der Differentialgleichung mit Hülfe „Fuchs'scher“ Functionen gestatten, führt Herrn Poincaré zum genauen Studium der durch diese Bedingungen definirten Klasse von Differentialgleichungen. Bezeichnet man mit p das Geschlecht der durch $F(z, y, y') = 0$ gegebenen algebraischen Relation zwischen y und y' (z de[illegible] Constante betrachtet), so handelt es sich um das Stu[illegible] hierdurch gegebenen Riemann'schen Flächen $S_0, S_1, \dots$ [illegible] bestimmten Werten $z = z_0$, $z = z_1$ entsprechen. Al[illegible] Flächen $S_0, S_1, \dots$ haben dieselben Moduln. Ferner exis[illegible] bekannten Sätzen über die Anzahl der Transformatione[illegible] Fläche vom Geschlechte p in sich, für $p = 0$ eine dreifa[illegible]

endliche, für $p = 1$ eine einfach unendliche Zahl von Transformationen, welche eine Fläche S_0 in S_1 überführen, während es für $p > 1$ im allgemeinen nur eine einzige und nur in besonderen Fällen mehrere, stets aber eine endliche Anzahl solcher Transformationen giebt. Stellt man jetzt y und y' mit Hülfe eines Parameters t dar:

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t),$$

so sind jene oben erwähnten Transformationen für $p = 0$ dargestellt durch

$$t = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta},$$

für $p = 1$ durch

$$t = t_0 + \beta,$$

während für $p > 1$ nur gewisse in endlicher Zahl vorhandene lineare Transformationen, welche eine Gruppe bilden, in Betracht kommen können. Mit Hülfe dieses Parameters t lässt sich dann die Gleichung $F(y, y', z) = 0$ für $p = 0$ sofort in eine Riccati'sche Gleichung (zwischen t und z) umsetzen, welche, wenn nun auch z in $F = 0$ algebraisch eingeht, auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten führt (das schon von Fuchs gegebene Resultat). Für $p = 1$ erhält man eine separirbare Differentialgleichung, welche t als doppelt periodische Function von z ergiebt. Im Fall $p > 1$ gelangt man zu algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen, für welche die wirkliche Ausführung der Integration auf der Aufstellung der obenerwähnten eindeutigen Transformation der Flächen S_0 und S_1 in einander beruht. Dk.

L. Königsberger. Ueber Eigenschaften der durch Quadraturen algebraischer Functionen darstellbaren Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Kronecker J. 1C. 10-87.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der Form derjenigen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen, die sich als algebraische Functionen von Logarithmen und Abel'schen Integralen darstellen lassen, wobei die

Grenzen der letzteren und die Ausdrücke unter den Logarithmen algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln sind. Sie enthält somit die vollständige Theorie derjenigen Sätze, die unter beschränkenden Annahmen bereits in des Verfassers „Allgemeinen Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" (siehe F. d. M. XIV. 1882. 234 ff.) aufgestellt und dort als Verallgemeinerungen der bekannten Abel'schen Sätze bezeichnet sind. Den Ausgangspunkt bildet der Satz, dass, falls der reducirten Differentialgleichung nicht ebenfalls ein durch die gedachten Transcendenten algebraisch ausdrückbares Integral genügt, das Integral der nicht homogenen Differentialgleichung eine lineare Function jener Transcendenten sein muss, deren Coefficienten algebraische Integrale der reducirten sind, also die Form hat

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} z = u + u_1 \log v_1 + \cdots + u_\varrho \log v_\varrho \\ + U_1 \int^{s_1} V_1\, ds + \cdots + U_\sigma \int^{s_\sigma} V_\sigma\, ds. \end{aligned}\right.$$

Die Form der algebraischen Functionen

$$u,\ u_1, \ldots, u_\varrho,\ v_1, \ldots, v_\varrho,\ U_1, \ldots, U_\sigma,\ s_1, \ldots, s_\sigma$$

und die Eigenschaft der von s abhängigen algebraischen Functionen $V_1, \ldots, V_\sigma$ werden darauf in nähere Betrachtung gezogen. Nachdem zunächst gezeigt worden, dass aus dem Integral (1) andere Integrale gleicher Art mit rationalem Charakter in Bezug auf die Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung sich ableiten lassen, werden zur Erforschung der Eigenschaften des Integralausdruckes (1) selbst einige Sätze vorausgeschickt, die die allgemeinsten algebraischen Beziehungen zwischen Logarithmen und Abel'schen Integralen betreffen. Besteht die Relat[illegible] zwischen Logarithmen allein, so wird bewiesen, dass sie [illegible] Form haben muss:

$$a_1 \log v_1 + a_2 \log v_2 + \cdots + a_\varrho \log v_\varrho = a,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_{[illegible]}$ rationale Zahlen und a eine Constante bedeute[n], vorausgesetzt, dass nicht bereits weniger als ϱ dieser Logarithmen in einer algebraischen Beziehung stehen. Hieraus ergiebt sich dann als Endresultat einer längeren Discu[illegible]satz: Wenn

ein Integral einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung aus x und Logarithmen algebraischer Functionen algebraisch zusammengesetzt ist, so lässt es sich auf die Form bringen

$$z_1 = u + u_1 \log v_1 + \cdots + u_\varrho \log v_\varrho,$$

wo $u_1, \ldots, u_\varrho$ mit Adjungirung der Coefficienten der Differentialgleichung irreductiblen algebraischen Gleichungen von der Art genügen, dass um jeden Verzweigungspunkt derselben zwischen $\varrho+1$ Elementen eines Cyklus eine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht, während die v rational durch $u_1, \ldots, u_\varrho$ und die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind. Die $u_1, \ldots, u_\varrho$ sind particuläre algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung, von der vorausgesetzt ist, dass sie keine logarithmischen Integrale besitzt. Die analogen Sätze betreffs der allgemeinsten Beziehung zwischen Abel'schen Integralen sowie der endlichen Gestalt der Integrale der vorgelegten Differentialgleichung, die aus diesen Transcendenten algebraisch zusammengesetzt sind, lassen sich in Kürze nicht wiedergeben, und wir müssen uns hier begnügen, betreffs dieses interessanten zweiten Abschnitts der Arbeit auf das Original zu verweisen. Hr.

L. Königsberger. Ueber die Erniedrigung der Ordnung einer Differentialgleichung. Klein Ann. XXVI. 110-116.

Für eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gilt der von Herrn Frobenius herrührende Satz, dass, wenn sie mit einer ebensolchen Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung ($\mu < m$) ein Integral gemein hat, das nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung angehört, ihre Integration auf die einer Gleichung $(m-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung reducirbar ist. Der Verfasser weist nach, dass eine gleiche Reduction einer nicht linearen algebraischen Differentialgleichung, die mit einer gleichartigen niederer Ordnung ein Integral gemein hat, auf eine Differentialgleichung niederer Ordnung nicht möglich ist. Eben so wenig gestattet, wie hieraus unmittelbar hervorgeht, der bekannte Satz, dass eine lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

mit Hülfe eines particulären Integrals auf eine Gleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt werden kann, eine Ausdehnung auf nicht lineare algebraische Differentialgleichungen. Hr.

L. Königsberger. Ueber Integrale transcendenter Functionen. Kronecker J. XCVIII. 97-126.

Siehe Abschn. VI. Cap. 3. S. 262.

S. Lie. Ueber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen. Christiania Forh. No. 21. p. 1-4.

Der Verfasser hat schon im Jahre 1874 in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania eine allgemeine Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen entwickelt, und Methoden zur Erledigung jedes derartigen Problems mittels Hülfsgleichungen von möglichst niedriger Ordnung angegeben. Auf dieses allgemeine Problem lassen sich nun, so zu sagen, unmittelbar sehr viele Integrationsprobleme zurückführen, u. a. auch das folgende, mit dem sich in späteren Jahren mehrere Mathematiker beschäftigt haben:

Es ist vorgelegt eine lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)}+X_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+X_1(x)\,y'+X(x)y=0,$$

und man kennt zufälligerweise eine endliche Relation zwischen x und n particulären Lösungen $y_1,\dots,y_n$. Wie findet man diese Lösungen in einfachster Weise?

Man muss jedesmal eine gewisse continuirliche Gruppe aufstellen und ihre Zusammensetzung, insbesondere ihre grössten Untergruppen bestimmen. L.

A. P. Starkoff. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Kas. Ges. III. 79-85. (Russisch.)

Es ist bekannt, dass, wenn m particuläre Integrale einer linearen Differentialgleichung gegeben sind, die Ordnung der

Differentialgleichung um m Einheiten erniedrigt werden kann. Der Verfasser giebt in seiner Note die Ausdrücke der $n-m$ Integrale der gegebenen Gleichung durch m bekannte Integrale und $n-m$ particuläre Integrale der reducirten Gleichung $(n-m)^{ter}$ Ordnung. Die Ausdrücke sind in Determinantenform gegeben.

Wi.

A. P. Starkoff. Der Ausdruck der particulären Integrale einer reducirten linearen Gleichung durch die particulären Integrale der gegebenen. Kas. Ges. III 253-256. (Russisch.)

In dieser Note sind, im Gegensatz zur vorhergehenden soeben besprochenen, die Ausdrücke der particulären Integrale der reducirten Gleichung durch die particulären Integrale der gegebenen hergeleitet. Die Ausdrücke sind ebenfalls in Determinantenform gegeben.

Wi.

G. H. Halphen. Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrables. C. R. CI. 1238-1240.

Damit das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0$$

die Form habe

$$y=e^{ax}f(x)+e^{bx}\varphi(x)+e^{cx}\psi(x)+\cdots,$$

wo $f, \varphi, \psi,\ldots$ rationale Functionen bezeichnen, ist es notwendig und hinreichend, 1) dass die Coefficienten P ganze Polynome seien, deren Grad denjenigen von P_0 nicht überschreite, 2) dass ihr allgemeines Integral eindeutig sei. Die Constanten $a, b, c,\ldots$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$A_0z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_{n-1}z+A_n=0,$$

wo A_k den Coefficienten von x^m in P_k bezeichnet, falls m der Grad von P_0 ist.

Hr.

G. H. Halphen. Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires. Jordan J. (4) I 11-86.

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem, eine lineare homogene Differentialgleichung zu integriren, wenn eine in den Lösungen ganze homogene Function mit constanten Coefficienten als Function der unabhängigen Variabeln bekannt ist. Es liegt hier nahe, mittels fortgesetzten Differentiirens der gegebenen Relation, wobei die höheren Derivirten mit Hülfe der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung auf solche niederer als n^{ter} Ordnung reducirt werden, eine hinlängliche Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der Integrale herzuleiten. Allein von diesem Verfahren wird abgesehen, weil dadurch die Ausnahmefälle nicht hervortreten. Die Methode, die der Verfasser anwendet, beruht auf der Betrachtung der Covarianten algebraischer Formen. Es sei

$$(1)\qquad \Gamma(\eta) = \gamma_0\eta^{(n)} + n\gamma_1\eta^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\gamma_2\eta^{(n-2)} + \cdots + \gamma_n\eta = 0$$

die vorgelegte Differentialgleichung;

$$(2)\qquad G(y) = g_0y^{(n)} + ng_1y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}g_2y^{(n-2)} + \cdots + g_ny = 0$$

die zu ersterer adjungirte, so dass $g_0 = \gamma_0$ ist; $\chi(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) = \chi(\eta_i)$ ein in den Lösungen von (1) homogenes Polynom mit constanten Coefficienten vom Grade p, welches als Function der unabhängigen Veränderlichen x gegeben ist. Nach der bekannten Eigenschaft adjungirter Differentialausdrücke besteht die Relation

$$(3)\qquad \eta_k G(y) = B'(y, \eta_k),$$

wo $B' = \frac{dB}{dx}$ und $B(y, \eta)$ eine bilineare Form in $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, $\eta_k, \eta_k', \dots, \eta_k^{(n-1)}$ bedeutet, die, gleich Const. gese[...] Integral von (1) ist. Offenbar ist dann

$$\chi(B_1, B_2, \dots, B_{n-1}) \equiv \chi(B) = \text{Cons[...]}$$

wo $B_k = B(y, \eta_k)$, ebenfalls ein Integral von (2[...] von $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ betrachtet und mit F bezeich[...] diesen Grössen homogen und vom p^{ten} Grade, und die[...] sind Functionen von x. Der Coeffi[...] von $(y^{[...]}$

Aus diesem lassen sich alle übrigen Coefficienten in F vermöge der Identität

$$g_0 F' = G(y) \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}$$

explicite darstellen, und daher nennt der Verfasser $\chi(\eta)$ die Quelle (source) des Integrals F. Ein Ausnahmefall, wo $\chi(\eta)$ nicht hinreicht, das Integral F zu bestimmen, tritt ein, wenn die Differentialgleichung für die p^{ten} Potenzen der Lösungen von (1), der $\chi(\eta)$ genügt, von niedrigerem Grade als $\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}$ ist, also zwischen den Lösungen y eine oder mehrere homogene Relationen vom Grade p mit constanten Coefficienten bestehen. Nach einem Satze des Herrn Darboux ist jede Covariante von $u^p F$ vom Grade q, dividirt durch u^q, wiederum ein Integral von (2), wo

$$u = e^{-\int \frac{g_1}{g_0} dx} = \frac{1}{g_0} X e^{\int \frac{g_1}{g_0} dx} .$$

Ist nun die Covariante linear, so giebt der Coefficient von $y^{(n-1)}$, dividirt durch g_0, nach Obigem die Quelle dieses Integrals, eine Lösung von (1) ohne jede Quadratur; denn auch u selbst ergiebt sich ohne Quadratur aus der Bemerkung, dass jede Invariante von $u^p F$ constant ist. Ausgeschlossen sind hiernach die Fälle, 1) wo der Grad des Polynoms $\chi(\eta)$ gleich 2 ist, weil alsdann Covarianten von F nicht existiren; 2) wo die linearen (rationalen oder irrationalen) Covarianten identisch Null sind, oder was auf dasselbe hinauskommt, das Polynom keine „bestimmte“ reducirte (canonische) Form besitzt. Im besonderen integrirt der Verfasser die Differentialgleichungen 2ter Ordnung unter der Annahme, 1) dass das Product von drei Lösungen, 2) dass ein solches von vier Lösungen als Function von x bekannt ist. Als Anwendung des letzteren Falles wird sehr eingehend die Lamé'sche Gleichung behandelt. Endlich wird die Integration der linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung gegeben unter der Voraussetzung, dass eine in den Lösungen kubische ternäre Form als Function von x bekannt ist. Indem wir für das Nähere auf die Originalarbeit verweisen müssen, bemerken wir noch, dass der Fall, wo

die kubische Form das Product von drei Lösungen ist, eine Singularität darstellt, insofern die erforderliche lineare Covariante nicht existirt. Die Integration erfolgt in diesem Falle durch Quadraturen. Hr.

G. H. Halphen. Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires.

C. R. CI. 664-667.

In einer vorhergehenden Arbeit des Verfassers, die sich mit der Integration linearer Differentialgleichungen beschäftigte, unter der Voraussetzung, dass zwischen den Lösungen eine bekannte Relation existire, war der Fall, als eine besondere Behandlung erheischend, ausgeschlossen worden, wo der Ausdruck, der als Function der unabhängigen Variabeln x bekannt ist, eine quadratische Form in Beziehung auf die Lösungen $y_1, \dots, y_n$ mit constanten Coefficienten ist. In der vorstehenden Note sucht der Verfasser diese Lücke zu ergänzen. Zunächst wird gezeigt, dass, wenn $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \chi(y)$ die quadratische Form ist, deren Ausdruck in x bekannt ist, man zwei von x abhängige Functionen a und b stets so bestimmen kann, dass $\chi(s) = \chi(ay + by')$ gleich Null wird. Zwischen den Lösungen $s_1, \dots, s_n$ der transformirten Gleichung in s besteht eine homogene quadratische Relation mit constanten Coefficienten. Differentialgleichungen solcher Beschaffenheit sind bereits untersucht worden für den Fall, dass sie von der 3[ten] oder 4[ten] Ordnung sind. (Siehe F. d. M. XV. 1883. 265 ff.). Die erhaltenen Resultate lassen sich unmittelbar auf die vorliegende Aufgabe anwenden. Der Verfasser fügt neue Resultate hinzu, betreffend die Differentialgleichungen 5[ter] und 6[ter] Ordnung. Im ersten Falle lässt sich die Gleichung auf eine Gleichung d… 3[ten] Ordnung, im 2[ten] Falle auf 2 Gleichungen, eine von der 2… die andere von der 1[ten] Ordnung zurückführen. Für den Bew… dieser Reduction beschränkt sich der Verfasser auf einige … deutungen, deren nähere Ausführung einer zweiten Mitteilu… vorbehalten ist. Hr.

F. Brioschi. Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. Brioschi Ann. (2) XIII. 1-22.

Wie in der Arbeit des Herrn Halphen (siehe vorhergehendes Referat) wird auch hier die Aufgabe behandelt: unter der Voraussetzung, dass eine homogene Form n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$, wo die y Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung bedeuten, als Function $\varphi(x)$ der unabhängigen Variabeln x bekannt ist, die Werte von $y_1, \dots, y_m$ als Function von $\varphi(x)$, den Coefficienten der Differentialgleichung und den Ableitungen aller dieser Grössen zu bestimmen. Die Aufgabe wird darauf zurückgeführt, die Werte der Covarianten der Form f in den genannten Grössen auszudrücken. Für $m = 2$ ist die bezügliche Rechnung vom Verfasser bereits in Klein Ann. XI (siehe F. d. M. IX. 1877. 238) durchgeführt und wird hier reproducirt. Für $m = 3$ werden folgende drei Covarianten in der verlangten Weise dargestellt: die Hesse'sche Form h, die mit $\frac{\partial h}{\partial y_1}, \frac{\partial h}{\partial y_2}, \frac{\partial h}{\partial y_3}$ geränderte Hesse'sche Determinante k und die Functionaldeterminante $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial h}{\partial y_2} \frac{\partial k}{\partial y_3}$. Der Fall $f = 0$, der bekanntlich den Gegenstand einer eingehenden Abhandlung des Herrn Fuchs (Berl. Ber. 1882 und Acta Math. I., siehe F. d. M. XIV. 1882. 249) bildet, erfordert eine Bedingungsgleichung für die Coefficienten der Differentialgleichung. Dieselbe ist für $n = 3$ bereits durch Herrn Halphen angegeben und wird hier von neuem abgeleitet. Unter der besonderen Annahme, dass gleichzeitig $f = 0$ und $h = 1$ ist, bestehen zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung zwei Relationen, die für $n = 3$ und $n = 4$ entwickelt werden. Auf den letzteren Fall werden gewisse lineare Differentialgleichungen, die in der Theorie der Transformation elliptischer Functionen auftreten, zurückgeführt und hierbei mehrere bereits früher teils durch den Verfasser selbst, teils durch die Herren Halphen und Hurwitz abgeleitete Resultate verificirt. Hr.

v. Escherich. **Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.** Wien Abh. LI. 22 Seiten.

Die Arbeit enthält vornehmlich die vollständige Beweisführung des von Herrn Appell herrührenden Satzes (C. R. XC. und XCI., und Ann. de l'Éc. N. (2) X., siehe F. d. M. XII. 1880. p. 250 und XIII. 1881. p. 254): dass jede in den Elementen eines Fundamentalsystems einer linearen Differentialgleichung und deren Derivirten ganze Function F, die beim Uebergange von diesem Fundamentalsystem zu einem anderen bloss um einen constanten Factor sich ändert, durch das Product einer Potenz der Determinante dieses Fundamentalsystems in eine nach den Coefficienten der Differentialgleichung und deren Derivirten ganze Function ausgedrückt werden kann. Die Methode besteht darin, F in ein Aggregat von Determinanten der Form zu verwandeln:

$$\begin{matrix} y_1^{i_1} & y_1^{i_2} & \cdots & y_1^{i_m} \\ y_2^{i_1} & y_2^{i_2} & \cdots & y_2^{i_m} \\ \vdots & & & \\ y_m^{i_1} & y_m^{i_2} & \cdots & y_m^{i_m}, \end{matrix}$$

wo $y_1, \dots, y_m$ die m Elemente eines Fundamentalsystems bedeuten, und $y^{i_k} = \dfrac{d^{i_k} y}{dx^{i_k}}$ gesetzt ist. Von diesen Determinanten hat aber der Verfasser bereits in früheren Arbeiten (Wien. Abh. XLVI. und XLVII., F. d. M. XIV. 1882. 281 und XV. 1883. 250) gezeigt, und wird hier aus der Betrachtung gewisser allgemeinerer Determinanten von neuem dargethan, dass sie sich durch die Coefficienten der Differentialgleichung in der angegebenen Weise ausdrücken lassen. Bemerkenswert ist die Darstellung der betreffenden Formeln in fertiger Gestalt. Hieran knüpft der Verfasser die Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingung, dafür dass eine ganze Function der Elemente eines Fundamentalsystems identisch Null oder gleich einer ganzen Function der Unabhängigen ist. Durch das Verfahren des wiederholten Differentiirens, welches auch Herr Appell für die nämliche Aufgabe anwendet, ergiebt sich, dass die fragliche [illegible]ng sich

durch eine Relation zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung und ihrer Derivirten ausdrücken lässt. Die vorangehenden Entwickelungen werden schliesslich auf einige specielle Fälle angewandt, die bekannte Resultate bestätigen.

Hr.

H. Poincaré. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. Newcomb Am. J. VII. 203-258.

H. Poincaré. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. C. R. CI. 939-941, 990-992.

Es handelt sich um die Untersuchung der irregulären Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes, der in die Unendlichkeit verlegt wird. In der ersterwähnten ausführlichen Arbeit geht der Verfasser von dem Falle aus, dass die Polynome P in der Differentialgleichung

$$(1)\qquad P_n\frac{d^ny}{dx^n}+P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_1\frac{dy}{dx}+P_0y=0$$

alle von gleichem Grade p sind. Ist A_i der Coefficient von x^p in P_i, so wird als Grenzwert von $y':y$ für $x=\infty$ eine der Wurzeln $a_1,\dots,a_n$ der Gleichung

$$A_nz^n+A_{n-1}z^{n-1}+\cdots+A_1z+A_0=0$$

bezeichnet. Diese Behauptung, welche involviren würde, dass die Gleichung (1) n Integrale von der Form $e^{a_kx}x^{\lambda}\varphi(x)$ zulasse, wo $\varphi(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihe bezeichnet, wird hier ohne alle Einschränkung hingestellt, wiewohl es bekannt ist, dass die Reihen φ nur unter besonderen Bedingungen convergiren.

Mittels Anwendung der Laplace'schen Transformation werden ferner die Integrale von (1) in der Form bestimmter geschlossener Integrale $\int e^{xz}v\,dz$ dargestellt, wo v als Function von z einer

Gleichung der nämlichen Form wie (1) genügt und die Integrationscurven, durch das Unendliche gehend, je eine der Wurzeln a_k umschliessen. Im besonderen ergiebt sich, dass, wenn $n > p$ ist, die Gleichung (1) $n-p$ linear unabhängige, in der ganzen Ebene holomorphe Integrale besitzt. Hieran knüpft sich die Angabe der Bedingungen, unter denen einige dieser Integrale ganze Functionen sind. Als der Differentialgleichung (1) analog wird auch die Gleichung mit endlichen Differenzen

$$P_n u_{k+n} + P_{n-1} u_{k+n-1} + \cdots + P_1 u_{k+1} + P_0 u_k = 0,$$

worin die P ganze Functionen des Index k sämtlich vom gleichen Grade p vorstellen, in Betracht gezogen. Hier stellt der Verfasser, wiederum ohne die nötige Beschränkung, den Satz auf, dass $\lim (u_{k+1} : u_k)$ für $k = \infty$ eine der Wurzeln a_k zum Werte habe, und behandelt mit Hülfe desselben die Aufgabe, die Curve zu bestimmen, die den Convergenzbereich der Reihe

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n + \cdots$$

begrenzt, wo die α beliebige Constanten sind und die P ganze Functionen von x bedeuten, die durch die Recursionsformel

$$Q_k P_{n+k} + Q_{k-1} P_{n+k-1} + \cdots + Q_1 P_{n+1} + Q_0 P_n = 0$$

miteinander verknüpft sind; hierbei sind die Q ganze Functionen von x und n. In den an zweiter Stelle angeführten Noten werden die Lösungen $y = e^{ax} x^{\lambda} \varphi(x)$ der Gleichung (1) auf ihren wahren Wert zurückgeführt, indem sie, als im allgemeinen divergente Reihen darstellend, nur als „formelle" Lösungen bezeichnet werden, deren Bedeutung es gilt festzustellen. Nach dem Vorgang des Herrn Thomé nennt der Verfasser ein Integral von der allgemeineren Form $e^{Q_p(x)} x^{\lambda} \varphi(x)$, worin Q_p ein Polynom p^{ten} Grades in x bedeutet, eine Normalreihe p^{ter} Ordnung, wonach [illegible] oben betrachteten solche 1ter Ordnung sind. Bezeichnet S_n [illegible] der n ersten Glieder der nach fallenden Potenzen v[illegible] neten divergenten Reihe, und λ_n das n^{te} Glied dersel[illegible] die Gleichung, der eine solche Normalreihe formell [illegible] Integral J von der Beschaffenheit, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lambda_n} (J - S_n) = 0,$$

wenn x mit einem gewissen gegebenen Argument ins Unendliche geht. Ist ferner $y = \varphi(x)$ irgend ein Integral einer Gleichung, der formell n Normalreihen p^{ter} Ordnung genügen, und setzt man

$$u = \varphi(x).\varphi(\alpha x)\dots\varphi(\alpha^{p-1}x),\quad t = x^p,$$

wo α eine p^{te} Wurzel der Einheit ist, dann genügt u als Function von t einer linearen Differentialgleichung, die nur Normalreihen 1ter Ordnung zu Integralen hat, und $y':y$ ist, von einem gewissen Ausnahmefall abgesehen, eine rationale Function von x, u und den ersten Derivirten von u. Der Verfasser resümirt schliesslich die Ergebnisse seiner Untersuchungen dahin, dass die Normalreihen des Herrn Thomé, selbst wenn sie divergent sind, die Integrale der Differentialgleichung genau so darstellen, wie die Stirling'sche Reihe die Function $\Gamma'(x):\Gamma(x)$. Hr.

E. Grünfeld. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Kronecker J. XCVIII 333-348.

L. W. Thomé. Bemerkung zu der vorhergehenden Abhandlung. Kronecker J. IC. 88.

Ausgehend von der durch Herrn Frobenius (Borchardt J. LXXVII. p. 245 ff., F. d. M. VI. 1874. 87) gegebenen Darstellung der linken Seite einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in der Form eines symbolischen Products

$$P(y) = \frac{D_m}{D_{m-1}}\frac{d}{dx}\frac{D_{m-1}^2}{D_m D_{m-2}}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{D_1^2}{D_2 D_0}\frac{d}{dx}\frac{D_0}{D_1}y,$$

wo D_i die Determinante der Integrale y_1 bis y_i und ihrer $(i-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen bedeutet, zeigt Herr Grünfeld den Zusammenhang dieser Zerlegung mit der folgenden

$$P(y) = v_1 v_2 \dots v_m \frac{d}{dx} v_m^{-1} \frac{d}{dx} v_{m-1}^{-1} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} v_1^{-1} y,$$

worin $v_1, v_2, \dots, v_m$ die in der bekannten Darstellung eines Fundamentalsystems

$$y_1 = v_1,\quad y_2 = v_1\int v_2\,dx, \dots, y_m = v_1\int v_2\,dx\dots\int v_m\,dx$$

auftretenden Grössen bezeichnen. Es ergeben sich die Relationen

$$(1)\quad D_1 = c_1,\quad D_2 = c_1^2 c_2,\quad D_3 = c_1^3 c_2^2 c_3, \dots, D_m = c_1^m c_2^{m-1} \dots c_m.$$

Entsprechend wird die linke Seite der Multiplicatorgleichung $P_1(z)$ auf zwei verschiedene Weisen in symbolische Producte zerlegt. Daran schiesst sich eine dritte Zerlegung mittels der Grössen y, die in der von Herrn Thomé herrührenden Darstellungsform des Fundamentalsystems:

$$y_1 = \eta_1,\quad y_2 = \eta_1 \int \frac{\eta_2}{\eta_1}\,dx, \dots, y_m = \eta_1 \int \frac{\eta_2}{\eta_1}\,dx \dots \int \frac{\eta_m}{\eta_{m-1}}\,dx$$

vorkommen. Im folgenden Abschnitte werden die Bedingungen angegeben, unter denen die Grössen η_i und somit auch die symbolischen Factoren von $P(y)$ unter einander beliebig vertauschbar sind, und es wird die Form der Coefficienten der Differentialgleichungen von dieser Beschaffenheit festgestellt. Der dritte Abschnitt handelt von Differentialgleichungen, welche k particuläre Integrale von der Form y_1, $xy_1, \dots, x^{k-1}y_1$ zulassen. Diese Integrale, auf die Herr Brassinne zuerst die Aufmerksamkeit gelenkt hat, haben für die Differentialgleichung eine ähnliche Bedeutung, wie eine k-fache Wurzel für die algebraische Gleichung, und gestatten eine Erniedrigung der Ordnung der Differentialgleichung um k Einheiten. Zugleich werden, wie Herr Floquet gezeigt hat, die k letzten Factoren in dem symbolischen Product für $P(y)$ einander gleich. Im letzten Abschnitt wird die dritte Zerlegungsweise von $P(y)$ dazu benutzt, um die Integration der completen Gleichung $P(y) = p$ auszuführen. Zum Schluss wird die linke Seite bekannter Differentialgleichungen, insbesondere der Fuchs'schen (Borchardt J. LXVI. p. 146), in der Form symbolischer Producte dargestellt.

Herr Thomé, den Herr Grünfeld in seiner Abhandlung merkwürdiger Weise nirgends citirt hat, fixirt seinen Anteil an den meisten der in der Abhandlung abgeleiteten Resultate und bemerkt, dass die Formeln (1) bereits von Hesse in Borchardt J. LIV. p. 249 mitgeteilt worden sind. Hr.

E. Grünfeld. Ueber die Bedingungen, unter denen zwei lineare homogene Differentialgleichungen mehrere particuläre Integrale gemeinsam haben. Schlömilch Z. XXX. 210-215.

Die Arbeit enthält im wesentlichen eine Ausführung des von Herrn Lemonnier in den C. R. XCV. (siehe F. d. M. XIV. 1882. 283) angegebenen Verfahrens, die in Rede stehenden Bedingungen auszudrücken. Hr.

L. Autonne. Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires, à coefficients rationnels. (Second mémoire.) J. de l'Éc. Pol. Cah. LIV. 1-30.

Wenn eine lineare Differentialgleichung p^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten $Y = 0$ zu ihrem Integrale eine algebraische irreductible Gleichung $H = 0$ vom Grade $m = p + n$ mit rationalen Coefficienten besitzt, so bestehen n lineare Gleichungen zwischen den Wurzeln von $H = 0$. In einer früheren Arbeit (vergl. das Referat Bd. XV. 1883. p. 255) hatte der Verfasser aus der Existenz dieses Systems von Gleichungen Folgerungen gezogen für die Natur der Gruppe G der Gleichung $H = 0$ und die der entsprechenden isomorphen Gruppe Γ der linearen Substitutionen zwischen den Functionen $X_1, \dots, X_n$, wo $X_1 = 0, \dots, X_n = 0$ das System der genannten Gleichungen darstellen. Es war jedoch nur der Fall, wo m prim und $n < 4$, in Betracht gezogen. Hier wird das Problem in seiner Allgemeinheit wieder aufgenommen. Im ersten Teile werden folgende Sätze bewiesen:

I. Wenn die Gruppen G und Γ hemiedrisch isomorph sind, so resultirt die Gleichung $H = 0$ aus der Elimination eines Parameters ζ zwischen den beiden Gleichungen

$$\eta^M + A_1(\zeta, x)\eta^{M-1} + \cdots = 0$$

und

$$Z = \zeta^L + B_1(x)\zeta^{L-1} + \cdots = 0,$$

wo $m = M.L$, x die unabhängige Variable, $A_1, \dots, B_1, \dots$ rationale

Functionen bezeichnen. Die Gruppe von $Z = 0$ ist zu Γ isomorph ohne Hemiedrie. Wenn ζ zu Γ ohne Hemiedrie isomorph ist, so ist $L = 1$, $M = m$, und die erste Gleichung wird identisch mit $H = 0$.

II. Man kann immer eine Gleichung mit rationalen Coefficienten $\Xi = 0$ vom Grade L bilden, derart, dass die Wurzeln derselben Integrale von $Y = 0$ sind und $L-n$ von ihnen linearunabhängig sind. Die Gruppe von $\Xi = 0$ wird zu Γ isomorph sein ohne Hemiedrie.

III. Jede Gleichung $Q = 0$, deren Gruppe ohne Hemiedrie einer linearen Gruppe Γ von endlicher Ordnung isomorph ist, wird eine Abel'sche, nachdem man eine Hülfsgleichung $\varphi = 0$ mit rationalen Coefficienten aufgelöst hat. Der Grad von $\varphi = 0$ hängt nur von n ab.

Im 2ten Teil wird m prim angenommen. Die Gruppen G und Γ sind dann isomorph ohne Hemiedrie, und die Gleichung $H = 0$ ist eine Galois'sche Gleichung.

Im 3ten Teil werden die verschiedenen Typen der im ersten Teil definirten Gleichungen $\Theta = 0$, $\Phi = 0$ angegeben, wenn m eine beliebig zusammengesetzte Zahl bedeutet. Doch beschränkt sich der Verfasser auf die Fälle $n = 1, 2, 3$, da die Aufzählung der linearen Gruppen endlicher Ordnung für mehr als drei Variable bisher noch nicht ausgeführt ist. Hr.

L. Raffy. Sur les quadratures algébriques et logarithmiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 185-206.

Das hier behandelte Problem ist: die Bedingu[illegible] chen, unter der eine lineare Differentialgleichung für y [illegible] von x als Coefficienten ein particulares Integral [illegible] Function, zweitens, das ein einziger Logarithmus i[illegible] ist zuerst von Liouville gelöst, und die Lösung o[illegible] C. R. II. mitgeteilt. Es wird hier aufgenommen [illegible] dann der zweite Fall untersucht. Sei gegeben

(16) $f(u, U) = U^m f_0(u) + U^{m-1} f_1(u$ [illegible] (u)

wo die Coefficienten f Polynome in [illegible]

die Function u von z, die inverse von

$$z = \int^u \frac{du}{U},$$

einfach periodisch ist und für jedes z nur eine begrenzte Anzahl von Werten hat. Nach einem Satze von Briot und Bouquet ist u die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen von e^{gz} sind, wo g constant. Ueberdies hat die Gleichung (16) drei Eigenschaften, namentlich die, dass die Werte c von $\frac{u}{U}$ für $u = \infty$ und die Werte c' von $\frac{du}{dU}$ für $U = 0$ eine Reihe unter sich commensurabler Zahlen bilden. Hieraus lassen sich c und c' und bis auf einen ganzen Factor g finden. Das Integral z hat dann bzbw. die polare Periode $2pi\pi c$, $2p'i\pi c'$, wo p, resp. p' Werte von U derart, dass sie ein circuläres System bilden. Sei ϱ grösster Divisor aller polaren Perioden, so dass diese stets Vielfache von $2i\pi\varrho$ sind. Hat z auch Abel'sche Perioden, so giebt es eine ganze positive Zahl λ, für welche $\frac{2i\pi\varrho}{\lambda}$ ihr grösster gemeinsamer Divisor ist. Dann hat $e^{\frac{\lambda z}{\varrho}}$ m Werte für jedes u. Es ist nicht gelungen, λ zu bestimmen; sei λ als bekannt vorausgesetzt. Zur Vereinfachung wird z statt $\frac{z}{\varrho}$ geschrieben. Dann ist

$$e^{\lambda z} = \xi_0 + \xi_1 U + \cdots + \xi_{m-1} U^{m-1}$$

eine algebraische Function von u und lässt m Werte für jedes u zu. Die ξ sind rationale Functionen von u. Zu ihrer Bestimmung differentiirt man die Gleichung nach z, setzt für $e^{\lambda z}$ seinen Wert, für $\frac{du}{dz}$ den Wert U und giebt dem U die m verschiedenen Werte $U_1, U_2, \ldots, U_m$, entsprechend $f(u, U) = 0$. Es wird nun gezeigt, wie die ξ zu berechnen sind, indem zuerst ihr gemeinsamer Nenner bestimmt wird. Dann folgen zwei Bemerkungen zur Abkürzung der Rechnung und die Anwendung auf zwei Specialfälle. H.

E. Goursat. Sur les intégrales algébriques des équations linéaires. C. R. C. 1329-1332.

Herr Jordan hat im Band LXXXIV. des Borchardt'schen J. das Mittel angegeben, alle endlichen Gruppen zu erhalten, die in der linearen Gruppe von n Variablen enthalten sind, und diese Gruppen bis $n = 4$ einschliesslich aufgezählt. Die Bildung der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, welcher eine dieser Substitutionsgruppen angehört, ist im allgemeinen schwierig. Der Verfasser zeigt, dass man in dem besondern Fall der hypergeometrischen Gleichungen höherer Ordnung ohne alle Rechnung eine unendliche Anzahl Gleichungen dieser Form, die eine gegebene Gruppe von Substitutionen zulassen, erhalten kann, vorausgesetzt, dass diese Gruppe eine gewisse Bedingung erfüllt.

Hr.

Th. Craig. On a certain class of linear differential equations. Newcomb Am. J. VII. 279-287.

Es werden die Bedingungen dafür untersucht, dass eine lineare Differentialgleichung Integrale besitzt, welche periodische Functionen dritter Art sind. Als solche werden Functionen $F(x)$ bezeichnet von der Eigenschaft $F(x+\omega) = e^{-\lambda x+\lambda_0} F(x)$, wo λ und λ_0 Constanten sind. Es ergiebt sich, dass die Coefficienten der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

in diesem Falle die Form haben müssen:

$$p_i = \sum_{\alpha=0}^{n-i} \frac{(n-i+\alpha)(n-i+\alpha-1)\dots(n-i+1)}{1.2.3\dots\alpha} \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{\omega^\alpha} \varphi_{i+\alpha}(x),$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

wo die φ einfach-periodische Functionen sind, so dass

$$\varphi_k(x+\omega) = \varphi_k(x)$$

ist.

Hr.

Th. Craig. On linear differential equations whose fundamental integrals are the successive derivatives of the same function. Newcomb Am. J. VIII. 85-103.

Die Bestimmung der Differentialgleichungen von der Eigenschaft, dass ihre Fundamentalintegrale die aufeinanderfolgenden Ableitungen einer und derselben Function sind, zeigt sich abhängig von der Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$q''+(p-2q)q'=0,$$

wobei für p beliebige Festsetzungen gestattet sind, die dann auf unendlich viele verschiedene Arten so getroffen werden können, dass die Gleichung integrabel wird. Die Integrale der zu bestimmenden Differentialgleichung sind dann $y=e^{-\int q\,dx}$ und die successiven Ableitungen dieser Function, womit die Coefficienten der Differentialgleichung in bekannter Weise zugleich gegeben sind. In dem Falle, dass die Coefficienten periodische Functionen erster Art mit der gemeinsamen Periode ω sind, ergiebt sich den Untersuchungen des Herrn Floquet gemäss (Ann. de l'Éc. Norm. (2) XII., F. d. M. XV. 1883, 279), dass y eine periodische Function zweiter Art sein muss, so dass, wenn $y=\varphi(x)$ gesetzt wird, $\varphi(x+\omega)=s\varphi(x)$ ist. Offenbar irrtümlich ist aber die Aufstellung des Verfassers, dass hier stets $s=1$ sein müsse, da aus $q(x+\omega)=q(x)$ keineswegs notwendig, wie behauptet wird, folgt, dass auch $e^{-\int q(x+\omega)dx}=e^{-\int q(x)\,dx}$ ist. Im 2ten Abschnitt werden Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung behandelt, deren Integrale α von einander unabhängige Functionen $y_1, y_2, \dots, y_\alpha$ und deren Ableitungen bis zur resp. λ_1-1, λ_2-1, …, $(\lambda_\alpha-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, wo $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\alpha=n$ ist. Hr.

E. Picard. Sur les groupes de certaines équations différentielles linéaires. Darb. Bull. (2) IX. 202-209.

Die bestimmten Integrale

$$\int_g^h (u-a_1)^{\lambda_1-1}(u-a_2)^{\lambda_2-1}\dots(u-a_n)^{\lambda_n-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

wo g und h irgend zwei der Grössen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, x, \infty$$

bezeichnen, genügen, als Functionen von x betrachtet, bekanntlich einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, die Herr Pochhammer in Borchardt J. LXXI. (siehe F. d. M. II. 1870. 265) entwickelt hat. Die singulären Punkte der Gleichung sind $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$, und die bei einem Umlauf von x um diese Punkte eintretenden Wertänderungen der Integrale, aus denen die fundamentalen Substitutionen der Gruppe der Gleichung sich ergeben, lassen sich aus der obigen Integralform selbst ableiten. Das dabei anzuwendende Verfahren führt der Verfasser für $n = 2$ und $n = 3$ aus und erhält dabei die bezüglichen Gruppen. Wir bemerken übrigens, dass dieser Weg schon längst von verschiedenen Mathematikern eingeschlagen worden ist, und verweisen hierfür auf die Arbeiten des Herrn Fuchs (Borchardt J. LXXI., siehe F. d. M. II. 1870. 248) und des Herrn Hossenfelder (Clebsch Ann. IV., siehe F. d. M. III. 1871. 161). Hr.

E. A. Stenberg. Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen. Helsingfors. 4°. (4) + 75 + (1) S. — Inauguraldissertation.

Der wesentliche Inhalt dieser Abhandlung ist in den Acta Math. VIII. 119—154 reproducirt worden. (Referat im nächsten Bande.) E.

W. Heymann. Ueber Supplementintegrale. Kronecker J. XCVIII. 231-240.

W. Heymann. Ueber die Integration linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXX. 27-52, 79-105.

Beide Abhandlungen, die letztere in ausführlicher Weise, beschäftigen sich damit, für lineare complete Differentialgleichungen, ohne Anwendung der Variation der Constanten in dem allgemeinen Integral der reducirten Gleichung, das „Supplementintegral" direct herzuleiten. Mit diesem Namen bezeichnet der Verfasser

den Ausdruck, der, zu dem allgemeinen Integral der reducirten Gleichung hinzugefügt, das Integral der compléten Gleichung darstellt. Die vorgelegte Gleichung sei

$$(1) \qquad X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + X_1 y' + X_0 y = X_\mu.$$

I. Jede der Functionen X ist ein Polynom von einem dem Index gleichen Grade. Dann ist das Supplementintegral eine ganze Function vom Grade μ. Die Coefficienten derselben werden durch Substitution in (1) mittels recurrenter Gleichungen erhalten. Ausnahmefälle, in denen einige Coefficienten entweder unbestimmt werden, oder das Supplementintegral überhaupt keine ganze Function ist, treten ein, wenn die reducirte Gleichung selbst durch eine ganze Function befriedigt wird. Wenn die Grade von X_1 bis X_k den bezüglichen Indices gleich sind, während die von X_{k+1} bis X_n beliebig bleiben, und zugleich $\mu \geq k$ ist, dann ist das Supplementintegral eine ganze Function vom Grade k.

II. $X_n, \ldots, X_1$ sind Polynome von beliebigem Grade, X_μ vom μ^{ten} Grade. Uebersteigen die Grade der ersteren die Indices im Maximum um k, und ist $k < \mu$, so ist das Supplementintegral eine ganze Function $(\mu - k)^{ten}$ Grades plus einer Grösse z, die eine particuläre Lösung einer Gleichung ist, in welcher der Grad der rechten Seite auf den $(k-1)^{ten}$ erniedrigt ist. Die Bestimmung von z geschieht wie in dem folgenden Falle.

III. $X_n, \ldots, X_1$ sind wiederum Polynome von beliebigem Grade X_μ ist eine beliebige Function von x. In diesem Falle geschieht die Bestimmung des Supplementintegrals, die selbstverständlich nicht im allgemeinen gegeben werden kann, an gewissen Gruppen von Gleichungen, und zwar solchen, bei denen die Lösungen der bezüglichen reducirten Gleichung durch bestimmte einfache oder Doppelintegrale bekannt sind, wie bei der Riccati'schen Gleichung, der Laplace'schen Gleichung und den hypergeometrischen Gleichungen n^{ter} Ordnung. Das Verfahren besteht darin, dass man die Form des bestimmten Integrals, das der reducirten Gleichung genügt, beibehält und, indem man dasselbe unter Anwendung der Reductionsmethode in die complete Gleichung einsetzt, sowohl die Grenzen des bestimmten Integrals als die darin auftretende Function so bestimmt, dass die Gleichung

identisch wird. Hierbei handelt es sich dann um die Auflösung von Functionalgleichungen folgender Art:

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)du = X, \quad \int_{u_1}^{u_2} (u-x)^{\lambda-n} F(u)du = X,$$

wo X eine gegebene beliebige Function bedeutet und $F(u)$ die zu ermittelnde Function ist. Ein besonderer Abschnitt ist der Darstellung der Supplementintegrale linearer nicht homogener simultaner Differentialgleichungen gewidmet. Hr.

Carl Schmidt. Ueber die singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Diss. Giessen. 42 Seiten.

Die Gleichung für die singuläre Lösung, wie sie sich auf dem bekannten Wege aus der allgemeinen Lösung ergiebt, liefert in vielen Fällen auch particuläre Lösungen. Es entsteht die Frage, wodurch sich diese vor den übrigen particulären Lösungen auszeichnen. Diese Ergänzung wird im ersten Teile der Arbeit gegeben. Ist $y = \varphi(x, c)$ die allgemeine Lösung, nach c aufgelöst: $\chi(x, y) = c$, so genügt jede singuläre Lösung der Gleichung $\varphi_2[x, \chi(x, y)] = 0$ oder, was dasselbe ist, der Gleichung $\chi_2(x, y) = \infty$, wo der Index 2 die partielle Ableitung nach dem zweiten Argument bezeichnet. Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden: 1) $\varphi_2(x, z) = 0$ wird durch $z = g(x)$ befriedigt, wo $g(x)$ sich nicht auf eine Constante reducirt. Dann ist $y = \varphi(x, g(x))$ oder $\chi(x, y) = g(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung und hat die besondere Eigenschaft, die Enveloppe einer Schar von particulären Curven zu sein. Diese Lösung ist daher singulär, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass die Enveloppe selbst zur Schar der particulären Curven gehört. 2) $\varphi_2(x, z) = 0$ wird durch den constanten Wert $z = a$ befriedigt. Ist zunächst a endlich, dann stellt $y = \varphi(x, a)$ oder $\chi(x, y) = a$ keine Enveloppe dar, sondern eine particuläre Lösung, die sich vor den übrigen durch folgende Eigenschaft auszeichnet: Ist (x_1, y_1) eine beliebige Stelle im Gebiet der Variablen x, y,

so giebt es eine Reihe verschiedener particulärer Curven, welche diese Stelle enthalten. Nähert sich (x_1, y_1) einer beliebigen Stelle (x_0, y_0) der particulären Curve $y = \varphi(x, a)$, so müssen mindestens zwei jener particulären Curven mit der Curve $y = \varphi(x, a)$ zusammenfallen. Ist $a = \infty$, so tritt diese Eigenschaft nur dann ein, wenn mit $\varphi_1(x, z)$ zugleich $z^2\varphi(x, z)$ für $z = \infty$ verschwindet. Der zweite Teil knüpft an den Existenzbeweis für die Lösungen von Differentialgleichungen an, welcher von Briot und Bouquet gegeben worden ist. Von der Potenzreihe, durch welche dort die Lösung dargestellt wird, weist der Verfasser nach, dass sie eine particuläre Lösung liefert. Singuläre Lösungen können nur solche Gebilde sein, welche die Eigenschaft haben, dass in der Umgebung ihrer Stellen y' sich nicht regulär verhält. Ist $G(x, y, y') = 0$ eine algebraische Differentialgleichung, wo G eine ganze Function vom Grade n in y' bedeutet, so ist die notwendige Bedingung für die singuläre Lösung durch das Zusammenbestehen der beiden Gleichungen $G = 0$, $\frac{\partial G}{\partial y'} = 0$ gegeben. Durch Elimination von y' findet man $\Delta(x, y) = 0$. Die entsprechende Curve wird als „Discriminantencurve" bezeichnet. Während an jeder anderen Stelle $G = 0$ n verschiedene Wurzeln y' hat, denen n verschiedene particuläre Lösungen entsprechen, müssen an jeder Stelle (a, b), worin $\Delta(x, y) = 0$, mindestens zwei Werte von y' einander gleich werden. Im allgemeinen wird aber dabei keine Wurzel y' die Gleichung

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial \Delta}{\partial y} y' = 0$$

befriedigen, also $\Delta(x, y) = 0$ überhaupt keine Lösung der Differentialgleichung sein. In diesem Falle ergiebt sich, dass die Discriminantencurve der Ort von singulären Punkten particulärer Curven ist. Soll $\Delta(x, y) = 0$ eine Lösung sein, so muss neben den Gleichungen $G = 0$, $\frac{\partial G}{\partial y'} = 0$ noch die Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} y' = 0$$

bestehen.

Für die Erkenntnis der Bedeutung der Discriminantencurve ist es nötig zu unterscheiden, ob die den verschiedenen Wurzeln y' entsprechenden Parameter der particulären Curven beim Durchgang durch die Discriminantencurve, wo mehrere Werte von y' zusammenfallen, ebenfalls einander gleich werden oder verschieden bleiben. Die verschiedenen dabei auftretenden Fälle werden an der Hand von zahlreichen einfachen Beispielen übersichtlich discutirt. Bemerkenswert ist noch eine eingehende analytische Untersuchung, die der Verfasser anstellt, um zu einer Reihenentwickelung für y in einem Falle zu gelangen, wo, wie hier, die von Briot und Bouquet gegebene Methode nicht zureicht. Es gelingt dies durch eine Umformung der Differentialgleichung mittels einer geeigneten Substitution. Für die näheren Einzelheiten dieser interessanten Entwickelung müssen wir jedoch auf das Original verweisen. Hr.

E. Picard. Sur un théorème de M. Darboux. C. R. C. 618-620.

Die Darboux'sche Integrationsmethode der Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades (Darboux Bull. (2) II, cf. F. d. M. X. 1878. 214 ff.), nach welcher man das allgemeine Integral aus einer hinreichenden Anzahl von particulären, algebraischen Lösungen zusammensetzen kann, ist einer Ausdehnung auf Differentialgleichungen erster Ordnung und beliebigen Grades fähig. Ist

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0$$

eine solche, wo P und Q ganze Functionen vom m^{ten} Grade bedeuten und z durch die irreductible Gleichung p^{ten} Grades $f(x, y, z) = 0$ definirt ist, so besteht für jede particuläre, algebraische Lösung $\varphi(x, y, z)$ die Identität:

$$(a)\quad P\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = Af + B\varphi,$$

wo A und B ganze Functionen sind und zwar B vom Grade $m+p-2$. Ist dann $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ eine Anzahl solcher Lösungen, und sind $B_1, \dots, B_r$ die entsprechenden ganzen Functionen B; bestimmt

man ferner die Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ so, dass $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_i$ durch $f(x, y, z)$ teilbar wird, so stellt $\varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_r^{\alpha_r} = C$ in Verbindung mit $f = 0$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung dar. Die Bestimmung der Constanten ist sicher möglich, wenn

$$r = \frac{p^3+3p^2m+(3m^2-1)p}{6}$$

ist. Vorausgesetzt wird, dass keine der Schnittcurven der Fläche $f = 0$ mit den Flächen $\varphi = 0$ gleichzeitig vielfache Linie von $f = 0$ ist, da sonst die Identität (α) zu bestehen aufhören kann; dies tritt jedoch auf Grund eines Satzes von Noether (Clebsch Ann. VI.) nicht ein, wenn $P = 0$ und $Q = 0$ durch die vielfachen Linien gehen. T.

E. Laguerre. Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels. Jordan J. (4) I. 135-165.

Eine ausführliche durch viele Beispiele erläuterte Darstellung der Untersuchungen der Herrn Verfassers, in Betreff deren auf die Referate in den F. d. M. XII. 1880. 333 und XVI. 1884. 374 zu verweisen ist. Die früheren Arbeiten des Verfassers, welche diesen Gegenstand behandeln, findet man: S. M. F. Bull. V. 78-92, VIII. 21-27, 36-52; Liouville J. (3) VI. 99-110; C. R. LXXXIV. 643-645, LXXXVII. 820-822, 923-925, XCVIII. 209-212; cf. F. d. M. IX. 1877, X. 1878, XII. 1880, XVI. 1884. T.

W. Hecht. Zur Integration der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$. Leipzig. B. G. Teubner.

Sind M, N in der Gleichung $Mdx + Ndy$ Polynome in x und y höchstens n^{ten} Grades, und hat die Gleichung $n+1$ lineare Particularlösungen, bezeichnet durch y_1, y_2, etc., so ist nach einem

satze von Minding mit Vorbehalt bestimmter Specialfälle

$$(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_{n+1})$$

integrirender Divisor der Gleichung und die Form des hergestellten Differentials leicht anzugeben. Ein zweiter Satz von Minding setzt M, N nur in y als ganze Functionen voraus. Im ersten Abschnitt der Arbeit wird die Gleichung für $n=3$ behandelt. Die Annahme, dass sie durch $y=\alpha x+\beta$ befriedigt wird, führt zu vier Gleichungen, deren erste, ohne β, 4ten Grades in Bezug auf α ist, während die übrigen 1ten, 2ten, 3ten Grades in β auftreten. Die beiden ersten bestimmen also vier im allgemeinen verschiedene Wertpaare von α, β, mithin lineare Particularlösungen, die beiden letzten sind Bedingungen von deren Existenz. Hiernach werden nun die Fälle discutirt, der erste Minding'sche Satz für vier ungleiche α angewandt und die Gleichung integrirt. Für den Fall gleicher Wurzeln α leistet der zweite Minding'sche Satz das Erforderliche. Der zweite Abschnitt behandelt die entsprechende Aufgabe für Polynome n^{ten} Grades M, N, wenn $n+1$ lineare Lösungen existiren. H.

W. P. Maximowitsch. Équations différentielles générales qui se ramènent aux quadratures. C. R. CI. 809-811.

Der Verfasser stellt den Satz auf, dass jede Differentialgleichung erster Ordnung, die durch Quadraturen integrabel ist, die transformirte einer linearen Gleichung sein müsse, und giebt an, er sei im Stande, die Reduction, falls sie möglich ist, zu bewirken, oder zu beweisen, dass dieselbe und in Folge dessen die Integration unter endlicher Form unmöglich sei. (Siehe das folgende Referat.) Hr.

W. P. Maximowitsch. Die Auffindung der allgemeinen Differentialgleichungen erster Ordnung, die sich in endlicher Form integriren lassen, und der Beweis der Unmöglichkeit einer solchen Integration für die allgemeine lineare Gleichung zweiter Ordnung. Kas

Eine Differentialgleichung heisst nach des Verfassers Bezeichnung allgemein oder Buchstabengleichung, wenn sie als unbestimmte Coefficienten ganz willkürliche Functionen einer unabhängigen Veränderlichen enthält. Dieser Definition nach ist jede allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(y, x, p, p', \ldots, p^{(m)}, q, q', \ldots, q^{(n)}, \ldots).$$

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, alle Fälle zu finden, in welchen es möglich ist, y bei willkürlichen Functionen $p, q, \ldots$ explicite mittels einer endlichen Anzahl von Differentiationen und unbestimmten Integrationen darzustellen. Vor allem ist es dazu notwendig, die allgemeinste Form eines Ausdruckes zu bestimmen, welcher eine endliche Anzahl von Differentiationen und Integrationen enthält. Zu diesem Zwecke führt der Verfasser eine Einteilung der Quadraturen in Ordnungen ein. Die Quadratur der ersten Ordnung ist das Resultat einer Integration, welche die Reihe der Differentiationen und analytischen Operationen ohne Begrenzung ihrer Anzahl schliesst:

$$S_i^{(1)} = \int \varphi_i(x, p, p', \ldots, q, q', \ldots) dx.$$

Die Quadratur zweiter Ordnung ist das Resultat einer Integation, welche die Reihe der Operationen schliesst, die auf die Quadraturen erster Ordnung angewandt sind:

$$S_i^{(2)} = \int \psi_i(S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, \ldots, p, p', \ldots, q, q', \ldots, x) dx$$

u. s. w. In derselben Weise erklärt man den Begriff der Quadratur m^{ter} Ordnung: $S_i^{(m)}$. Aus diesen Bezeichnungen geht hervor, dass, wenn man die Lösung y der Gleichung (1) in einer explicit n und endlichen Form darstellen kann, ohne $p, q, \ldots$ dabei zu specificiren, sie die Form:

$$F(S_2^{(m)}, S_1^{(m)}, \ldots, S_1^{(2)}, \ldots, S_1^{(1)}, \ldots, p, p', \ldots, q, q', \ldots, x)$$

annehmen muss. Dieser Ausdruck darf nur eine Constante enthalten, um das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung (1) zu sein; also ist es notwendig, dass alle willkürlichen

Constanten der Integration, die mit den Quadraturen eingeführt sind, sich auf eine einzige reduciren, also nicht distinct seien. Der Verfasser hat schon früher (Liouville J. (3). VI. 167-177, F. d. M. XII. 1880. 338) die notwendigen und ausreichenden Bedingungen aufgestellt, damit die Constanten eines Ausdruckes distinct seien. Diese Bedingungen, auf seine jetzige Aufgabe angewandt, gestatten ihm zu zeigen, dass die „Normalform" (welche keine überflüssigen Integrationen und Differentiationen enthält) des Integrals einer Differentialgleichung erster Ordnung nur zwei Quadraturen respective erster und zweiter Ordnung enthält ($s = \int M dx$, $S = \int e^{-\int M dx} N dx$), und zwar mittels des Arguments $u = e^s . S$, welches die Lösung der linearen Gleichung $\frac{du}{dx} = Mu + N$ ist. Was die Ableitungen von $p, q, \ldots$ betrifft, so ist gezeigt worden, dass die Normalform des Integrals explicite nur die Ableitungen dieser Functionen bis zu den Ordnungen $m-1$, $n-1, \ldots$ einschliesslich, dagegen implicite, d. h. in Quadraturen, bis zu den Ordnungen $m, n, \ldots$ einschliesslich enthält. Es ist mit anderen Worten gezeigt, „dass, wenn die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x, p, p', \ldots, p^{(m)}, q, q', \ldots, q^{(n)}, \ldots)$$

ein Integral mit einer endlichen Anzahl von Ableitungen und Quadraturen zulässt, dieses Integral sich auf folgende Form reduciren muss:

$$u = \varphi(y, x, p, \ldots, p^{(m-1)}, q, \ldots, q^{(n-1)}, \ldots),$$

$$\frac{du}{dx} = Mu + N, \qquad u = e^{\int M dx} \int e^{-\int M dx} N d$$

$$M = F(x, p, p', \ldots, p^{(m)}, q, q', \ldots, q^{(n)}, \ldots$$

$$N = F_1(x, p, \ldots, p^{(m)}, q, \ldots, q^{(n)}, \ldots)."$$

Nachdem dies gezeigt ist, erhält man leicht die all der Gleichung, die ein solches Integral zulässt. Da folgendes:

Damit die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x, p, \ldots, p^{(m)}, q, q', \ldots, q^{(n)}, \ldots)$$

in endlicher Form integrirt werden kann, muss sie eine Transformation einer linearen Gleichung $\frac{du}{dx} = Mu + N$ sein, d. h. sich aus dieser Gleichung durch die Substitution

$$u = \varphi(y, x, p, p', \ldots, p^{(m-1)}, q, q', \ldots q^{(n-1)})$$

ableiten lassen. Um also die Frage nach der Integration einer gegebenen Gleichung in endlicher Form zu beantworten, muss man diese Gleichung mit der allgemeinen Form $\frac{d\varphi}{dx} = M\varphi + N$ vergleichen, welche alle integrirbaren Formen und nur solche enthält. Die Frage ist von dem Verfasser in dem wichtigsten speciellen Falle vollständig gelöst, wenn die Gleichung nur die willkürlichen Functionen selbst enthält, d. h. die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x, p, q, \ldots)$$

hat. Damit diese Gleichung integrirbar sei, darf sie vor allem nicht mehr als zwei willkürliche ganz distincte Functionen enthalten und muss sich auf die Form

$$(2) \qquad P\frac{dy}{dx} + Q = Rp + q$$

reduciren lassen, wo P, Q, R Functionen von y, x sind, die p, q nicht enthalten. Die Gleichung (2) giebt nur zwei Fälle der Integrirbarkeit, erstens wenn das Differential $Pdx + Qdy$ einen integrirenden Factor zulässt und dann, wie bekannt ist, der Ausdruck

$$S = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

y nicht enthält; zweitens wenn S y enthält, falls dann das Differential $\frac{P}{S'_y}(Pdy + Qdx)$ einen von y unabhängigen integrirenden Factor zulässt.

Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - py + q,$$

in welche sich die allgemeine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} + p\frac{dz}{dx} + qz = 0$$

transformiren lässt, ist unter keinem dieser zwei Fälle der Integrirbarkeit inbegriffen und hiernach ist die Integration der allgemeinen linearen Gleichung zweiter Ordnung in endlicher Form unmöglich. Dieses Resultat ist schon im Jahre 1874 durch den Verfasser aus der Untersuchung der Variation δz der Function z, die der Gleichung (3) genügt, hergeleitet.

Schliesslich zeigt der Verfasser, dass seine Untersuchungen auch auf Gleichungen, welche die Ableitungen der Functionen $p, q, \dots$ enthalten, und auf Differentialgleichungen höherer Ordnungen ausgedehnt werden können. Wi.

A. P. Starkoff. Ueber die Unmöglichkeit, die allgemeinen linearen Gleichungen, deren Ordnung die zweite übersteigt, mittels einer endlichen Anzahl von Quadraturen zu integriren. (Kas. Ges. III 256-263. Russisch.)

Die Arbeit schliesst sich eng an die soeben besprochene Arbeit von Herrn Maximowitsch an, welcher die Unmöglichkeit gezeigt hat, mittels einer endlichen Anzahl von Quadraturen eine allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu integriren. Der Verfasser zeigt, dass die Integrirbarkeit einer allgemeinen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von der Integrirbarkeit der allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-1)^{ter}$ Ordnung abhängt. Da[illegible] keit bewiesen, alle allgemeinen linearen [illegible] s einer endlichen Anzahl von Quadra[illegible]

Toropoff. Ueber d[illegible]
Differentialgleichung[illegible]

Der Verfasser weist drei Arten gewöhnlicher Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung nach, die sich durch Quadraturen integriren lassen, und löst verschiedene geometrische Aufgaben, welche auf diese Gleichungen führen. Die drei Arten der Gleichungen sind:

$$\text{I.}\qquad \alpha y dx + \beta x dy + x^m y^n (\gamma y dx + \delta x dy) = 0,$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Functionen des Productes $x^m y^n$ sind.

$$\text{II.}\qquad f(x^m . y'^n) y dx + x dy = 0, \quad \text{wo} \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{III.}\qquad y'' = f(ax + by + c) . F(y').$$

Wi.

T. J. Stieltjes. Sur certaines polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé. Acta Math. VI. 321-326.

Heine hat folgenden Satz bewiesen: Sind in der Differentialgleichung

$$(1)\qquad A\frac{d^2y}{dx^2} + 2B\frac{dy}{dx} + Cy = 0$$

A und B zwei gegebene Polynome in x bezüglich vom $(p+1)^{\text{ten}}$ und p^{ten} Grade höchstens, und C ein noch zu bestimmendes Polynom von höchstens $(p-1)^{\text{ten}}$ Grade, so existiren stets gewisse Bestimmungen von C derart, dass die Gleichung (1) ein Polynom n^{ten} Grades in x zum Integrale hat. Die Anzahl dieser Bestimmungen ist

$$(n, p) = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}{1.2.3.\dots(p-1)}.$$

Indem der Verfasser die Voraussetzungen macht:

1) die Wurzeln $a_0, a_1, \dots, a_p$ der Gleichung $A = 0$ sind reell;

2) die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ in der Zerlegung

$$\frac{B}{A} = \frac{\alpha_0}{x-a_0} + \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\alpha_p}{x-a_p}$$

und positiv, präcisirt er obigen Satz in folgender Weise. Die $n\,p$ Bestimmungen des Polynoms C sind alle reell, ebenso die entsprechenden Polynome y, die letzteren gleich Null gesetzt, haben reelle und ungleiche Wurzeln, die in den p Intervallen der Wurzeln von $A = 0$ verteilt sind, und zwar entspricht den (n, p) Möglichkeiten, die für die Verteilung von n Grössen auf p Intervalle existiren, je ein und nur ein Polynom y, so dass ein solches Polynom durch die Verteilungsweise seiner Wurzeln vollständig charakterisirt ist. Der Verfasser bemerkt, dass für die Lamé'schen Functionen der Satz bereits von Herrn Klein im Bd XVIII der Annalen gegeben ist, der dafür gelieferte Beweis jedoch keine Anwendung auf obigen allgemeinen Satz gestatte.

Hr.

E. Goursat. Sur les transformations rationnelles des équations différentielles linéaires. Ann de l'Éc. N. (3) II 7-60.

Hat man zwei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0, \qquad (2)\quad \frac{d^2z}{dt^2} + P\frac{dz}{dt} + Qz = 0,$$

wo p, q Functionen von x, und P, Q Functionen von t sind, so führt die Aufgabe: „durch eine Substitution $x = \varphi(t)$ die Gleichung (1) so zu transformiren, dass ihre Integrale, abgesehen von einem gemeinsamen Factor, mit denen von (2) übereinstimmen", auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung für x, die in dem Falle, dass (1) und (2) hypergeometrische Gleichungen sind, in die Kummer'sche Gleichung übergeht. Es handelt sich darum, die Bedingungen festzustellen, unter [illegible] der Gleichung für x rationale Functionen $x = \varphi(t)$ g[illegible] sämtlich darzustellen. Die Arbeit enth[illegible]erung derjenigen Untersuchungen und [illegible] betreffs der rationalen Integrale de[illegible] Klein Ann. XXIV. p. 445ff. (F. d. M[illegible] facht hat. Wie dort, bildet hier di[illegible] Punkte der zu tra[illegible]nden Gl[illegible]

punkt. Dem Quotienten zweier Fundamentalintegrale in der Umgebung eines singulären Punktes a entspricht als Exponent des Anfangsgliedes in der Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ die Differenz der Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung. Hier kommen nur solche Punkte als wahrhaft singulär in Betracht, für welche entweder die bezügliche Differenz δ keine ganze Zahl ist, oder die zugehörigen Integrale logarithmisch sind. Es habe nun die Gleichung (1) p singuläre Stellen der charakterisirten Art. Durch die Substitution $x=\varphi(t)$ gehe eine Gleichung (2) hervor, die q solche singulären Stellen enthalte. Die Frage nach den rationalen Substitutionen dieser Beschaffenheit führt auf die Untersuchung der Lösungen gewisser unbestimmter Gleichungen in positiven ganzen Zahlen. Jedem System dieser Lösungen entsprechen im allgemeinen unendlich viele rationale Functionen φ, die einer begrenzten Anzahl verschiedener Typen angehören. Jeder dieser Typen enthält die gleiche Anzahl willkürlicher Parameter. Im besondern ist zu bemerken, dass, wenn $p>4$ ist, q nicht kleiner als p sein kann, und nur dann gleich p ist, wenn die Substitution $x=\varphi(t)$ linear ist. Wenn $p=4$, dann ist ebenfalls $q \overline{\geq} p$. Hier ist $q=p$, wenn die Transformation entweder linear ist oder von der Form, die Jacobi bei Behandlung des Transformationsproblems der elliptischen Integrale im Eingange der „Fundamenta nova" angewandt hat. Was die Anzahl der Lösungen der vorerwähnten unbestimmten Gleichungen anlangt, so ist dieselbe im allgemeinen endlich. Die Fälle, in denen sie unendlich ist, werden sämtlich aufgeführt. Sie entsprechen teils den algebraisch integrirbaren hypergeometrischen Gleichungen, teils solchen Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral sich mittels doppeltperiodischer Functionen erster oder zweiter Art ausdrücken lässt. Den Schluss bildet die Anwendung der auseinandergesetzten Methode auf das von Herrn Fuchs zuerst gelöste Problem, zu erkennen, ob das allgemeine Integral einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung algebraisch sei. Nach einem Satze des Herrn Klein wird nämlich diese Frage auf das hier behandelte Transformationsproblem zurückgeführt, für den be-

sonderen Fall, dass die Gleichung (2) zu den von Herrn Schwarz aufgestellten Typen hypergeometrischer Gleichungen gehört, deren allgemeines Integral algebraisch ist. Hr.

J. M. de Tilly. Sur l'équation de Riccati et sa double généralisation. Belg. Bull. (3) IX 216-235, Mathesis V. Suppl III 1-20.

I. Wenn die Legendre'sche Transformation, wo:

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad P = \frac{dY}{dX}, \quad \pi = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad q = \frac{dp}{dx},$$

$$x = P, \quad y = PX - Y, \quad p = X,$$

und die Transformation:

$$x = \eta, \quad y = \xi, \quad p = \frac{1}{\pi}$$

nach einander mehrmals auf eine Differentialgleichung:

$$f(x, y, p, q) = 0$$

angewandt wird, so lassen sich neun andere einzelne Differentialgleichungen aus ihr ableiten. Wenn die Gleichung $f = 0$ von einer integrirbaren Form ist, so verhält es sich mit den daraus abgeleiteten Gleichungen ebenso. Der Verfasser wendet diese Bemerkungen auf die Riccati'sche Gleichung an in der Umänderung $q = yx^n$ und auf die verallgemeinerte Gleichung $q = yF(x)$, und findet so neue, auf diese Gleichung bezügliche Resultate sowie auch bekannte Theoreme.

II. Die Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = yx^m$ kann integrirt werden, nicht bloss wenn m positiv ganz ist (Kummer), od[illegible]ativ und kleiner als $-2n$, sondern auch wenn m belieb[illegible] kann man eine Lösung derselben finden. Das [illegible] darauf, durch eine Substitution, die sich auf eine [illegible] Boussinesq (C. R. XCIV. 1882. p. 33) und eine vo[illegible] führende Methode stützt, den Exponenten n auf [illegible] $(n+1)$ zu reduciren. Auf $q = yF(x)$ angewandt, [illegible] stitution zu nichts.

III. Der Verfasser spricht fo[illegible]satz ohne Be[illegible]

Man könnte alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung integriren, wenn man das Integral von $q - p^2 + F(x, k) = 0$ aus dem von $q - p^2 + kF(x, k) = 0$ oder aus dem von $q - p^2 + F(x, k) + k = 0$ ableiten könnte. Mn. (Lp.)

A. R. Forsyth. A particular method for the solution of some linear differential equations of the second order. Mess XV 44-48.

Wenn die Gleichung $\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = 0$ dadurch transformirt wird, dass man $v = ze^{\int P_1 dx}$ setzt, so gilt die Gleichung für z, wenn $\frac{dP_1}{dx} + P_1^2 = I$ ist. Kann also ein Wert von P_1 gefunden wenden, der diese Gleichung befriedigt, so wird ein erstes Integral der ursprünglichen Gleichung in der Form erhalten: $\frac{dz}{dx} + 2P_1 z = A$. Der Verfasser erörtert die Bedingung, unter welcher

$$\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\mathfrak{a}}{(x-a)^2} + \frac{\mathfrak{b}}{(x-b)^2} + \frac{\mathfrak{c}}{(x-c)^2} + \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}}{(x-b)(x-c)} + \frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{a}-\mathfrak{c}}{(x-c)(x-a)} + \frac{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{(x-a)(x-b)}$$

nach dieser Methode integrirt werden kann, und stellt sie in der Gestalt auf:

$$(\mathfrak{a}+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} + (\mathfrak{b}+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} + (\mathfrak{c}+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}.$$

Die Gleichung der hypergeometrischen Reihe ist ein Specialfall dieser Gleichung, und die Bedingung ist entweder

$$\beta = 0, \quad \beta = 1, \quad \beta = \gamma \text{ oder } \beta = \gamma - 1.$$

Glr. (Lp.)

A. Mukhopâdhyây, R. Rawson, B. Williamson. Solutions of question 7828. Ed Times XLIII. 61-64.

Bei Stellung der Aufgabe, das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - c^2 x^{-\frac{8}{5}} y = 0$$

in der Form aufzustellen:

$$y = \left(x^{\frac{2}{5}} - \frac{3}{5c} x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{25c^2}\right) A e^{5cx^{\frac{1}{5}}}$$

$$+ \left(x^{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5c} x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{25c^2}\right) B e^{-5cx^{\frac{1}{5}}},$$

hat Herr Mukhopâdhyây darauf aufmerksam gemacht, dass in Gregory's Sammlung (1846) das constante Glied beider Klammergrössen fehlt. Die beiden anderen Herren entwickeln dieses Integral nach zwei verschiedenen Methoden, und am Schlusse wird angegeben, dass die richtige Form des Integrales sich in einer Arbeit des Herrn Curtis findet, die 1854 im Cambridge und Dublin Mathematical Journal erschienen ist. Lp.

A. J. Stodockiewicz. Ueber die lineare Pfaff'sche Differentialgleichung. Krak Ber. XIII. (Polnisch.)

Integration der Differentialgleichung

$$(a' + b'x^n)x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a'' + b''x^n)x \frac{dy}{dx} + (a''' + b'''x^n)y = 0.$$

Der Verfasser giebt die sechs verschiedenen Fälle an, in welchen die Integration der Gleichung auf die Integration einer linearen Gleichung 1ter Ordnung und auf eine Quadratur reducirt werden kann. Dn.

Routh. On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order. Lond. M. S. Proc XVI 245-261

Die Haupteigenschaften der Legendre'schen Functionen P_n, die der Gleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

genügen, werden übertragen auf die Integrale der allgemeineren Differentialgleichung

$$(1) \qquad (ax^2+bx+c)y''+(fx+g)y'+hy = 0$$

unter der Voraussetzung, dass eine der Wurzeln der Gleichung

$$m(m-1)a+mf+h = 0$$

eine ganze Zahl ist. Es giebt dann Lösungen der Gleichung (1) von einer der beiden Formen

$$y = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{ax^2+bx+c}{a}\right)^{n+1}\frac{1}{R} = X_n$$

und

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{aR}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{ax^2+bx+c}{a}\right)^{n-1}.R = X_n,$$

wo

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dx} = \frac{fx+g}{ax^2+bx+c}.$$

Für beide Lösungen gilt die Relation

$$AX_{n+2}+(B+Cx)X_{n+1}+DX_n = 0,$$

wo A, B, C, D Constanten sind.

Wenn $4-\frac{f}{a}$ positiv und numerisch grösser als $\frac{b\frac{f}{a}-2g}{(b^2-4ac)^{\frac{1}{2}}}$ ist, wobei die Wurzeln von $ax^2+bx+c=0$ reell vorausgesetzt sind, so ergiebt sich, dass die Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{X_1}{X_0}=0,\quad \frac{X_2}{X_1}=0,\quad \frac{X_3}{X_2}=0,\ \ldots$$

alle reell und getrennt sind und die einer jeden zwischen den Wurzeln der nächstfolgenden liegen. Die Wurzeln von $X_n = 0$ liegen zwischen den Wurzeln λ und μ von $ax^2+bx+c=0$. Unter denselben Voraussetzungen gilt die Relation:

$$\int_\lambda^\mu X_m X_n \frac{R\,dx}{ax^2+bx+c} = 0,$$

wenn m und n von einander verschiedene ganze Zahlen bezeichnen. Der Wert von $\int_\lambda^\mu X_n^2\frac{R\,dx}{ax^2+bx+c}$ wird mit Hülfe von Gamma-

Integralen bestimmt. Endlich wird auch die erzeugende Function der X_n hergestellt. Führt man u ein durch die Gleichung

$$u = x + t\,\frac{(au^2 + bu + c)}{a},$$

so erhält man nach dem Lagrange'schen Theorem die erste Lösung X_n als Coefficienten von $\frac{t^n}{n!}$ in der Entwickelung

$$\frac{au^2 + bu + c}{R(u)}\,\frac{1}{a - t(2au + b)} = \sum_n \frac{t^n}{n!} X_n.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich die erzeugende Function für die andere Lösung X_n. Hr.

A. Winckler. Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zwischen deren particulären Integralen eine Relation besteht. Wien Ber. XCII. 8-32.

Der vorliegende Gegenstand ist zuerst von Herrn Appell und später von anderen Mathematikern wie Halphen, Escherich für Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung behandelt worden. Der Verfasser beschäftigt sich ausschliesslich mit dem Falle der Differentialgleichungen zweiter Ordnung, dem unter gewissen Voraussetzungen besonders einfache Beziehungen entsprechen. Die gegebene Relation wird in der Form vorausgesetzt $f(u, v) = r$, worin r eine Function der unabhängigen Variablen x ist, und $f(u, v)$ eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von u, v bezeichnet. u und v sind Integrale der Differentialgleichung

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Zunächst wird die Relation abgeleitet:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m f}{\partial u^m}\,u'^m + m\,\dfrac{\partial^m f}{\partial u^{m-1}\partial v}\,u'^{m-1}v' \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2}\,\dfrac{\partial^m f}{\partial u^{m-2}\partial v^2}\,u'^{m-2}v'^2 + \cdots + \dfrac{\partial^m f}{\partial v^m}\,v'^m = r_m, \end{cases}$$

wo die Grössen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ durch die Recursionsgleichungen

$$r_m = r'_{m-1} + (m-1)pr_{m-1} + (m-1)(n-m+2)qr_{m-2},$$

deren erste

$$r_1 = r'$$

ist, definirt sind. Die Gleichung $r_{n+1} = 0$, die in Bezug auf r eine lineare Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, giebt, falls r gegeben ist, die Bedingung an, der p und q wegen der Relation $f(u, v) = r$ genügen müssen.

Ersetzt man in (1) u' durch $\frac{\partial f}{\partial v}$ und nennt den so erhaltenen Ausdruck Δ_m, so ergiebt sich, dass $\Delta_m s^m$, wo $s = e^{\int p dx}$, rational durch $r, r_1, \ldots, r_m$ ausgedrückt werden kann. Zur Berechnung von Δ_m wird eine Recursionsgleichung entwickelt. Insbesondere ist

$$\Delta_2 s^2 = nr\{nrr_2 - (n-1)r_1^2\},$$
$$\Delta_3 s^3 = nr\{n^2r^2r_3 - 3(n-2)nrr_1r_2 + 2(n-1)(n-2)r_1^3\},$$
$$\Delta_{n+1} = 0.$$

Die beiden Gleichungen

$$f_2(u, v) = \Delta_2 \quad \text{und} \quad f_3(u, v) = \Delta_3$$

reichen im allgemeinen zur Bestimmung von u und v aus. Verbindet man sie mit $f(u, v) = r$ und eliminirt u und v, so erhält man die Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten in der einfachsten Form, indem ausser den Constanten der Function f nur die Functionen $p, p', q, q', r, r', r'', r'''$ vorkommen. In Bezug auf r kann die Gleichung als ein Integral der Differentialgleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $r_{n+1} = 0$ angesehen werden. Bemerkenswert ist noch, dass f_2 und f_3 den Factor f enthalten, indem

$$f_2 = \frac{n}{n-1} H.f \quad \text{und} \quad f_3 = \frac{n}{n-1}(H, f).f$$

ist, wo H die Hesse'sche Determinante von f und (H, f) die Functionaldeterminante von H und f bezeichnet, so dass die Gleichungen zur Bestimmung von u und v die einfachere Gestalt erhalten

$$f = r, \quad H = \frac{n-1}{n} \frac{\Delta_2}{r}, \quad (H, f) = \frac{n-1}{n} \frac{\Delta_3}{r}.$$

Ein Ausnahmefall tritt, wie bekannt, ein, wenn f vom zweiten Grade ist, weil dann $H =$ const. und $(H, f) = 0$ wird. In diesem

Falle lassen sich u und v nicht auf algebraischem Wege bestimmen. Man findet dieselben nach bekanntem Verfahren durch Quadratur. Der Fall $n = 3$ wird zur Erläuterung des auseinandergesetzten Verfahrens behandelt. Br.

S. SPITZER. **Untersuchungen im Gebiete linearer Differentialgleichungen.** Heft II (49 S.) u. III (45 S.) Wien. Gerold's Sohn.

Im zweiten Heft sind zunächst specielle algebraische Gleichungen der Form

$$y^3 + Py + Q = 0,$$

worin P und Q Functionen von x bedeuten, Gegenstand der Betrachtung. Es wird gezeigt, dass die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, der y genügt, durch die Substitution $y = z^2$ sich auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen lässt, von der das allgemeine Integral aufgestellt werden kann. Sodann stellt der Verfasser die Differentialgleichung vierter Ordnung auf, der die Wurzeln der Gleichung

$$y^5 + 5y + 4x = 0$$

genügen, und giebt zugleich verschiedene Verfahrungsweisen an, y nach steigenden oder fallenden Potenzen von x zu entwickeln. Zum Schluss werden einige specielle Differentialgleichungen, die ohne inneren Zusammenhang aneinander gereiht sind, integrirt, u. a. die Schwarz'sche Differentialgleichung. Im dritten Heft wird eine grosse Anzahl einzelner Integrale von der Form $\int x^n y^m dx$, wo y durch eine algebraische Gleichung definirt ist, in geschlossener Form dargestellt. Die algebraischen Gleichungen, die der Verfasser betrachtet, sind nämlich alle in der Form $x = f(y)$, wo f eine rationale Function bedeutet, enthalten, und so giebt die teilweise Integration

$$\int x^n y^m dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} y^m - \frac{m}{n+1} \int x^{n+1} y^{m-1} dy.$$

Das Integral

$$\int x^{n+1} y^{m-1} dy = \int y^{m-1} f(y)^{n+1} dy$$

ist aber, wenn m und n ganz sind, in geschlossener Form darstellbar. Der Verfasser gewinnt jedoch die Ausdrücke nicht durch dieses naheliegende Verfahren, sondern indem er das zu bestimmende Integral in der Form

$$P + Qy + Ry^2 + \cdots + Ty^{\mu-1}$$

hinschreibt, wo μ die höchste Potenz in $f(y)$ ist, und dann die Functionen $P, Q, R, \ldots$ durch Differentiation auf beiden Seiten und Benutzung der Relation $x = \varphi(y)$ bestimmt. Im letzten Abschnitt leitet der Verfasser die von Herrn Schwarz zuerst aufgestellte Differentialgleichung dritter Ordnung für den Quotienten s zweier Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung von neuem ab und knüpft daran die Bemerkung, dass diese Gleichung, nämlich

$$3s''^2 - 2s's''' = 4Xs'^2,$$

wo X eine Function von x ist, durch die Substitution

$$s' = \frac{1}{z^2}$$

in die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$z'' = Xz$$

transformirt wird, und dass die allgemeinere Gleichung

$$s''^2 - \lambda s's''' = \tfrac{4}{3}Xs'^2$$

durch die Substitution $s' = z^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$ in

$$z'' = \frac{4(1-\lambda)}{3\lambda^2} Xz$$

übergeht. Hr.

C. V. L. Charlier. Om integrationen af differentialekvationerna för den intermediära banan. Stockh. Öfv. XLII. No 9. 21-27.

Der Verfasser integrirt die in der Gyldén'schen Störungstheorie vorkommende Gleichung

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = -c + 2\mu_1 r - hr^2 + \mu_2 r^4$$

für den Fall, dass die Gleichung $\frac{dr}{du} = 0$ zwei imaginäre Wurzeln hat, und erhält das Integral in der Form:

$$r = \frac{a + b \operatorname{cn} u}{1 + d \operatorname{cn} u}.$$

Er bemerkt auch, dass dem Integral der Gleichung

$$dt = \beta r du$$

in diesem Falle dieselbe Form gegeben werden kann, die in dem Falle, wo alle Wurzeln reell sind, unmittelbar erhalten wird.

E.

F. Brioschi. Sur quelques équations différentielles. Klein Ann. XXVI. 106-109.

Angabe einiger Resultate bezüglich der Differentialgleichungen, die mit der Transformation 5ter und 7ter Ordnung der elliptischen Functionen zusammenhängen.

Hr.

A. Hurwitz. Ueber einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen. Klein Ann. XXVI. 117-126.

Gegenstand der Arbeit ist die Herstellung einer gewissen mit der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen zusammenhängenden Differentialgleichung. Von dieser durch Herrn Klein angeregten Aufgabe hat bereits Herr Halphen (Klein Ann. XIV. 455 ff.) eine Lösung veröffentlicht. Die hier gegebene zweite Lösung liefert die verlangte Differentialgleichung in expliciter Form und gestattet eine Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad. Die in Rede stehende Aufgabe wird, wie folgt, präcisirt: Zwischen λ, μ, ν bestehe die homogene Gleichung

$$F = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0,$$

und es sei

$$J = -\frac{C^3}{12^3 \nabla^7},$$

wo ∇ die Hesse'sche Determinante von F, und C die mit

$$\frac{\partial\nabla}{\partial\lambda},\quad \frac{\partial\nabla}{\partial\mu},\quad \frac{\partial\nabla}{\partial\nu}$$

geränderte Hesse'sche Determinante bedeutet. Die 168 Wertsysteme von $\lambda:\mu:\nu$, welche zu einem gegebenen Werte von J gehören, gehen, wie Herr Klein (Klein Ann. XIV. 455) bewiesen hat, durch lineare Transformationen aus einem dieser Wertsysteme hervor. Es giebt also eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit den Particularlösungen λ, μ, ν als Functionen der unabhängigen Veränderlichen J. Um dieselbe herzustellen, betrachtet der Verfasser drei linear unabhängige Integrale erster Gattung J_1, J_2, J_3 der Curve $F=0$, die so gewählt sind, dass

$$dJ_1:dJ_2:dJ_3 = \lambda:\mu:\nu.$$

Die Grössen

$$y_1 = \frac{dJ_1}{dJ},\quad y_2 = \frac{dJ_2}{dJ},\quad y_3 = \frac{dJ_3}{dJ}$$

sind algebraische Functionen von J, deren Verzweigungspunkte bei $J=\infty$, $J=0$, $J=1$ liegen, derart, dass in ihnen bezüglich je 7, je 3, je 2 Blätter im Cyklus zusammenhängen. Der Umstand, dass $\int y dJ$ überall endlich ist, und die bekannte von Herrn Fuchs gegebene Relation zwischen den Anfangsexponenten in den Entwickelungen der Fundamentalintegrale einer Differentialgleichung um ihre singulären Punkte reichen hin, um die genannten Exponenten vollständig zu bestimmen. Dadurch aber ergeben sich für die Coefficienten der Differentialgleichung, deren Form nach einem Satze des Herrn Fuchs a priori bekannt ist, Bedingungsgleichungen, deren Anzahl um 1 geringer ist als die der zu bestimmenden Constanten in den Coefficienten. Die Bestimmung wird vervollständigt durch die Rücksicht darauf, dass in den Integralen keine Logarithmen auftreten dürfen. Die definitive Form der Differentialgleichung ist:

$$(1)\quad \begin{cases} J^2(J-1)^2 \dfrac{d^3y}{dJ^3} + (7J-4)J(J-1)\dfrac{d^2y}{dJ^2} \\ + \left(\dfrac{72}{7}(J^2-J) - \dfrac{20}{9}(J-1) + \dfrac{3}{4}J\right)\dfrac{dy}{dJ} \\ + \left[\dfrac{72.11}{7^4}(J-1) + \dfrac{5}{8} + \dfrac{2}{68}\right]y = 0. \end{cases}$$

Von dieser Gleichung gelangt man zu der von Herrn Halphen ufgestellten durch die Substitution $y = [J(J-1)]^{-\frac{1}{3}}z$. J_1, J_2, J_3 nd identisch mit den vom Verfasser in einer früheren Abhandng (Klein Ann. XXV. 183) betrachteten Integralen erster Gatng 7ter Stufe. Dieselben lassen sich in Potenzreihen von $= e^{7\omega}$ entwickeln. Wenn man berücksichtigt, dass

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{\left[\frac{1}{12} + 20\Sigma n^3 \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right]^3}{q^2\Pi(1-q^{2n})^{24}}$$

t, so erhält man das bemerkenswerte Resultat: Die Integration er aus (1) unmittelbar abzuleitenden Differentialgleichung vierter rdnung, der J_1, J_2, J_3 selbst genügen, lässt sich in der Weise ewirken, dass die genannten Integrale und die unabhängige ariable J als eindeutige Functionen derselben Variabeln q darestellt werden.

Schliesslich werden einige Bemerkungen über die Verallemeinerung der vorhergehenden Entwickelungen auf einen beebigen Transformationsgrad hinzugefügt. Die Integrale erster attung n^{ter} Stufe sind die Lösungen einer homogenen linearen ifferentialgleichung p^{ter} Ordnung mit J als unabhängiger Variaeln und den singulären Punkten $J = 0, 1, \infty$, wobei p eine geisse aus n zu berechnende Zahl bedeutet. Hr.

. STARKOFF. Ueber eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Odessa Ges. VI. 13-22. (Russisch.)

. STARKOFF. Das allgemeine Integral einer Gleichung dritter Ordnung. Kasan. Ges. III. 86-87. (Russisch.)

In der ersten Abhandlung wird die Methode, welche schon

21*

früher vom Verfasser in einer Arbeit („Die allgemeine Methode zur Integration der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit veränderlichen Coefficienten. Odessa. 1877, siehe F. d. M. X. 1878. 225) ausführlich auseinandergesetzt wurde, auf eine specielle lineare Differentialgleichung dritter Ordnung angewandt, deren Analogie mit der Lamé'schen Gleichung von Herrn Goursat (s. F. d. M. XVI. 1884. 262) gezeigt ist. Diese Gleichung lautet:

$$(1)\quad \begin{cases} x^3(x-1)^3y''' + \{Ax + B(x-1)\}x^2(x-1)^2y'' \\ \quad + \{Cx(x-1) + Dx + E(1-x)\}x(x-1)y' \\ - \{Fx^2(x-1) + hx(x-1) + Hx + K(x-1)\}y = 0, \end{cases}$$

wo die Coefficienten $A, B, C, \dots$ gewissen Bedingungen genügen. Der Verfasser untersucht die Fälle, in welchen diese Gleichung ein Integral in endlicher Form hat, und erhält vier specielle Fälle, für welche er auch die Integrale giebt.

Die zweite Abhandlung des Herrn Starkoff behandelt einen speciellen Fall der Gleichung (1). Wi.

W. Heymann. Notiz zur Differentialgleichung

$$(a_3 + b_3x + c_3x^2 + d_3x^3)\frac{d^3y}{dx^3} + (a_2 + b_2x + c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1x)\frac{dy}{dx} + a_0y = 0.$$

Schlömilch Z. XXX. 127-128.

Genügt der vorstehenden Gleichung $y = (x-k)^\lambda$, wo k eine Wurzel der Gleichung

$$a_3 + b_3k + c_3k^2 + d_3k^3 = 0$$

ist, so kann die Differentialgleichung mittels der Substitution

$$y = (x-k)^\lambda \int (x-k)^{-\lambda-1} z\, dx$$

in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe transformirt werden. Hr.

D. Besso. Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del quart' ordine e sull' equazione del quinto grado. Rom Acc. L. (4) I. 183-186, 233-237.

I. Die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\varphi u^{IV} + \varphi' u''' + (b\varphi'' + g) u'' + \tfrac{1}{2}(3b-5)\varphi''' u' + h\varphi^{IV} u = 0,$$

worin φ eine ganze Function vierten Grades und b, g, h Constanten sind, lässt sich durch die Substitution $u = \varphi^{-\frac{1}{2}} U$ in eine Differentialgleichung für U transformiren, der durch die vier Producte der Lösungen zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügt wird. In dem besonderen Falle, dass $\varphi = \psi^2$, können diese beiden Gleichungen auf hypergeometrische Differentialgleichungen reducirt werden.

II. Einer Differentialgleichung vierter Ordnung der letzterwähnten Art genügen die Wurzeln der algebraischen Gleichung fünften Grades in u

$$(1) \qquad (x^2+1728)u^5 - 40u^2 - 5u - 1 = 0$$

als Functionen von x, die demnach sämtlich durch Producte von zwei hypergeometrischen Reihen dargestellt werden können, nachdem die in den Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung auftretenden Constanten gehörig bestimmt sind. Die Gleichung (1) steht durch die Substitution $u = \dfrac{1}{t^2+3}$ mit der Gleichung

$$t^5 + 10t^3 + 45t - x = 0$$

im Zusammenhang, von der schon Herr Brioschi nachgewiesen hatte, dass sie mittels hypergeometrischer Reihen aufgelöst werden könne. Hr.

E. Goursat. Sur un cas de réduction des équations linéaires du quatrième ordre. C R C. 233-235.

Es ist bekannt, dass die Integration einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung, zwischen deren Lösungen eine quadratische Relation besteht, sich auf die zweier Diff…leichungen

zweiter Ordnung zurückführen lässt. Der Verfasser giebt einen neuen Fall der Reduction an: Besteht zwischen den Lösungen die Gleichung

$$(1) \qquad (y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = 0,$$

so lässt sich das Integral y in der Form darstellen

$$y = p\,Y^3 + 3q\,Y^2 \frac{dY}{dx},$$

wo Y das allgemeine Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, und p und q beliebige Functionen von x sind. Im Hinblick darauf, dass die linke Seite von (1) die Discriminante einer binären kubischen Form ist, wird dem vorstehenden Resultat folgende ausgedehnte Verallgemeinerung gegeben: Wenn zwischen den Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten eine Relation besteht, deren linke Seite die Discriminante einer homogenen Form von p Variabeln ist, so sind ihre Integrale ganze Functionen mit eindeutigen Coefficienten von den Integralen einer linearen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung und ihren Ableitungen. Hr.

A. P. Starkoff. Ueber die verschiedenen Formen, in welchen eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung dargestellt werden kann. (Russisch.)

Die lineare Differentialgleichung kann in vier Formen dargestellt werden: 1) die gewöhnliche:

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_n y = 0;$$

2) die Determinantenform, in welche die particulären Integrale eingehen; 3) die Form mit n Differentiationen:

$$y = \frac{1}{Q_n} \frac{d}{dx} \frac{1}{Q_{n-1}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{1}{Q_n} \frac{d}{dx}\, y;$$

4) die Form mit n Integrationen:

$$y = \int Q_1\, dx \int Q_2\, dx \cdots \int Q_n y\, dx.$$

Wi.

P. S. Florow. Zur Integration der linearen Differentialgleichungen. Chark. Ges. 1884. 143-177. (Russisch.)

Die Abhandlung behandelt die Integration der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^{k-i} u^{(n-i)} = x^{m+k}.u,$$

wo α_i und m Constanten sind, k und n ganze positive Zahlen, die der Bedingung $k<n$ genügen. Es wird mit einigen Veränderungen die Methode des Herrn Imschenetzky angewandt, vgl.: „Erweiterung der Euler'schen Methode, alle Fälle zu bestimmen, in welchen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von gewisser Art sich integriren lässt, auf lineare Differentialgleichungen im allgemeinen.“ F. d. M. XIV. 1882. 253. Die Gleichung

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{i=k} \alpha_i x^{k-i} u^{(n-i)} = x^{m+k}.u$$

wird nämlich in die Gleichung

$$(2)\qquad \sum_{\varrho=0}^{k} \alpha_\varrho^\delta x^{k-\varrho}.u_\delta^{(n-\varrho)} = x^{m+k}.u_\delta$$

durch successive Transformationen verwandelt, wo der Coefficient α_ϱ^δ gleich

$$\sum_{i=0}^{\varrho} \frac{(k-i)![-\delta(m+n)]^{\varrho-i}}{(k-\varrho)!(\varrho-i)!}$$

ist. Die dabei angewandten Transformationen gestatten, aus dem Integrale der Gleichung (1) das Integral der Gleichung (2) und vice versa zu erhalten. Wenn man jetzt $\alpha_0^\delta = 1$ und $\alpha_r^\delta = 0$ bei $r > 0$ setzt, so nimmt die Gleichung (2) die Form an

$$u_\delta^{(n)} = x^m.u_\delta,$$

und die Gleichung (1) die Form

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{k} \frac{k![\delta(m+n)]^i}{i!(k-i)!} x^{k-i} u^{(n-i)} = x^{m+k}.u,$$

deren Integration also von der Integration der Gleichung

$$(4)\qquad u_\delta^{(n)} = x^m.u_\delta$$

abhängt. Hiernach geht der Verfasser zur Lösung der Frage

über, die Fälle zu ermitteln, in welchen diese Gleichung (die erweiterte Riccati'sche) sich integriren lässt. Er beweist, dass man von der erweiterten Riccati'schen Gleichung mit dem Modul m zu derselben Gleichung mit dem Modul μ übergehen kann, wo μ gleich $-n+\frac{m+n}{1+\delta(m+n)}$ ist. Wenn man μ gleich Null setzt, so erhält man diejenigen Werte von m, für welche die Gleichung (4) sich integriren lässt. Nachdem die Frage nach der Integration der Gleichung (4) gelöst ist, findet der Verfasser die einfachste Form der integrirbaren Gleichungen, und am Ende giebt er die Form der Integrale für alle Gleichungen, deren Integrirbarkeit er gezeigt hat. Wi.

Alexeiewsky. Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Chark. Ges. 1884 222-232. (Russisch.)

Die Abhandlung behandelt die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu z^{m-\nu} D^{n-\nu} y + a_n z^m . y = 0$$

und zeigt mit Hülfe der symbolischen Formeln, dass sie sich in dem Falle, wo die Zahl m und die Coefficienten a_ν gewissen Bedingungen genügen, auf die Gleichung reducirt:

$$D^n \omega + \lambda \omega = 0,$$

(wo λ eine Constante ist) und also integrirbar wird. Wi.

A. Arneberg. Integration af en Differentialligning. Zeuthen T. (5) III. 168-175.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$\varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^\nu \frac{(n+p)(n+p-1)\dots(n+p-\nu+1)}{1.2\dots\nu} \cdot \varphi^{(\nu)}(x)\frac{d^{n-\nu} y}{dx^{n-\nu}} = \psi(x)$$

mittels wiederholter Differentiationen oder Integrationen.

Gm.

O. Biermann. Ueber n simultane Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n+m} X_\mu dx_\mu = 0.$$

Schlömilch Z. XXX. 231-244.

Für das Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n+m} X_\mu^{(\nu)} dx_\mu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

wird das dem Pfaff'schen analoge Problem gestellt und bei dessen Behandlung der von Herrn Natani im Bd. LVIII. des Borchardt'schen Journals beim ersteren Problem eingehaltene Gedankengang befolgt. Die Frage nach der allgemeinsten Lösung des vorgelegten Systems kommt mit der Forderung überein, die Transformation

$$\sum_\mu X_\mu^{(\nu)} \partial x_\mu = \sum_\varrho U_\varrho^{(\nu)} \partial u_\varrho \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

herzustellen, bei der die Zahl der Functionen (Integrale) u möglichst klein ist. Ist $n+m = k(n+1)$ (k eine ganze Zahl), dann ergiebt sich die Anzahl der Integrale u gleich nk. Ist

$$n+m = k(n+1)+\varkappa,$$

dann giebt es kn bestimmte und $\varkappa$ willkürliche Integrale. Der 2te Fall kann durch Elimination von $\varkappa$ Variabeln mit Hülfe der willkürlichen Integrale auf den ersten Fall zurückgeführt werden, so dass nur dieser in Betracht zu nehmen ist. Die Lösung des vorgelegten Systems ist alsdann

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \dots, \quad u_{nk} = c_{nk}.$$

Wie beim Pfaff'schen Problem werden auch Lösungen eingeführt, die statt der willkürlichen Constanten willkürliche Functionen enthalten, indem zwischen den u willkürliche Relationen angenommen werden, zu welchen dann die Relationen hinzutreten, die durch die Nullsetzung der Coefficienten der unabhängigen Differentiale in $\sum U_\varrho^{(\nu)} du_\varrho$ entstehen. Hierbei scheint dem Verfasser entgangen zu sein, dass die Anzahl der so gewonnenen Relationen, wenn $n > 1$ ist, zumeist die Anzahl der Variabeln x übersteigt, also als Lösungen in dem Sinne, dass durch sie einige x als Functionen der übrigen bestimmt werden, nicht gelten

können. Die weitere Uebertragung der Pfaff'schen Methode zur Herstellung der Integrale u würde als nächsten Schritt verlangen, dass man die n Gleichungen des Systems in n andere mit $k(n+1)-1$ neuen Variabeln $x^{(1)}$ transformire. Allein eine solche Transformation ist, wenn $n>1$, ohne Bedingungsgleichungen für die Functionen $X_\mu^{(\nu)}$ nicht möglich, und der Verfasser beschränkt sich darauf, die Differentialgleichungen für die Functionen $U_\varrho^{(\nu)}$ und u_ϱ abzuleiten, welche das „erste Pfaff'sche System" als specielles System enthalten. Sie sind in Bezug auf die Functionen u_ν von der 2ten, in Bezug auf die U_ϱ von der ersten Ordnung, eine Discussion dieser selbst bei niedrigen Werten für n und k höchst complicirten Gleichungen wird nicht versucht.

Hr.

O. Biermann. Ueber die singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wien. Ber. XC. 897-907.

Ein System totaler Differentialgleichungen erster Ordnung, welches die normale Form hat

$$\varphi_\nu\left(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dx_\nu}{dz}\right) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

kann, wie Jacobi gezeigt hat, auf eine „canonische" Form gebracht werden. Man setze

$$x_{n+1} = a_1\frac{dx_1}{dz} + a_2\frac{dx_2}{dz} + \cdots + a_n\frac{dx_n}{dz}$$

und eliminire aus dieser Gleichung und dem vorgelegten System sämtliche Derivirten, woraus das Eliminationsresultat

$$\Phi(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0$$

hervorgehe; F sei ferner ein in Bezug auf x_{n+1} irreductibler Factor von Φ, dann stellt das System

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_\nu}{dz} = -\frac{\partial F}{\partial a_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die verlangte canonische Form dar. Die singulären Lösungen

sind diejenigen, welche neben dem canonischen System noch der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} = 0$$

genügen. Für sie nehmen sämtliche Derivirten $\frac{dx_1}{dz}, \dots, \frac{dx_n}{dz}$, $\frac{dx_{n+1}}{dz}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

Hr.

W. Heymann. Ueber eine Transformation bei linearen simultanen Differentialgleichungen. Kronecker J. XCVIII 241-243.

Ein System von Differentialgleichungen

$$Fy_i' = \sum_{k=1}^{k=n} f_{i,k}\, y_k \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

in welchem $f_{i,k}$ und F ganze Functionen von x sind, letztere von der Form

$$F = f.(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\dots(x-\varepsilon_n),$$

kann durch die Substitutionen

$$y_i = e^{\int \frac{G}{F} dx} . \sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k}\, z_k ,$$

worin G eine passend zu wählende ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades und $a_{i,k}$ zu bestimmende Constanten sind, im allgemeinen in ein solches System übergeführt werden, dass jede Gleichung durch einen Factor $x-\varepsilon_i$ teilbar wird. Wendet man diese Transformation auf die Gleichungen

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\frac{dy_1}{dx} + (a_1+b_1x)y_1 + (c_1+d_1x)y_2 = 0,$$

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\frac{dy_2}{dx} + (a_2+b_2x)y_1 + (c_2+d_2x)y_2 = 0$$

an, so gehen dieselben über in

$$(x-\varepsilon_2)\frac{dz_1}{dx} + \alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2 = 0,$$

$$(x-\varepsilon_1)\frac{dz_2}{dx} + \alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2 = 0$$

und können alsdann durch die hypergeometrische Reihe integrirt werden. (In der Formel (1^a) ist statt

$$f_{kk}(G+\eta_{kk}) \text{ zu lesen: } (G+f_{kk})\eta_k).$$

Die hier mitgeteilte Transformation ist derjenigen analog, die der Verfasser in einer früheren Abhandlung in Schlömilch Z. XXVII. p. 374ff. (siehe F. d. M. XIV. 1882. 250) auf eine lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung zu dem gleichen Zwecke der Ausscheidung eines Factors angewandt hat. Hr.

W. Heymann. Zwei Sätze über die Integrale simultaner Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXX. 302-304.

Die Determinanten

$$\Sigma \pm y_{11} y_{22} \cdots y_{nn} \quad \text{und} \quad \Sigma \pm y'_{11} y'_{22} \cdots y'_{nn},$$

worin

$$y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kn} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

n Integralsysteme eines Systems von n simultanen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung bedeuten, werden durch die Coefficienten des Gleichungssystems ausgedrückt.

Hr.

de Tilly. Sur les équations différentielles linéaires simultanées. Mathesis V. 121-124.

Verschiedene Fälle der Integrabilität bei zwei simultanen linearen Differentialgleichungen ohne zweites Glied, unter denen der enthalten ist, der durch Herrn Ibach (Nouv. Ann. (3) III. 172-181; F. d. M. XVI. 1884. p. 298) gefunden ist.

Mn. (Lp.)

E. Picard. Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce. Jordan J. (4) I. 281-346.

Die Abhandlung bringt in ausführlicher Darstellung die schon in kurzen Noten (in den C. R. IC; vgl. F. d. M. XVI. 1884.

293-296) veröffentlichten Untersuchungen über die Integrale erster Gattung, welche sich auf eine algebraische Fläche beziehen. Betrachtet man auf einer Fläche m^{ten} Grades $f(x, y, z) = 0$ Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int \{P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy\},$$

in welchen der Ausdruck unter dem Integralzeichen (z als Function von x und y betrachtet) ein totales Differential ist, so ergiebt sich zunächst, dass für eine allgemeine Fläche m^{ten} Grades keine überall endlichen Integrale existiren. Vielmehr kommt es darauf an, für $f(x, y, z) = 0$ Polynome A, B, C von x, y, z zu finden, von der Form:

$$(2) \qquad \begin{cases} A = x.\varphi + A_1, \\ B = y.\varphi + B_1, \\ C = z.\varphi + C_1, \end{cases}$$

wo φ eine ganze homogene Function $(m-3)^{ter}$ Ordnung, A_1, B_1, C_1 ganze Functionen von höchstens $(m-3)^{ter}$ Ordnung in x, y, z bedeuten), welche die Gleichung:

$$(3) \qquad A.\frac{\partial f}{\partial x} + B.\frac{\partial f}{\partial y} + C.\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z)$$

identisch befriedigen. Dann ist das von einem Anfangswerte x_0, y_0, z_0 bis zu einem beliebigen Punkte x, y, z auf der Fläche ausgedehnte Integral

$$(4) \qquad \int \frac{Bdx - Ady}{\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}}$$

ein überall endliches Integral. Die Flächen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ haben dabei in den singulären Stellen von $f = 0$ gewisse Singularitäten. Sie haben nämlich in jedem Knotenpunkt p^{ter} Ordnung einen Knotenpunkt von der Ordnung $p-2$ und gehen durch jede k-fach zählende Curve von $f = 0$ $(k-1)$-fach hindurch.

Nimmt man an, dass auf der Fläche $f = 0$ [illegible] von

einander unabhängige Integrale erster Gattung existiren

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} \quad \text{und} \quad \int \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{f'_z},$$

für welche also $BA_1 - AB_1$ für die Punkte der Fläche $f = 0$ im allgemeinen von Null verschieden ist, so hat man aus den Gleichungen (3) für A, B bez. A_1, B_1 für die Punkte der Fläche $f = 0$

$$Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = 0,$$
$$A_1f'_x + B_1f'_y + C_1f'_z = 0$$

und daraus

$$AB_1 - A_1B = f'_z . Q(x, y, z),$$
$$BC_1 - CB_1 = f'_x . Q(x, y, z),$$
$$CA_1 - AC_1 = f'_y . Q(x, y, z).$$

Die Fläche $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $Q = 0$, „die zu f adjungirte Fläche" geht dann durch alle Curven der Ordnung p (der Fläche f) $(p-1)$-mal hindurch und hat in jedem p-fachen Knotenpunkt einen $(p-2)$-fachen. Weiter ist das Doppelintegral

$$\int^x \int^y \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

für alle Werte x, y endlich.

Auf specielle Flächen eingehend ergiebt sich: Die Flächen zweiter und dritter Ordnung besitzen keine Integrale erster Gattung, mit Ausnahme des Kegels dritter Ordnung, für welchen (den Coordinatenanfangspunkt als Kegelspitze genommen)

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{f'_z}$$

sich als überall endliches Integral erweist. Flächen vierter und fünfter Ordnung können höchstens ein Integral erster Gattung besitzen. Erst für Flächen sechster Ordnung ergiebt sich die Möglichkeit zweier unabhängiger, überall endlicher Integrale.

Die weitere Untersuchung betrifft eine Klasse algebraischer Flächen, für welche sich die Coordinaten eines Punktes durch eindeutige vierfach periodische Functionen zweier Parameter ausdrücken lassen, wobei noch die specielle (beispielsweise bei der Kummer'schen Fläche nicht erfüllte) Voraussetzung gemacht

wird, dass bis auf Periodenvielfache jedem Punkte der Fläche nur ein einziges Wert-System der Parameter entspricht. Aus einer solchen Darstellung:

$$x = F(u, v), \quad y = F_1(u, v), \quad z = F_2(u, v)$$

ergiebt sich dann sofort die Existenz von zwei und nur zwei überall endlichen Integralen für diese Flächen. Es sind nämlich, wenn aus

$$dx = \frac{\partial F}{\partial u}\,du + \frac{\partial F}{\partial v}\,dv,$$
$$dy = \frac{\partial F_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial F_1}{\partial v}\,dv$$

die Werte von du, dv folgen in der Form.

$$du = P\,dx + Q\,dy,$$
$$dv = P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

die beiden Integrale

$$\int \{P\,dx + Q\,dy\} \quad \text{und} \quad \int \{P_1\,dx + Q_1\,dy\}.$$

Es werden die Bedingungen untersucht, unter welchen eine Fläche $f = 0$ in der gemeinten Weise darstellbar ist; dabei erweisen sich Flächen sechster Ordnung als die niedrigsten, welche diese Parameterdarstellung zulassen.

Den Schluss bildet die Untersuchung der Differentialgleichungen von der Form

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

für welche F eine algebraische Relation bedeutet. Ist u eine eindeutige vierfach periodische Function von x, y, so existirt eine Relation der obigen Form zwischen u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Nun fragt sich umgekehrt, wie man erkennen kann, ob der obigen Differentialgleichung durch eine eindeutige, vierfach periodische Function u von x, y genügt werden kann. Damit ist die Erweiterung der bekannten Untersuchungen von Briot und Bouquet über die Auflösung der Differentialgleichung $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ durch elliptische

Functionen bezeichnet. Es wird gezeigt, dass in diesem Falle,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w$$

gesetzt, die Fläche

$$F(u, v, w) = 0$$

zu der soeben besprochenen Klasse algebraischer Flächen gehört.

Dk.

E. Picard. Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. C. R. CI. 734-736.

Das Integral

$$\int \{P\,dx + Q\,dy\}$$

wo P und Q rationale Functionen von x, y und z sind, und diese Variabeln durch eine Relation $f(x, y, z) = 0$ verknüpft sind, wird ein Integral zweiter Gattung genannt, wenn sie folgenden Bedingungen genügt: Es sei $x = a$, $y = b$ ein beliebiges System von Werten für x und y, man setze

$$x = a + t\lambda(t), \quad y = b + t\mu(t)$$

wo λ und μ zwei beliebige in der Umgebung von $t = 0$ holomorphe Functionen bezeichnen, und substituire diese Werte in dem Integral; die Function von t, die man so erhält, muss dann in der Umgebung von $t = 0$ den Charakter einer algebraischen Function haben. Der Verfasser hat gefunden, dass für die allgemeinste Oberfläche $f(x, y, z) = 0$ eines gegebenen Grades alle Integrale zweiter Gattung sich auf rationale Functionen von x, y, z reduciren. Dieses Resultat bildet die Ergänzung des in der vorstehend besprochenen Abhandlung (Jordan J. (4) I) bewiesenen Satzes, dass die genannte Oberfläche kein Integral erster Gattung, d. h. kein für alle Werte von x und y endliches Integral besitze.

Hr.

D. Besso. Di alcune proprietà delle equazioni lineari omogenee alle differenze finite del 2° ordine. Rom. Acc. L. (4) I. 381-383.

Sind $y_1, y_2, \dots, y_m$ m Lösungen der Differenzengleichung

$$\theta^2 y - p\theta y - qy = 0,$$

wo p und q Functionen von x sind, und $\theta y = y_{x+1}$, dann genügt das Product $z = y_1 y_2 \dots y_m$ einer linearen homogenen Differenzengleichung $(m+1)^{ter}$ Ordnung. Die Grössen

$$\frac{\theta y_1}{y_1}, \dots, \frac{\theta y_m}{y_m}$$

sind Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades, deren Quotienten sich durch z, p, q und deren θ rational ausdrücken lassen. Diese Eigenschaften sind bekannten Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen analog. (Vgl. Besso, Rom. Acc. L. Mem. XIV., F. d. M. XIV. 1882. 266.) Hr.

E. Cesaro. Sur une équation aux différences mêlées. Nouv. Ann. (3) IV. 36-41.

Es sei y eine beliebige Function, und eine Reihe von Functionen $y_1, y_2, \dots$ durch die recurrente Beziehung $y_p = x.y'_{p-1}$ definirt; dann gilt für diese Functionen die independente Darstellung:

$$y_p = \frac{xy'}{1}\Delta(0^p) + \frac{x^2y''}{1.2}\Delta^2(0^p) + \frac{x^3y'''}{1.2.3}\Delta^3(0^p) + \cdots.$$

Umgekehrt ist in symbolischer Schreibweise

$$x^p y^{(p)} = y(y-1)\dots(y-p+1).$$

Hiervon wird Anwendung gemacht auf den speciellen Fall

$$y = x + x^2 + \cdots + x^n;$$

dies führt, wenn $x = 1$ gesetzt wird, zu bekannten Formeln für die Bernoulli'schen Zahlen. Der Fall $n = \infty$ ergiebt, dass

$$1 + 2^p x + 3^p x^2 + 4^p x^3 + \cdots$$

mit $(1-x)^{p+1}$ multiplicirt eine ganze Function vom Grade $p-1$ ist (cf. Catalan in den Belg. Mém. N. XLIII p. 1ff.; F. d. M. XIII. 1881. 394f.). Der specielle Fall $y = e^x$ führt auf die Zahlen

$$N_p = \frac{\Delta(0^p)}{1} + \frac{\Delta^2(0^p)}{1.2} + \frac{\Delta^3(0^p)}{1.2.3} + \cdots,$$

von denen einige Eigenschaften abgeleitet werden; z. B.

$$N_\nu = \Delta^\nu(N_1) = \left[\frac{d^\nu e^{e^x-1}}{dx^\nu}\right]_{x=0}.$$

Schliesslich wird y_ν als bestimmtes Integral dargestellt.

T.

H. Brocard. Questions de licence. Mathesis V. 54-55, 130-131, 156, 166, 224-225.

Integration verschiedener gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen. Mn. (Lp.)

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

S. Lie. Untersuchungen über Transformationsgruppen. II. Lie Arch. X. 353-413.

Ist eine continuirliche Transformationsgruppe

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

gegeben, so ist es immer möglich, ohne Integration alle gleich zusammengesetzten Gruppen zu finden. Wünscht man insbesondere alle transitiven Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung, so verfährt man folgendermassen: Man nimmt eine Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1, \dots, x_n$, führt für sie alle Transformationen der Gruppe aus, und erhält so eine invariante Schar von Mannigfaltigkeiten. Bei der Gruppe werden die Mannigfaltigkeiten dieser Schar unter sich vertauscht. Sind dabei $u_1, \dots, u_\varrho$ die Parameter unserer Mannigfaltigkeiten, so werden diese Grössen u durch eine mit der vorgelegten Gruppe gleich zusammengesetzte Gruppe transformirt.

Alle Transformationen einer Gruppe G_r, die ein Wertsystem x_ν invariant lassen, bilden eine Untergruppe. Gehört nun jede derartige Untergruppe gleichzeitig zu unendlich vielen Punkten,

so dass alle Transformationen der Gruppe G_r, die einen Punkt ungeändert lassen, gleichzeitig unendlich viele Punkte invariant lassen, so heisst die Gruppe „systatisch.“ Alle Gruppen, welche diese Eigenschaft nicht besitzen, heissen „asystatisch.“ Die hiermit eingeführten Begriffe sind von Wichtigkeit bei der Anwendung der Transformationstheorie auf die Integrationstheorie der Differentialgleichungen.

Lässt eine Gruppe G_r eine Differentialgleichung

$$(1) \qquad \sum_{i,k}^{1\ldots n} f_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i dx_k = 0$$

invariant, so werden vermöge der Gruppe die durch einen festgehaltenen Punkt x_i^0 gehenden Richtungen $dx_1, \ldots, dx_n$ durch eine projective Gruppe transformirt, welche die in den Differentialen quadratische Gleichung

$$\sum_{i,k}^{1\ldots n} f_{ik}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, dx_i dx_k = 0$$

invariant lässt. Es wird nun angenommen, dass diese projective Gruppe die allgemeine projective Gruppe der betreffenden Gleichung zweiten Grades ist. Alsdann ist die Gruppe G_r ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen im Raume $x_1 \ldots x_n$, oder mit den Aehnlichkeitstransformationen in diesem Raume, oder mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen, oder endlich mit der Gruppe der reciproken Radien.

Die allgemeine projective, continuirliche Gruppe einer Fläche zweiten Grades im n-fachen Raume ist einfach, wenn $n > 3$ ist.

L.

S. Lie. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche endliche Gruppe gestatten. Klein Ann. XXV. 71-151

In der Einleitung giebt Lie zunächst einen Ueberblick über seine früheren bis 1869 zurückgehenden Untersuchungen über Differentialgleichungen, welche bekannte endliche continuirliche Grup-

pen gestatten; sodann stellt er die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen aus seiner Gruppentheorie zusammen. (S. 71-77.)

In § 1 (S. 78-83) wird das Problem behandelt, ein vollständiges System zu integriren, welches bekannte infinitesimale Transformationen gestattet. Dieses Problem wird auf das andere zurückgeführt, ein q-gliedriges vollständiges System in n Veränderlichen zu integriren, welches eine $(n-q)$-gliedrige Gruppe mit bekannten infinitesimalen Transformationen gestattet. Diese Gruppe kann überdies jede charakteristische Mannigfaltigkeit des vollständigen Systems in jede andere überführen. Ausserdem giebt Herr Lie Vorschriften, Resolventen dieses reducirten Integrationsproblems herzustellen. Das entsprechende Problem in der Algebra ist die Auflösung einer Gleichung, deren Galois'sche Gruppe einfach transitiv ist, die also ihre eigene Galois'sche Resolvente ist.

In § 2 (S. 83-89) wird entwickelt, welchen Vorteil man durch Auflösung einer Resolvente für das zu behandelnde Integrationsproblem hat. Ganz analog damit ist die Frage: wie weit wird die Galois'sche Gruppe einer Gleichung reducirt, wenn man alle Wurzeln einer Resolvente dieser Gleichung adjungirt. Das Ergebnis ist beide Male dasselbe. Ueberhaupt hängt die Ordnung der Resolventen des Integrationsproblems gerade so wie bei dem algebraischen Probleme nur von der Zusammensetzung der zugehörigen Gruppe ab. Die Ordnung der niedrigsten erforderlichen Resolventen kann daher bei dem Integrationsproblem durch algebraische Operationen gefunden werden.

§ 3 (S. 90-96) Allgemeines über infinitesimale Berührungstransformationen und Gruppen von Berührungstransformationen. Zu jeder r-gliedrigen Gruppe lässt sich eine holoedrisch isomorphe lineare homogene Gruppe angeben.

§ 4 (S 96-107). Wann sind zwei r-gliedrige Gruppen in gleich vielen Veränderlichen ähnlich, das heisst: wann geht die eine bei Einführung geeigneter Veränderlicher in die andere über? Ob ja oder nein, lässt sich ohne Integration entscheiden, auch wenn nur die infinitesimalen Transformationen beider Gruppen bekannt sind.

§ 5 (S. 107-115). Ist G_n eine einfach transitive Gruppe des R_n,

so bildet der Inbegriff aller Transformationen des R_n, welche mit allen Transformationen der G_n vertauschbar sind, eine mit der G_n ähnliche einfach transitive Gruppe. (Aehnlich in der Substitutionentheorie.) Anwendung hiervon auf ein besonderes Integrationsproblem.

§ 6 (S. 115-120). Hier beschäftigt sich Herr Lie mit Systemen partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, aus welchen $x, y, z, \dots$ als Functionen von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dots$ bestimmt werden sollen. Er setzt voraus, dass die allgemeinsten Lösungen $x', y', z', \dots$ dieser Differentialgleichungen aus beliebigen particulären Lösungen $x, y, z, \dots$ durch bekannte Substitutionen von der Form

$$x' = M(x, y, z, \dots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dots, a_1, a_2, \dots, a_r), \quad y' = N, \quad z' = P, \dots$$

mit den r Parametern $a_1, \dots, a_r$ erhalten werden, und dass diese Gleichungen zusammen mit $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}, \ \mathfrak{y}' = \mathfrak{y}, \ \mathfrak{z}' = \mathfrak{z}, \dots$ eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x, y, z, \dots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dots$ darstellen. Dieses Integrationsproblem wird auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in $r+1$ Veränderlichen zurückgeführt, welche überdies eine bekannte Gruppe gestattet.

§ 7 (S. 120-124). Anwendung hiervon auf den besonderen Fall, dass die betreffenden Differentialgleichungen die Definitionsgleichungen einer r-gliedrigen Gruppe sind (vgl. Klein Ann. XXIV. S. 553) und dass man die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe kennt, welche mit der gesuchten ähnlich ist.

§ 8 (S. 124-130). Anwendung der vorhergehenden Theorie auf eine umfangreiche Klasse von Differentialgleichungen.

§ 9 (S. 130-136). Allgemeine Sätze über endliche continuirliche Gruppen. Wichtig sind besonders die folgenden: Eine einfache Gruppe, deren grösste Untergruppe mehr als $r-4$ Parameter enthält, hat entweder 3, oder 8, oder 15, oder 10 Parameter und ist bezüglich holoedrisch isomorph mit den allgemeinen projectiven Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit, der Ebene, des R_3, des linearen Complexes im R_3.

§ 10 (S. 136-147). Das Problem der §§ 1 und 2 wird wieder aufgenommen für den Fall einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die eine Gruppe mit bekannten endlichen

Transformationen gestattet. Ist die Gruppe nicht einfach, so kann das Integrationsproblem in eine Reihe nacheinander zu erledigender Probleme zerlegt werden. Ist die Gruppe einfach, so kann die Differentialgleichung auf eine von der Beschaffenheit der Gruppe abhängende Normalform gebracht werden.

§ 11 (S. 147-149). Das Problem des vorigen §, nur dass die endlichen Transformationen der Gruppe unbekannt sind; dasselbe wird auf den Fall zurückgeführt, wo die endlichen Transformationen bekannt sind.

§ 12 (S. 149-151). Die Integration der Definitionsgleichungen einer endlichen continuirlichen Gruppe wird direct auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt, ohne Benutzung der in § 7 gemachten Voraussetzung. El.

E. Picard. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. C. 231-233.

Es handelt sich um die Frage, unter welchen Bedingungen man einer algebraischen Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

durch eine eindeutige, vierfach periodische Function u der beiden Veränderlichen x, y genügen kann; vorausgesetzt wird dabei, dass die Gleichung $f(u, v, w) = 0$ eine algebraische Fläche mit nur „gewöhnlichen" (cf. C. R. IC. 961 ff.; F. d. M. XVI. 1884. 294) Singularitäten darstelle. Hierzu ist zunächst notwendig, dass die Coordinaten der Punkte der Fläche $f(u, v, w) = 0$ sich durch vierfach periodische Functionen von zwei Parametern ausdrücken lassen, so dass jedem Punkte nur ein einziges System von Parameterwerten, abgesehen von Vielfachen der Perioden, entspreche. Die Bedingungen hierfür hat der Herr Verfasser früher (C. R. IC. p. 1147 ff.) angegeben (cf. F. d. M. XVI. 1884. 296). Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird die Gleichung (α) vierfach periodische Functionen als Lösungen zulassen, wenn in den beiden Integralen erster Gattung $\int \frac{B\,du - A\,dv}{f'_w}$ und

$\int \frac{B_1 du - A_1 dv}{f_w}$, welche die Fläche besitzen muss, die Functionen A und A_1 die Gestalt besitzen:

$$A = (\alpha v + \beta w) Q(u, v, w) \quad \text{und} \quad A_1 = (\gamma v + \delta w) Q(u, v, w),$$

wo $Q(u, v, w) = 0$ die Gleichung der adjungirten Fläche und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constante bedeuten. T.

Ph. Gilbert. Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Brux. S. sc IX. B 41-48.

Es sei $u = \alpha$, $v = \beta$ das Integralsystem der Differentialgleichungen $dx:X = dy:Y = dz:Z$, welche das Hülfssystem zur Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} = Z$$

bilden. Es ist identisch:

$$X : \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} = Y : \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)} = Z : \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)};$$

hierin bezeichnen die zweiten Terme dieser Verhältnisse Functionaldeterminanten, welche partielle Ableitungen in Bezug auf x, y, z enthalten, die in u und v eingehen, als ob x, y, z unabhängig wären. Bezeichnet man mit R den gemeinsamen Wert der drei Verhältnisse, so findet man ohne Mühe, dass

$$Xp + Yq - Z = R \frac{d(u, v)}{d(x, y)}.$$

Die Functionaldeterminante des zweiten Gliedes enthält jetzt die totalen Ableitungen:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

von u und v. Hieraus geht hervor, dass alle Lösungen der Gleichung $Xp + Yq - Z = 0$ durch $v = \varphi(u)$ und $R = 0$ gegeben werden. Mn. (Lp.)

R. Liouville. Sur quelques transformations nouvelles des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. C. 168-170.

R. Liouville. Sur les formes intégrables des équations linéaires du second ordre. C. R. C. 235-237.

Es werden als Folgerungen einer sehr allgemeinen Transformation zwei Sätze mitgeteilt, welche gestatten, alle diejenigen linearen Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen zu bilden, deren Integral zwei willkürliche Functionen enthält, von denen wenigstens eine frei von dem Zeichen $\int$ ist. Sie stellen eine Verallgemeinerung des von Moutard in Bezug auf die Gleichungen von der Form $s = \lambda z$ gegebenen Theorems (C. R. 1870 und J. de l'Éc. Polyt. XXVIII., cf. F. d. M. II. 1870. 321 und X. 1878. 263) dar.

In der zweiten Note werden noch zwei andere Sätze über diesen Gegenstand mitgeteilt. Sie knüpfen sich an die Eigenschaft einer Form, welche man den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, nötigenfalls durch Multiplication mit einem gewissen Factor, stets geben kann, nämlich $\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$, wo φ und ψ lineare Functionen der abhängigen Veränderlichen z und ihrer ersten Ableitungen bedeuten. T.

R. Liouville. Sur les solutions communes à plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles. C. R. CI 1134-1137.

Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass zwei lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen drei oder vier unabhängige Integrale besitzen, in der Form einer einzigen Identität zusammengefasst und der Zusammenhang des gegebenen Systems mit dem System der Adjuncten, welche der Verfasser in der Note C. R. C. 235ff. (vgl. das vorstehende Referat) eingeführt hat, untersucht. T.

L. Levy. Sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. C. R. C. 98-100.

In Verallgemeinerung eines Verfahrens, das Herr Darboux in seinen Vorlesungen 1882-83 bei der Behandlung der von Laplace und neuerlich von Moutard (C. R. LXX. 834 und 1068; cf. F. d. M. II. 1870. 321 f.; vgl. auch J. de l'Éc. Polyt. XXVIII. 112; F. d. M. X. 1878. 263 f.) untersuchten Differentialgleichung

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

wo a, b, c, gegebene Functionen von x, y sind, benutzt, wendet der Verfasser die Transformation an

$$z' = (a+\alpha)z + \frac{\partial z}{\partial y};$$

genügt dann die Function α einer gewissen Differentialgleichung, so geht die gegebene Gleichung für z in eine Gleichung (E') für z' von derselben Form über. Die Gleichung (E') ist dann niemals integrabel, wenn die Gleichung (E) es nicht ist; dagegen ist (E') und gleichzeitig die Gleichung für α stets integrabel, sobald es (E) ist. Da die Gleichung (E') ihrerseits ebenso wie die Gleichung (E) weiter behandelt werden kann, so gelangt man auf diese Weise zu einer Reihe von neuen Gleichungen mit willkürlichen Functionen in den Coefficienten, die gleichzeitig mit (E) integrabel sind. Eine wichtige Rolle spielen bei diesen Untersuchungen die von Darboux eingeführten Invarianten

$$h = ab - c + \frac{\partial a}{\partial x}, \quad k = ab - c + \frac{\partial b}{\partial y}.$$

T.

V. Volterra. Integrazione di alcune equazioni differenziali del secondo ordine. Rom. Acc. L. (4) I. 303-306.

Es wird gezeigt, wie man unter gewissen Bedingungen Integrale der Differentialgleichung von der Form $rt - s^2 = f(p, q)$ durch Quadraturen bestimmen kann. Um das erhaltene Re-

auf ein Beispiel anzuwenden, beweist der Verfasser, dass die Differentialgleichung

$$rt-s^2 = f(gp^2+hq^2+kpq+mp+nq),$$

wo f eine ganz beliebige Function und g, h, k, m, n Constanten bedeuten, immer eine Klasse von particulären Integralen mit vier willkürlichen Constanten zulassen, die man mittels Quadraturen allein bestimmen kann. T.

A. Capelli. Sopra l'integrale dell' equazione alle derivate parziali di Laplace. Batt. G. XIII. 123-157.

Es genüge die Function u innerhalb eines gegebenen, analytischen Bereiches C der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

und ausserdem folgenden Nebenbedingungen: die Function u und ihre Ableitungen seien im Innern von C einwertig, endlich und stetig, sie selbst sei es auch auf der Begrenzung σ des Bereiches und nehme dort beliebig vorgegebene Werte an. Unter der Voraussetzung, dass diese Nebenbedingungen so beschaffen seien, dass eine solche Function u existirt, untersucht der Verfasser das Verhalten der ersten und zweiten Ableitungen von u auf der Grenzcurve σ, denen man bekanntlich im allgemeinen nicht mehr vorschreiben kann, dort endlich und stetig zu sein. Hierzu bedient er sich orthogonaler krummliniger Coordinaten ϱ_1, ϱ_2 (parallel resp. normal zu σ) und zeigt: bleibt die Function $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2}$ endlich bis zu σ hinan (oder endlich und stetig bis σ incl.), so wird dasselbe der Fall sein für $\frac{\partial u}{\partial \varrho_2}$ und für die anderen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2}$; Analoges gilt, wenn man von $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2}$ ausgeht. Hierauf wendet sich die Untersuchung dem speciellen Falle zu, dass σ einen Kreis mit dem Radius R darstelle, so dass für ϱ_1, ϱ_2 Polarcoordinaten r, φ genommen werden können, und die bekannte Integralform für u zu Grunde gelegt werden

...n. Bezeichnet $f(\varphi)$ den Wert von u im Punkte (R, φ) von ...so lautet das Hauptresultat, zu dem der Verfasser gelangt: ...st $f(\varphi)$ eine endliche (stetige oder unstetige) Ableitung $f'(\varphi)$ ...der Umgebung von φ_0 zu, so dass das Verhältniss $\frac{f'(\varphi+h)-f'(\varphi)}{h}$ ...e obere endliche Grenze besitzt für alle Werte von φ in dieser ...ngebung und für alle hinreichend kleinen Werte von h, so ...eiben die Functionen $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$, $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ endlich, ...hrend der Punkt (r, φ) sich dem Punkte (R, φ_0) des Grenz...ises nähert. Das so für $\frac{\partial u}{\partial r}$ hauptsächlich auf Grund des ...n angeführten allgemeinen Satzes gewonnene Resultat wird ...nn nochmals direct vermittelst des analytischen Ausdrucks ...ser Ableitung verificirt und vervollständigt. Endlich wird das ...rhalten der Ableitungen von u auf dem Grenzkreise ohne ...raussetzung der Existenz einer Ableitung von $f(\varphi)$ untersucht; ...ergiebt sich: existirt eine obere Grenze H von $|f_h(\psi)|$, wo

$$f_h(\psi) = \frac{f(\psi+h)-f(\psi)}{h}$$

..., für alle Werte von ψ zwischen $\varphi-\delta$ und $\varphi+\delta$ und für ...e hinlänglich kleinen Werte des Increments h, so bleibt $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ ...lich, wie auch der Punkt (r, φ) sich dem Punkte (R, φ) von ...nähert. Dasselbe ist auch für $\frac{\partial u}{\partial r}$ der Fall, falls der Quo...nt $\frac{f_h(\varphi+\psi)-f_h(\varphi-\psi)}{\psi}$ nicht über alle Grenzen wächst, ...nn man h immer kleiner werden und ψ zwischen 0 und δ ...riiren lässt. T.

... Obnesorge. Zur Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Hoppe Arch. (2) II. 53-81.

Der Herr Verfasser stellt sich die Aufgabe, alle reellen Functionen u der beiden Argumente x, y zu bestimmen, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügen und auf einer gegebenen algebraischen Curve vorgeschriebene Werte annehmen. Es wird nicht ausdrücklich gesagt, es ist aber zweifellos gemeint, dass diese vorgeschriebenen Werte längs der gegebenen Curve mit den Werten einer analytischen Function der beiden Argumente x, y übereinstimmen sollen. Auf die Abfassung dieser Abhandlung sind, wie es scheint, die Ergebnisse, zu welchen andere Forscher in demselben Untersuchungsgebiete gelangt sind, ohne Einfluss geblieben. Die allgemeinen Betrachtungen, welche der Herr Verfasser über die Lösung der angegebenen Aufgabe anstellt, machen zum nicht geringen Teile den Eindruck von mehr oder weniger willkürlichen Versuchen, deren Erfolg nicht stets durch eine genaue Beweisführung kontrollirt wird. Die Arbeit behandelt die folgenden beiden speciellen Aufgaben:

1) Die Gleichgewichtsverteilung der Elektricität auf zwei unendlich langen Cylindern mit parallelen Axen und mit kreisförmigen Grundflächen.

2) Die stationäre elektrische Strömung in einer ebenen elliptischen Platte.

Bei der unter 1) genannten Aufgabe kommt hauptsächlich der Fall in Betracht, in welchem jeder der beiden Cylinder ganz ausserhalb des andern liegt, beide Cylinder sich auch nicht berühren. Diesen Fall behandelt der Herr Verfasser auf den Seiten 68-71. Von den drei Formeln, welche für das elektrische Potential in dem Innern des ausserhalb beider Cylinder liegenden Raumes aufgestellt werden, ist jedoch keine richtig. Bei der Herleitung dieser Formeln ist ausser Acht gelassen, dass der in Betracht kommende Bereich zweifach zusammenhängend ist und dass die Function, welche den Wert des elektrischen Potentials in diesem Bereiche darstellen soll, nebst ihren Ableitungen eindeutig sein muss. Die richtige Lösung der ge-

stellten Aufgabe führt bei passender Wahl der unabhängigen Variabeln auf den reellen Teil eines elliptischen Integrals dritter Art, während die von dem Herrn Verfasser angegebenen Formeln nur Logarithmen und Exponentialfunctionen enthalten.

Auch die Formel, welche als Lösung für die unter 2) genannte specielle Aufgabe auf S. 80 angegeben wird, ist unrichtig. Eine richtige Lösung dieser Aufgabe hat Heine im Jahre 1874 gegeben: Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten. Borchardt J. LXXIX. (F. d. M. VI. 1874. 698).

Sz.

G. Ascoli. Integrazione dell' equazione differenziale $\varDelta^2 u = 0$ in alcune aree piane assai semplici. — Dei rami algebrici di curva. — Intorno ad alcune rappresentazioni conformi. — Di nuovo sulle rappresentazioni conformi. — Ancora una volta alle rappresentazioni conformi. — Intorno alle funzioni che soddisfano alla equazione differenziale $\varDelta^2 u = 0$. — Di nuovo sulle funzioni che soddisfano all' equazione differenziale $\varDelta^2 u = 0$. — Ulteriori ricerche sulle funzioni che soddisfano alla equazione differenziale $\varDelta^2 u = 0$. — Ancora una volta sulle funzioni che soddisfano all' equazione differenziale $\varDelta^2 u = 0$. — Integrazione dell' equazione differenziale $\varDelta^2 u = 0$ in una area Riemanniana qualsivoglia. — Si pone in chiaro il par. 3 della Memoria di Riemann: La teorica delle funzioni Abeliane. Lomb. Rend. (2) XVIII. 252-258, 279-284, 349-356, 390-395, 440-450, 474-481, 546-551, 599-610, 617-629, 718-732, 783-795, 806-816.

Die Abhandlungen, deren Ueberschriften im Vorstehenden wiederholt sind, können hinsichtlich ihres Inhalts insofern als zusammengehörig betrachtet werden, als dieselben unter Hinzunahme eines Aufsatzes desselben Herrn Verfassers: Integrazione dell' equazione differenziale $\varDelta^2 u = 0$ nell' area di un cerchio (F. d. M. XVI. 1884. 372) demselben Zwecke dienen, nämlich die

von Riemann in seiner Inauguraldissertation und in seiner Abhandlung „Theorie der Abel'schen Functionen" ausgesprochenen allgemeinen Lehrsätze über die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen zu beweisen. Hierbei wird der Bereich, für welchen die partielle Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$ den angegebenen Bedingungen gemäss integrirt werden soll, falls derselbe nicht ein geschlossener Bereich ist, der Einschränkung unterworfen, dass seine Begrenzung von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien gebildet werde, die in allen in Betracht kommenden Punkten den Charakter einer algebraischen Curve haben, und dass die Zahl der dem Innern des Bereiches angehörenden Windungspunkte eine endliche ist.

Das Beweisverfahren, dessen einzelne Teile der Herr Verfasser in den Abhandlungen auseinandersetzt, deren Titel im Vorstehenden angeführt sind, stimmt im wesentlichen, nämlich in seinem Grundgedanken, dem Gedankengange und in den wichtigsten Hülfssätzen, auf welche der Beweis gestützt wird, mit demjenigen Beweisverfahren überein, dessen Grundgedanken, Gedankengang und Beweishülfsmittel in einer im Jahre 1870 der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften gemachten Mitteilung, welche im Monatsberichte dieser Akademie vom October 1870 Seite 767-795 veröffentlicht ist, kurz aber vollständig dargelegt worden sind. Ein Teil dieses Beweisverfahrens ist in einem an Herrn F. Klein gerichteten, im XXI. Bande der Mathematischen Annalen, S. 157-160 veröffentlichten Briefe des Referenten weiter ausgeführt. Der Herr Verfasser reproducirt mit Angabe der Quelle einen Teil des Inhalts der beiden angeführten Mitteilungen, sowie eines anderen auf denselben Gegenstand sich beziehenden Aufsatzes des Referenten und begleitet verschiedene Einzelheiten mit den ihm angemessen erscheinenden Ausführungen.

Einige in den drei letzten der oben angeführten Aufsätze

enthaltene Unrichtigkeiten berichtigt der Herr Verfasser in einer in den Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II. Vol. XIX. pag. 285-287 (1886) veröffentlichten Mitteilung: Alcune osservazioni alle mie Note relative alle integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$. Sz.

G. Ricci. Sulla integrazione della equazione $\Delta_2 U = f$. Ven. Ist. Atti (6) III. 1439-1444.

Es bezeichne S einen dreifach ausgedehnten Teil des Raumes, σ die Begrenzungsfläche desselben, f eine für das Innere des Raumteiles S, φ eine für die Begrenzungsfläche σ gegebene, endliche, stetige und eindeutige Function. Es werde vorausgesetzt, dass für jeden dem Innern des Gebietes S angehörenden Punkt die diesem Punkte entsprechende Green'sche Function des Gebietes S bekannt sei.

Unter der Voraussetzung, dass eine mit Einschluss ihrer Ableitungen gewissen Stetigkeitsbedingungen genügende Function U existirt, welche im Innern des Gebietes S die Differentialgleichung $\Delta_2 U = f$ befriedigt und auf der Begrenzungsfläche σ mit der Function φ übereinstimmt, ergiebt sich aus dem Green'schen Satze bei Anwendung eines geeigneten Grenzüberganges, dass diese Function U darstellbar ist durch die Summe eines über alle Elemente des Gebietes S zu erstreckenden dreifachen und eines über alle Elemente der Begrenzungsfläche σ zu erstreckenden zweifachen Integrals. Durch diesen Ausdruck ist di[illegible] Function U eindeutig bestimmt.

An diese bekannte Darstellung anknüpfend stellt sich d[illegible] Herr Verfasser die Aufgabe, zu beweisen, dass der gefunde[illegible] Ausdruck eine den erwähnten Bedingungen genügende Functio[illegible] wirklich darstelle, ohne dass es nötig sei, diesen Beweis auf di[illegible] Kenntnis der speciellen Gestalt der Green'schen Function zu stützen. Der Herr Verfasser sagt, es sei leicht, mittels bekannter Sätze über bestimmte Integrale und über die [illegible]ation derselben unter dem Integralzeichen, den Sch[illegible] dass

die durch den erwähnten Ausdruck dargestellte Function U für das Innere des Bereiches S der Differentialgleichung $\Delta_2 U = f$ genüge. Auf die Frage, welche Eigenschaft der Function f ausser der Stetigkeit derselben vorausgesetzt werden müsse, um überhaupt die Existenz zweier particller Ableitungen der durch den erwähnten Ausdruck dargestellten Function U beweisen zu können, wird indes nicht eingegangen. Siehe den für diese Fragestellung bemerkenswerten Schluss der Abhandlung des Herrn Kronecker: Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln (Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom März 1869) und die Doctordissertation des Herrn O. Hölder: Beiträge zur Potentialtheorie, Stuttgart 1882.

Der Beweis dafür, dass die durch den erwähnten Ausdruck dargestellte Function U der vorgeschriebenen Grenzbedingung genügt, stützt sich im Aufsatze auf drei Voraussetzungen betreffend allgemeine Eigenschaften der Green'schen Functionen (S. 1443), in dem Sinne, dass der von dem Herrn Verfasser angegebene Beweis stets dann und nur dann formelle Gültigkeit besitzen soll, wenn diese drei Voraussetzungen gleichzeitig erfüllt sind.

Die erste dieser Voraussetzungen ist jedoch in Folge eines Irrtums so gefasst, dass dieselbe in keinem Falle erfüllt werden kann. Auch der Herr Verfasser hat, wie aus einem von ihm an den Referenten gerichteten Briefe hervorgeht, diese Bemerkung gemacht. Eine Berichtigung ist ohne Schwierigkeit ausführbar.

Die zweite der in der Abhandlung angegebenen Voraussetzungen ist nur bedingungsweise, d. h. nicht für jede Gestalt der Begrenzungsfläche σ erfüllbar. Besitzt diese Begrenzungsfläche beispielsweise eine oder mehrere Kanten, so ist es möglich, dass die zweite der von dem Herrn Verfasser angegebenen Voraussetzungen sich als unerfüllbar herausstellt. Auch diese Voraussetzung kann durch eine andere ersetzt werden, deren Erfülltsein zur Geltung des in Betracht kommenden Teiles des mitgeteilten Beweises ausreicht. Dies kann z. B. dadurch geschehen, dass an die Stelle der bei dieser Voraussetzung in

Betracht gezogenen Function der Mittelwert derselben für den in Betracht kommenden Teil des Integrationsgebietes gesetzt wird.

Die dritte der erwähnten Voraussetzungen ist ohne Ausnahme stets erfüllt. Dies folgt aus dem Satze, dass eine für das Innere eines gewissen Bereiches der Differentialgleichung $\Delta_1 V = 0$ genügende Function V den kleinsten und den grössten unter allen denjenigen Werten, die diese Function überhaupt für die Punkte dieses Bereiches annehmen kann, nur in Punkten der Begrenzung dieses Bereiches annimmt. Sz.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

L. Scheeffer. Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen. Klein Ann. XXV. 522-593. Bemerkungen dazu. Klein Ann. XXV. 594-595.

Der leider so früh verstorbene Verfasser füllt in der vorliegenden Abhandlung eine wesentliche Lücke, welche in der allgemeinen Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale trotz der Arbeiten von Lagrange, Jacobi, Spitzer, Hesse, Clebsch, Lipschitz, A. Mayer und Lundström bisher noch offen geblieben war, aus und zwar auf einem Wege, dessen weitere Verfolgung ihn zu einer neuen, von der bisherigen principiell abweichenden Ableitungsweise der ganzen Theorie überhaupt geführt hat; dieselbe zeichnet sich aus durch die Einfachheit des zu Grunde liegenden Gedankens und die Natürlichkeit, mit der alle analytischen Operationen sich aus jenem ergeben, wirft auf die innere Bedeutung der Kriterien des Maximums und Minimums ein neues Licht und lässt den Gebrauch gewisser Hülfsmittel, deren Hineinziehung in die Untersuchung bisher nur durch den Erfolg gerechtfertigt war, schon im voraus hinreichend motivirt erscheinen.

Handelt es sich um die Aufsuchung des Minimums des Integrals

$$J = \int_{x^0}^{x^1} F(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')\,dx,$$

so müssen bekanntlich die Functionen $y_1, \ldots, y_n$ zunächst die Integrale eines gewissen Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung sein, deren willkürliche Constanten $c_1, c_2, \ldots$ durch die Anfangs- und Endwerte und überhaupt durch die zu irgend zwei Werten von x gehörigen Werte von $y_1, \ldots, y_n$ bestimmt sind, und es kommt nun darauf an, zu entscheiden, ob diese Functionen J wirklich zu einem Minimum machen. Zu diesem Ziele führt die Anwendung eines einfachen Princips, welches, wenn ein Wertsystem $x, y_1, \ldots, y_n$ ein Punkt, ein Functionensystem $y_1 \ldots y_n$ eine Curve und, wenn dies den Differentialgleichungen des Problems genügt, eine Minimalcurve genannt, und der zu einem Constantensystem $c_1, c_2, \ldots$ gehörige Wert des Integrals mit J_c bezeichnet wird, folgendermassen lautet: „Macht die zwischen den gegebenen Punkten A^0 und A^1 beschriebene Curve c das Integral J zu einem Minimum, so ist, wenn b irgend eine andere, genügend nahegelegene, aus mehreren Stücken $b', b'', \ldots$ bestehende Verbindungslinie jener beiden Punkte bedeutet, 1) nicht nur

$$J_{b'+b''+\cdots} - J_c > 0$$

und, wenn man die Stücke $b', b'', \ldots$ durch Minimalcurven $c', c'', \ldots$ zwischen denselben Endpunkten ersetzt,

$$J_{c'+c''+\cdots} - J_c > 0,$$

sondern es lässt sich 2) ausserdem noch erwarten, dass auch

$$J_{b'} - J_{c'} > 0, \quad J_{b''} - J_{c''} > 0, \ldots$$

sein wird. Umgekehrt ist ohne weiteres klar, dass die Relationen der letzten Gruppe, wenn sie für jede Curve b und jede Zerlegung einer solchen in einzelne Stücke gelten, für sich allein hinreichend sind, um das Bestehen des Minimums zu erweisen; denn setzen wir speciell $b' = b$, $b'' = 0$, $b''' = 0, \ldots$, so erhalten wir die für das Minimum charakteristische Relation $J_b - J_c > 0$." Ein directer Beweis dieses Princips wird nicht gesucht, braucht auch nicht gesucht zu werden; es dient nur als Wegweiser für den Gang der Entwickelung. Die Verfolgung des in dem ersten Teil

des Princips enthaltenen Gedankens, die auch die Einführung der Grössen $u_{i\lambda} = \frac{\partial y_i}{\partial c_\lambda}$, welche bei Clebsch und den späteren Bearbeitern der Theorie willkürlich erscheinen musste, als ganz natürlich erweist, führt auf die Notwendigkeit der beiden im wesentlichen von Jacobi herrührenden Bedingungen des Minimums: I. Die quadratische Form

$$\sum_{i,k}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} \eta_i \eta_k$$

darf im Intervalle $x^0 \dots x^1$ für kein System von Werten der Grössen $\eta_1, \dots, \eta_n$ negativ werden; II. die Determinante

$$\Delta(x, x^0) = \Sigma \pm u_{11} \dots u_{nn} u^0_{1,n+1} \dots u^0_{n,2n},$$

wo

$$u^0_{\varkappa\lambda} = \{u_{\varkappa\lambda}\}_{x=x^0}$$

ist, darf in demselben Intervalle nicht ihr Zeichen wechseln. Mit dem Nachweis der Notwendigkeit dieses zweiten Kriteriums ist dann auch diejenige Lücke in der Theorie der zweiten Variation ausgefüllt, auf die oben hingewiesen worden ist. Hesse hatte es nämlich zwar schon als wahrscheinlich bezeichnet, dass, wenn $\Delta(x, x^0)$ für einen gewissen zwischen x^0 und x^1 liegenden Wert verschwindet, die zweite Variation nicht nur verschwinden, sondern beide Vorzeichen annehmen, ein Minimum also nicht stattfinden kann; ein Beweis hierfür war aber bisher nur für den speciellen Fall $n = 1$ von Herrn Erdmann (Schlömilch Z. XXIII. 367, cfr. F. d. M. X. 1878. 268 f.) erbracht worden. Der zweite Teil des Grundprincips führt, weiter verfolgt, unter Voraussetzung der bereits als notwendig erkannten Bedingung II. zu der Erwartung, dass eine gewisse quadratische Form $\Omega_1(\eta, \eta')$ von $\eta_1, \eta_1', \dots$ für beliebige Werte von x und den $2n$ Grössen η, η' [illegible] gativ sein darf, falls ein Minimum stattfinden soll; [illegible] zeigt sich, dass diese Bedingung zusammen mit I. [illegible] Existenz des Minimums hinreicht. Jene Erwartung er[illegible] aber einfach dadurch als richtig, dass sich die b[illegible] $\Omega_1(\eta, \eta') > 0$ als eine notwendige Folge der bereits [illegible] gründeten Bedingung I. herausstellt; die Function $\Omega_1(\eta, \eta')$ [illegible] sich nämlich auf die Form bringen

schieht daher dadurch, dass man sich die endlichen Bedingungsgleichungen nach einem Teile der gesuchten Functionen aufgelöst zu denken hat. T.

L. Scheeffer. Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung. Klein Ann. XXVI. 197-208; Leipz. Ber. 92 105.

Der Verfasser geht hier auf einen Punkt aus der Theorie der Variationsrechnung näher ein, auf welchen er schon in den Bemerkungen zu seiner Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale (Klein Ann. XXV. 594 f., cf. das obige Referat) hingewiesen hatte. Bei der Aufstellung des Kriteriums des Minimums (oder Maximums) eines Integrals $J = \int_{x^0}^{x^1} F(x, y, y')dx$ verfährt man gewöhnlich so, dass man y um ein Product $\varkappa\eta$ vermehrt, von dem der Factor $\varkappa$ von x unabhängig angenommen und fortgesetzt verkleinert wird, während η eine beliebige (an den Grenzen verschwindende) Function darstellt, und nun fordert, dass die entsprechende erste Variation verschwindet, die zweite aber beständig positiv bleibt für jede Wahl der Function η. Hiermit ist aber nur gefordert, dass y ein Minimum innerhalb einer jeden einzelnen η-Schar bestimme, wenn man nämlich alle Functionen $y+\varkappa\eta$, die sich nur durch die Werte der Constante $\varkappa$ unterscheiden, eine „η-Schar" nennt, und es folgt daraus noch nicht, wofür der Verfasser Beispiele gefunden hat, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt, obschon es unbestreitbar ist, dass jede willkürlich gegebene Function sich einer gewissen η-Schar einreihen lässt. Dieser Umstand veranlasst den Verfasser, den Begriff des Minimums enger, als es gewöhnlich geschieht, zu fassen, indem hierfür verlangt wird, dass nicht bloss die Variation Δy von y, sondern auch ihre erste Ableitung $\Delta y'$ dem absoluten Betrage nach unter gewissen Grenzen bleibe, d. h. dass das Integral J für die gesuchte Curve kleiner wird als für alle anderen, welche ganz in einem jene Curve enthaltenden Flächenstreifen liegt und zugleich überall höchstens

einen gewissen Winkel mit jener Curve bildet. Unter dieser Beschränkung findet dann aber, wie der Verfasser zeigt, ein Minimum sicher statt, sobald die erste Variation verschwindet und die zweite beständig positiv ist und ausserdem noch gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. T.

A. P. Starkoff. Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations. S. M. F. Bull. XIII. 132-142.

Es wird für diejenigen geometrischen Probleme der Variationsrechnung, in denen der Bogen s die unabhängige Veränderliche ist, bemerkt, dass die Bedingung $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ eine Beschränkung der geometrisch möglichen Auflösungen herbeiführt und deshalb durch die Bedingungen zu ersetzen ist:

$$+1 > \frac{dx}{ds} > -1, \quad +1 > \frac{dy}{ds} > -1,$$

wodurch die Auflösung des Problems einen allgemeineren Charakter erhält, indem sie dann auch die gebrochenen und gerissenen Linien in Betracht zieht. Dies wird an dem Newton'schen Problem von den Flächen kleinsten Widerstandes illustrirt. (Vergleiche das folgende Referat.) T.

A. P. Starkoff. Zur Frage von der Oberfläche des kleinsten Widerstandes bei der Bewegung in einer incompressiblen Flüssigkeit. Odessa Ges. V. 49-136. (Russisch.)

A. P. Starkoff. Ueber eine Aufgabe der Variati[onsrechnung]. Odessa Ges. VI. 29-46. (Russisch.)

A. P. Starkoff. Ueber einige Besonderheiten in der [Dar]stellung des Newton'schen Problems von der Oberfl[äche] des kleinsten Widerstands. Odessa Ges. VI. 47-56. (Russ[isch].)

N. J. Sonine. Ueber eine Aufgabe der Variationsrechnun[g]. (Zwei Artikel.) Odessa Ges. VI. 1-11, 93-107. (Russisch.)

imaginäre Exponenten. 8) Taylor's Satz mit einer als bestimmtes Integral ausgedrückten Restform. 9) Directer Beweis des Darboux'schen Satzes über die Restform im Taylor'schen Theorem. 10) Geschichtliches. Cauchy (Calcul différentiel 1829, Leçon XIII), Falk (Sur les fonctions imaginaires, Upsala 1877) haben im Grunde den Taylor'schen Satz für die Functionen einer imaginären Veränderlichen ungefähr wie Herr Mansion bewiesen; Herr Darboux ist durch eine verschiedene Methode zu gleichwertigen Ergebnissen gekommen (Liouville J. 1876). Man vergleiche auch eine Note desselben Verfassers im Belg. Bull. (3) X 846-849.

Mn. (Lp.)

O. Rausenberger. Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln. Darb Bull. (2) IX 167-169.

Inhaltsangabe des von uns (F. d. M. XVI. 1884. 334) besprochenen Werkes.

M.

Pl. Dziwiński. Kurzer Abriss der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln. Pr. Stanislawow. (Polnisch.)

Kurze Geschichte der Theorie der Functionen und Darstellung der Weierstrass'schen Theorie der Functionen mit der Anwendung auf die periodischen Functionen einer Veränderlichen.

Dn.

F. Gomes-Teixeira. Introducção á theoria das funcções. Teixeira J. VI. 33-80, 129-168.

Die Ueberschriften der einzelnen Capitel sind:

Abschnitt I. Theorie der imaginären Grössen und Regeln beim Rechnen mit denselben.

I. Charakter der Rechnungsoperationen in der Arithmetik und Algebra.

II. Analytische Theorie der complexen Grössen.

III. Geometrische Theorie der complexen Grössen.

IV. Regeln für die Rechnungsoperationen mit complexen Grössen.

V. Reihen, gebildet aus reellen Grössen. Reihen, gebildet aus complexen Grössen.

VI. Unendliche Producte reeller Factoren. Unendliche Producte complexer Factoren. Untersuchung über den Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für n gleich unendlich.

Abschnitt 2. Allgemeine Principien der Functionentheorie. Algebraische, logarithmische und Kreis-Functionen.

I. Allgemeine Principien. Stetigkeit. Einfluss des von der Veränderlichen beschriebenen Weges auf die Function.

II. Ueber ganze Functionen. Ueber rationale Functionen. Stetigkeit der algebraischen Functionen. Anzahl der Wertbestimmungen einer algebraischen Function.

III. Ueber Exponential- und logarithmische Functionen. Ueber Kreis-Functionen und deren inverse Functionen.

Es werden die Fundamental-Eigenschaften aller dieser Functionen auseinandergesetzt, ihre Stetigkeit, ihre singulären Punkte und der Einfluss, welchen der von der Veränderlichen beschriebene Weg auf den Wert der Functionen ausübt.

Tx. (Hch.)

W. P. Maximowitsch. Neue Theorie der Hamilton'schen Paare und eine entsprechende Verallgemeinerung der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Kas Ges II 98-151. (Russisch)

In der Einleitung werden ganz unabhängig von ...ziehung aus negativen Grössen die Grundlage... ...kannten Theorie gewöhnlicher complexer Ausdrücke ... Aus dieser Darstellung der Theorie geht die neue Bezeichnung für den complexen Ausdruck $a+ib$ ohne ... notwendig hervor, was unmittelbar zum Hamilton'sc... führt. Im § I. ist die Frage nach der ... der O...

regeln gelöst. Die Regel der Addition der Paare (a_1, a_2) und (b_1, b_2) z. B. aufzustellen heisst nach des Verfassers Ansicht: wenn

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (c_1, c_2)$$

und

$$c_1 = \varphi_1(a_1, a_2, b_1, b_2), \quad c_2 = \varphi_2(a_1, a_2, b_1, b_2),$$

die Form der Functionen φ_1 und φ_2 so zu bestimmen, dass die Addition der Paare alle charakteristischen Eigenschaften der gewöhnlichen algebraischen Addition (Eindeutigkeit, Commutativität, Distributivität der Multiplication in Bezug auf die Addition und endlich die modularen Eigenschaften) besitzt.

Im § II werden die Bedingungen aufgesucht, unter denen ein Paar identisch mit dem complexen Ausdruck $a + ib$ wird. Es wird gezeigt, dass bei einigen Annahmen ein jedes Paar (x, y) mit beliebigen Elementen in den Ausdruck $x + jy$ übergeht, wo j eine imaginäre Constante $\alpha + i\beta$ ist.

In § III werden die Paare (X, Y) und (x, y), die in einer functionalen Abhängigkeit von einander stehen, behandelt und die Operationen des Differentiirens und Integrirens auf das functionale Paar (X, Y) angewandt. Es lässt sich z. B. zeigen, dass die Grundsätze Cauchy's über die krummlinigen Integrale auf die Integrale von Paaren ausgedehnt werden können. Damit wird die gewöhnliche Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen $x + iy$ verallgemeinert durch die Substitution des allgemeineren Ausdruckes $x + jy = x + \alpha y + i\beta y$ anstatt des Ausdruckes $x + iy$.

So z. B. wird der Grundsatz Cauchy's, welcher die Function innerhalb einer Fläche durch das längs der Begrenzung der Fläche genommene Integral ausdrückt, so verallgemeinert:

$$\int \frac{f(\xi + j\eta)(d\xi + j d\eta)}{\xi + j\eta - (x + jy)} = \pm 2\pi i f(x + jy),$$

wo auf der rechten Seite das Zeichen identisch mit dem Zeichen von β (dem imaginären Coefficienten in j) sein soll.

Wi.

R. Dedekind. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. N. 141-159.

Herr Weierstrass hat in einem an Herrn Schwarz gerichteten Brief, welcher in den Gött. N. abgedruckt ist, gezeigt, dass die Rechnung mit n-gliedrigen complexen Zahlen immer so eingerichtet werden kann, dass sie auf mehrere neben einander laufende Rechnungen mit gewöhnlichen zweigliedrigen complexen Zahlen hinauskommt, und hierin erblickt Herr Weierstrass den Sinn und die Berechtigung des bekannten Gauss'schen Ausspruchs. Eine andere Auffassung der Sache wird nun in der vorliegenden Abhandlung von Herrn Dedekind ausführlich entwickelt und begründet.

Man verstehe unter einer „Zahl" immer eine gewöhnliche zweigliedrige complexe Zahl. Die n^2 Zahlen $e_r^s (r, s = 1, 2, \dots, n)$ mögen der Bedingung genügen, dass die Determinante $|e_r^s|$ von Null verschieden ist, übrigens aber ganz beliebig angenommen werden. Das System der n Grössen $e_1, e_2, \dots, e_n$ soll nun insofern mehrdeutig sein, als es irgend eines der n Specialsysteme

$$e_1^s, e_2^s, \dots, e_n^s \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

repräsentiren soll. Diese Festsetzung ist so zu verstehen, dass jede Gleichung, welche ausser gewöhnlichen Zahlen noch die Zeichen $e_1, e_2, \dots, e_n$ enthält nur dann als gültig angesehen wird, wenn sie in eine wirkliche Gleichung übergeht, falls man für $e_1, e_2, \dots, e_n$ irgend eines der n Systeme $e_1^s, e_2^s, \dots, e_n^s$ einträgt. Eine jede Gleichung repräsentirt hiernach in Wirklichkeit n verschiedene Gleichungen. Betrachtet man n[illegible] Grössen der Form

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n,$$

wo die ξ alle möglichen Zahlenwerte annehmen [illegible] jede aus solchen Grössen gebildete Function φ [illegible] und nur einer Weise als eine eben solche Gr[illegible] werden. Damit nämlich

$$\varphi(x, \dots) = z_1 e_1 [illegible] + z_n e_n$$

wird, hat man $z_1, z_2, \dots, z_n$ aus [illegible] linearen [illegible]

zu bestimmen, welche aus der vorstehenden entstehen, wenn nach und nach für $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Systeme

$$e_1^s, e_2^s, \ldots, e_n^s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

eingetragen werden. Die getroffenen Bestimmungen begründen also in vollständig eindeutiger Weise die Rechnung in dem Gebiete der aus den n Grössen e zusammengesetzten Grössen x. Herr Dedekind beweist nun in der vorliegenden Abhandlung den schönen Satz, dass mit den so bestimmten Grössengebieten alle möglichen Gebiete erschöpft sind, in welchen die Rechnungsgesetze der gewöhnlichen Arithmetik gelten. Der Gauss'sche Ausspruch ist hiernach so zu deuten, dass die Einführung hypercomplexer Grossen darum keine wirkliche Bereicherung des gewöhnlichen Zahlengebietes darstellt, weil jene Grössen aufgefasst werden können als gewöhnliche mehrwertige Zahlen und letztere schon in denjenigen algebraischen Untersuchungen auftreten, welche sich in dem Gebiete der gewöhnlichen Zahlen bewegen.

Hz.

S. Dautheville. Étude sur les séries entières par rapport à plusieurs variables imaginaires indépendantes. Ann. de l'Éc. N. (3) II. Suppl. 3-59.

Der Inhalt dieser Abhandlung kann in vier Teile geteilt werden.

Der erste derselben (S. 3-10) enthält eine Einleitung, Definitionen und einige allgemeine functionentheoretische Entwickelungen, welche nichts Neues enthalten.

Der zweite Teil (S. 10-43) enthält im wesentlichen eine ausführliche Reproduction eines Teiles des Inhalts der zuerst im Jahre 1879 für einen kleineren Kreis veröffentlichten Abhandlung des Herrn Weierstrass: Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze. (Abgedruckt in: Abhandlungen aus der Functionenlehre von Karl Weierstrass. Berlin 1886 bei J. Springer.) In diesem Teile reproducirt der Herr Verfasser zugleich die Beweise einer grossen Zahl der in der angeführten Abhandlung von Herrn Weierstrass

bewiesenen Lehrsätze. Auf S. 43 Z. 5 v. o. ist statt un point singulier essentiel zu lesen un point singulier non essentiel.

Der dritte Teil (S. 43-51) hat zum Gegenstande eine gewisse Verallgemeinerung des Inhalts einer Abhandlung des Herrn Weierstrass: Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler. (Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880.)

Der letzte Teil (S. 51-59) ist einem Beweise des Satzes gewidmet: Jede eindeutige analytische Function von *n* Argumenten, für welche kein Wertsystem dieser Argumente ein wesentlich singuläres bildet, ist eine rationale Function ihrer Argumente. Der von dem Herrn Verfasser mitgeteilte Beweis besteht in einer Abänderung des von Herrn Hurwitz (Journal für Mathematik Band 95, Seite 201 ff.) für denselben Satz gegebenen Beweises und stützt sich auf einen von Herrn G. Cantor aufgestellten und bewiesenen Lehrsatz. Red.

N. W. Bugaieff. Die Grundlagen der Rechnung $Eq(x)$ mit einer unabhängigen Veränderlichen. I. Die Grundsätze der Rechnung $Eq(x)$. Mosk. math. Samml. XII 579-642. (Russisch.)

Mit dem Zeichen $Eq(x)$ bezeichnet der Verfasser den ganzen Teil einer Function und giebt einige Theoreme, welche die Bestimmung dieses ganzen Teiles erleichtern. Da diese Abhandlung nur den Anfang einer Arbeit enthält, die grösstenteils im Jahre 1886 erschienen ist, so wird darüber ausführlicher i[...] sten Jahrgang des Jahrbuchs referirt werden.

G. H. Halphen. Sur la convergence d'une fracti[...] tinue algébrique. C. R. C. 1451-1454.

Obwohl man über die allgemeinen Bedingungen d[...] vergenz der algebraischen Kettenbrüche nichts weiss, so [...] vereinzelte Beispiele (cf. z. B. Laguerre [...] F. VII [...] d. M. XI. 1879. 214 f.) auf tiefgreife[...] m d[...]

Beziehung zwischen ihnen und der Entwickelung in Potenzreihen hin. Von diesem Gesichtspunkt aus untersucht der Verfasser die Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{X} = a_1 + b_1 x + \cfrac{x^2}{a_2 + b_2 x + \cfrac{x^2}{a_3 + b_3 x + \cdots + \cfrac{x^2}{a_n + b_n x + \cdots}}}$$

oder

$$\sqrt{X} = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \cfrac{x^3}{\alpha_2 + \beta_2 x + \cfrac{x^3}{\alpha_3 + \beta_3 x + \cdots + \cfrac{x^3}{\alpha_n + \beta_n x + \cdots}}}$$

der Quadratwurzel eines Polynoms

$$X = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3$$

vom dritten Grade. Es zeigt sich hierbei nicht bloss, wie in dem Laguerre'schen Beispiel, dass der Kettenbruch convergiren kann, während die entsprechende Potenzreihe zu convergiren aufhört, sondern auch umgekehrt, dass es Werte der Variabeln geben kann, welche den Kettenbruch divergent machen, während für sie die Reihe convergent bleibt. T.

O. Stolz. Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerten, dass einige derselben constanten Werten sich nähern. Klein Ann. XXVI. 83-96.

Ausgehend von der Definition der gleichmässigen Convergenz für die Functionen von zwei Variabeln kann man den Begriff der gleichmässigen Convergenz für Functionen von beliebig vielen Veränderlichen feststellen. Es wird gezeigt, wie wichtig die Einführung dieses Begriffes ist für die exacte Darstellung einer Reihe von Sätzen aus der Theorie der Functionen reeller Variabeln. Zunächst handelt es sich um die Sätze für die Berechnung eines Integrales $\int_a^{a'} f(x, y)dx$ unter der Voraussetzung, dass die Function $f(x, y)$ innerhalb des Intervalls $a \leqq x \leqq a'$ bei

m $y = b + 0$ zu einem Grenzwert $\varphi(x)$ gleichmässig convergirt vergl. hierzu auch Dini, Fondamenti di calcolo integrale; Selivanoff, S. M. F. Bull. X., F. d. M. XIV. 1882. 215), dann um die Aufstellung der allgemeinen Formel zur Berechnung von Flächen und Körperinhalten. Endlich werden für die Theorie der Doppelintegrale die allgemeinen Bedingungen fixirt, unter welchen ein „eigentliches" Doppelintegral über eine Function $f(x, y)$, über ein bestimmtes Gebiet ausgedehnt, möglich ist, und unter welchen die Berechnung eines solchen Doppelintegrals durch zwei auf einander folgende Integrationen nach x und y geschehen kann.

Dk.

A. A. Markoff. Bestimmung einer Function, welche zwischen bestimmten Grenzen am mindesten von Null abweicht. Chark. Ges 1884 83-92. (Russisch)

Es wird die folgende Aufgabe gelöst: Man soll die Coefficienten $p_1, p_2, \dots, p_n$ einer ganzen Function von x:

$$y = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$$

so bestimmen, dass der grösste Zahlwert des Quotienten $\dfrac{y}{\sqrt{f(x)}}$, wo $f(x)$ eine gegebene ganze Function ist, deren Grad nicht $2n$ übersteigt, so klein wie möglich sei unter der Bedingung, dass x in den Grenzen -1 und $+1$ variirt. Diese Frage, eine von denen, mit welchen sich Herr Tschebyscheff (Sur les questions de minima 1858) beschäftigt hat, wird nach der Methode von Zolotareff (Anwendung der elliptischen Functionen u. s. w. Abhandl. der St. Petersb. Akademie 1877, siehe F. d. M. 1[illegible] [illegible]4), gelöst, indem der Verfasser die Differentialgleic[illegible] die Bestimmung der unbekannten Function y bildet.

L. Kraus. Grundzüge einer Theorie der rati[illegible] Functionen. Cas. XIV. pag. 49 (Böhmisch)

Vorliegende kurzgefasste, aber reich[illegible] [illegible]handlung b[illegible]

die III. Abteilung als Schluss eines längeren Aufsatzes, über welchen schon im Jahrbuch über die F. d. M. XV. 1883. 317 berichtet wurde. In derselben werden rationale Functionen einer Variabeln behandelt, acht Theoreme entwickelt und daraus drei Folgesätze, gemeinschaftliche Teiler betreffend, kurz abgeleitet.

Std.

E. Cesaro. Notes sur le calcul isobarique. Nouv. Ann. (3) IV. 59-78.

Der Herr Verfasser betrachtet das Resultat der wiederholten Anwendung der algorithmischen Operation $\overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$, und unter anderen die Anwendung auf

$$U_{p,m}(x) = \overset{m}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\cdot\frac{d^r u}{dx^r}\right),$$

wie in seiner früheren Note: „Dérivées des fonctions de fonctions", erweitert eine dort erhaltene Formel für die Derivation der Functionen von Functionen und giebt Anwendungen der allgemeinen Formel

$$\left(\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}\right)^p = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\overset{p}{\underset{p+i}{\mathrm{S}}}\left(\frac{1}{r!}\frac{d^r}{dx^r}\frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}}\right)\Delta x^i\right]$$

Alsdann wird die Wichtigkeit des „zusammengesetzten isobarischen Algorithmus" hervorgehoben, worunter eine Summe einfacher Algorithmen von demselben Gewicht aber von verschiedenen Graden verstanden wird. Hier wird auf die früheren Arbeiten von d'Ocagne in den Nouvelles Annales, von Trudi, Fergola, Torelli u. a. in Battaglini G. hingewiesen. Am Schluss werden die homogenen, aber nicht isobarischen zusammengesetzten Algorithmen betrachtet.

M.

G. Koenigs. Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 385-404.

Im vorigen Bande des Jahrbuches S. 377 haben wir die von Herrn Koenigs aufgestellte Function $B(z)$ vorgeführt. Sie ver-

schwindet für den Grenzpunkt $z = x$; dabei ist $B'(x) = 1$. Sie erfüllt die Gleichung

$$(\alpha) \qquad B\{\varphi(z)\} = \varphi'(x) B(z),$$

und es besteht der Satz, dass man in der Functionalgleichung

$$\Xi\{\varphi(z)\} = \varkappa \Xi(z)$$

die Constante $\varkappa$ so bestimmen kann, dass jede im Punkte x holomorphe oder meromorphe Lösung derselben nur durch einen constanten Factor sich von einer Potenz von $B(z)$ unterscheidet und zwar, wenn n der Exponent dieser Potenz ist, $\varkappa$ den Werth $[\varphi'(x)]^n$ hat.

Herr Koenigs ermittelt nun zunächst diejenigen Functionen $Z(z)$, welche, holomorph in x, diesen Punkt zum Grenzpunkt haben (sodass $Z(x) = x$ und mod. $Z'(x) < 1$ ist) und zu einer und derselben Function $B(z)$ führen. Gemäss der Relation (α) befinden sie sich unter den Functionen $Z(z, k)$, welche die Gleichung

$$(\lambda) \qquad B(Z) = k B(z)$$

erfüllen, wo k eine beliebige Constante ist. Und zwar sind die Functionen $B(z, k)$, in welchen mod. $k < 1$ ist, und nur sie die gesuchten.

Zwei Functionen $Z(z, k)$ und $Z(z, k')$ genügen der Relation

$$(\text{a}) \qquad Z[Z(z, k'), k] = Z(z, kk').$$

Es ist also

$$Z[Z(z, k), k'] = Z[Z(z, k'), k],$$

d. h. zwei Functionen Z besitzen die durch die Gleichung

$$(\text{G}) \qquad \Xi\{\varphi(z)\} = \varphi\{\Xi(z)\}$$

ausgedrückte Eigenschaft.

Bei Untersuchung der Functionen $Z(z, k)$ spielen die Curven, längs welchen der Modul oder das Argument von $B(z)$ const ist, eine Rolle. Zur Curve mod. $B(z) = \mu$ gehört bei hinlän kleinem μ ein den Punkt x umschliessendes Oval O_μ, inne dessen die Gleichung (λ) im Falle, dass mod. $k < 1$ ist, eine nur eine Wurzel Z innerhalb O_μ besitzt. Als Function von diese Wurzel Z, welche mit der oben definirten Function Z(übereinstimmt, holomorph innerhalb O_μ.

Aus (a) folgt die iterative Gleichung

$$Z_\nu(z, k) = Z(z, k^\nu).$$

Man erkennt daraus, dass die iterative Gleichung

$$\Xi_p(z) = \varphi(z),$$

im Falle dass $\varphi(z)$ eine Function $Z(z, k_0)$ ist, p im Grenzpunkte x derjenigen Functionen $Z(z, k)$, wofür mod. $k < 1$ ist, holomorphe Lösungen

$$\Xi(z) = Z(z, \sqrt[p]{k_0})$$

zulässt. Es gehört aber eine gegebene Function $\varphi(z)$ zu einer Gruppe von Z-Functionen jedesmal, wenn die Gleichung $\varphi(z) - z = 0$ eine Wurzel hat, wofür $\varphi'(z)$ weder 0 noch 1 ist. Und zwar hat man $k_0 = \varphi'(x)$.

Die Functionen

$$\varphi_\omega(z) = Z(z, [\varphi'(x)]^\omega),$$

worin ω beliebig ist, lösen die von Herrn Korkine in Darb. Bull. (2) VI. p. 228-232 (1882) gestellte und mittels unbestimmter Coefficienten behandelte Aufgabe, zu einer vorgelegten Function $\varphi(z)$ eine Function $\varphi_\omega(z)$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$\varphi_\omega(z) . \varphi_{\omega'}(z) = \varphi_{\omega'+\omega}(z)$$

genügt und für positive ganzzahlige Werte von ω mit dem iterativen Symbol $\varphi_p(z)$ übereinstimmt.

Eine Verallgemeinerung von (G) ist die Gleichung

$$\Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)].$$

Unter einer gewissen Bedingung hat sie nicht bloss ein, sondern unendlich viele holomorphe Integrale, deren Untersuchung zur Aufstellung von vier Gruppen von Functionen führt, welche sich unter einander vertauschen, wenn man in einer von ihnen das Argument z durch eine der Functionen ersetzt.

Einige einfache Beispiele dienen zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen. St.

G. Koenigs. Sur les conditions d'holomorphisme des intégrales de l'équation itérative, et de quelques autres équations fonctionnelles. C. R. CI. 1137-1140

Die kurze Notiz knüpft an andere Arbeiten desselben Verfassers (C. R. décembre 1884, Annales de l'Éc. Norm., Supplément pour l'année 1884) an. Es handelt sich um die Lösungen der Gleichungen

$$\Xi[\varphi(z)] = \varphi[\Xi(z)],$$
$$\Xi_p(z) = \varphi(z),$$
$$\Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)],$$

wobei $\varphi(z)$, $\psi(z)$ gegebene, $\Xi(z)$ eine zu findende Function bezeichnet. $\Xi_p(z)$ bedeutet die p-mal iterirte Function $\Xi(z)$. (Vergl. das vorstehende Referat.) Hz.

E. Goursat. Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Ann. de l'Éc. Norm (3) II. 255-288

Siehe Abschn. VI. Cap. 2. p. 245.

E. Picard. Sur les intégrales de différentielles totales. C. R. C. 843-845.

Der Verfasser hat C. R. IC. (F. d. M. XVI. 1884. 293) Integrale erster Gattung

$$\int (P dx + Q dy)$$

definirt als solche, die bei unbegrenzter Variation von x und y endlich bleiben. Unter denjenigen, welche auch unendlich werden, definirt er jetzt eine zweite Gattung und knüpft einige Betrachtungen daran (vergl. oben p. 332-336).

E. Picard. Sur les intégrales de différentielle[s] algébriques de première espèce. Jordan J. (4) I.

E. Picard. Sur les intégrales de différentielles de seconde espèce. C. R. CI. 731-736.

Siehe Abschn. VI. Cap. 5. p. 332.

C. Veneziani. Extrait d'une lettre de M. Hermite. Newcomb Am. J. VII. 168-169.

In dem Briefe sowie in den folgenden Noten handelt es sich um den Beweis des Satzes, wann eine holomorphe Function ein ganzes Polynom vom Grade $n-1$ ist. M.

G. Vivanti. Sulle funzioni intere trascendenti. Batt. G. XXIII. 86-122.

Gegenstand der Arbeit ist die Analogie zwischen den ganzen transcendenten und den ganzen rationalen Functionen; es wird untersucht, welche Fundamentaltheoreme der letzteren auch für die transcendenten Functionen bestehen bleiben, ferner welche für die letzteren modificirt werden müssen, und endlich, ob sich gewisse verschiedene Charaktere für die ganzen transcendenten Functionen ergeben, die auf die Klassification dieser Functionen führen. Es kann diese Arbeit als eine Erweiterung der in Bd. XXII. dess. Journals veröffentlichten angesehen werden, weshalb wir auf das Referat F. d. M. XVI. 1884. 389 verweisen. Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit wird die Veränderung der ganzen Functionen durch ganze lineare Substitutionen untersucht. Gegenstand der beiden folgenden Paragraphen ist das Studium der Eigenschaften einer besonderen Art von ganzen Functionen, und im letzten Paragraphen werden Theoreme entwickelt, welche Beziehungen zwischen den Null-Stellen einer ganzen Function und denen ihrer Derivirten betreffen.

M.

A. Witting. Ueber die Lage der Verschwindungspunkte einer ganzen Function. Schlömilch Z. XXX. 274-278.

Geometrischer und rein algebraischer Beweis des Satzes: „Besitzt die ganze transcendente Function:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^k}{ka_n^k}}$$

[...]ur reelle Wurzelpunkte, so verschwindet auch ihre Ableitung [n]ur auf der reellen Axe". Es ist dies in strengerer Fassung derselbe Satz, der von F. Lucas (C. R. LXXXIX. 224: „Sur une application de la mécanique rationnelle à la théorie des équations") bewiesen ist, und der sich bei Gauss (Werke III. S. 112) findet.

M.

[...]O Tognoli. Le funzioni algebriche studiate geometricamente (continuazione). Batt. G. XXIII 247-262, 345-365.

Der Verfasser beabsichtigt, wie schon in dem Referat über [de]n ersten Teil dieser grossen Abhandlung bemerkt wurde (F. d. M. XVI 1884. 360), eine neue ausführliche Darstellung jener alge[b]raischen Untersuchungen zu geben, welche sich an die Namen [Brill] und Nöther knüpfen. Die Hauptgegenstände, mit welchen [s]ich die vorliegenden, die Abhandlung abschliessenden Teile beschäftigen, sind: das Problem der Specialgruppen und die Rie[m]ann'sche Theorie der Klassen algebraischer Functionen und [ih]rer Moduln. Den Schluss bilden einige besondere Anwendungen der entwickelten allgemeinen Sätze.

Hz.

T. J. Stieltjes. Sur une fonction uniforme. C. R. CI 153-154.

Ch. Hermite. Note au sujet de la communication de M. Stieltjes „sur une fonction uniforme." C. R. CI 112-115.

Riemann hat in seiner Arbeit über die Freq[uenz der] Primzahlen gezeigt, dass die Function $\zeta(s)$, welche [...] von s, deren reeller Bestandteil grösser als 1 is[t ...] durch die Gleichung

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

in der ganzen complexen Zahlenebene eindeutig und [...] ausgenommen für $s = 1$, wo sie [unendlich] wird, d[...]

$$\lim_{s=1} (s-1)\zeta[...]$$

ist. Die Function $\zeta(z)$ verschwindet für die Werte

$$z = -2,\ -4,\ -6,\ \ldots$$

und für eine unendliche Reihe anderer, imaginärer Werte von z. Riemann hat die Vermutung ausgesprochen, dass diese letzteren Nullstellen von $\zeta(z)$ sämtlich die Form $\frac{1}{2} + ai$ besitzen, unter a eine reelle Grösse verstanden. Herr Stieltjes giebt nun in der vorliegenden Note den Weg an, auf welchem er zu einem Beweise des von Riemann vermuteten Satzes gelangt ist. Bekanntlich ist nach Euler

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = 1 - \frac{1}{2^z} - \frac{1}{3^z} - \frac{1}{5^z} + \frac{1}{6^z} - \cdots,$$

wo das Product über alle Primzahlen auszudehnen ist. Herr Stieltjes sagt nun, eine eingehende Untersuchung der auf der rechten Seite auftretenden Reihe ergebe, dass dieselbe für alle Werte von z, deren reeller Bestandteil grösser ist als $\frac{1}{2}$, convergire und zugleich den Wert der Function $\frac{1}{\zeta(z)}$ darstelle. In Verbindung mit der Riemann'schen Relation zwischen $\zeta(z)$ und $\zeta(1-z)$ ergiebt sich dann hieraus, dass $\zeta(z)$ ausser für $z = -2,\ -4, \ldots$ nur noch für Werte von z, deren reeller Bestandteil gleich $\frac{1}{2}$ ist, verschwinden kann.

Herr Hermite giebt in seiner Zusatz-Note einen neuen Beweis für die oben erwähnten Riemann'schen Sätze, betreffend den analytischen Charakter der Function $\zeta(s)$. Hermite geht aus von der Gleichung

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\omega} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\omega}^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1},$$

wo ω eine positive Grösse bedeutet, welche kleiner als 2π angenommen wird. Es ergiebt sich nun, dass jeder der beiden Bestandteile, als deren Summe hier $\zeta(s)$ dargestellt ist, für sich eine einwertige Function von s vorstellt; dass ferner $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$

für alle Werte von s endlich bleibt, dass $\zeta(s)$ für $s = -2, -4, \dots$ verschwindet und dass endlich die Gleichung

$$\zeta(-2n+1) = (-1)^n \cdot \frac{B_n}{2n}$$

besteht, unter B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl verstanden.

Hz.

E. Papperitz. Ueber verwandte s-Functionen. Klein Ann. XXV. 212-221; XXVI. 97-105.

Unter einer s-Function versteht der Verfasser den Quotienten zweier unabhängigen Zweige einer Riemann'schen P-Function. Da die P-Function im wesentlichen mit der durch die hypergeometrische Reihe dargestellten Function übereinstimmt, so muss jede Eigenschaft der letzteren sich auf die erstere und also auch auf die s-Function übertragen lassen. Die vorliegende Arbeit behandelt insbesondere die Frage, was den von Gauss für die hypergeometrische Reihe aufgestellten „relationes inter functiones contiguas" in der Theorie der s-Functionen entspricht. Zunächst: was hat man unter verwandten (contiguen) s-Functionen zu verstehen?

Die s-Function verzweigt sich für drei Werte a, b, c der unabhängigen Variabeln z, und zu jedem dieser Werte gehört ein Zweig der Function, welcher nach Multiplication mit einer Potenz $(z-a)^\lambda$, bez. $(z-b)^\mu$, bez. $(z-c)^\nu$ eine für die Stelle a, bez. b, bez. c eindeutige endliche und von Null verschiedene Function vorstellt. Gehören zu einer s-Function die Exponenten λ, μ, ν, zu einer zweiten die Exponenten λ', μ', ν', so heissen beide Functionen verwandt, wenn sie dieselben Verzweigungswerte besitzen und die Differenzen $\lambda-\lambda', \mu-\mu', \nu-\nu'$ drei ganze Zahlen sind, deren Summe gerade ist. Der Satz, welcher nun den Gauss'schen Relationen entspricht, lautet: „Zwischen je [illegible] verwandten s-Functionen findet eine quadrilineare Relation [illegible] ganzen Functionen von z als Coefficienten statt".

In der zweiten Mitteilung wird dieser Satz auf ein besonder[illegible] Beispiel angewandt und sodann dadurch [illegible] dass a[illegible]

Stelle der s-Functionen Quotienten von hypergeometrischen Reihen eingeführt werden. Dadurch entstehen Relationen, welche hervortreten lassen, dass der vom Verfasser gefundene Satz wirklich den Gauss'schen „relationes inter functiones contiguas" entspricht. Hz.

G. Dillner. Om inversionen af en algebraisk integral såsom uttryck för roten til en algebraisk equation. II. Stockh. Öfv. XLII. No. 4. 3-14.

Der Verfasser verfolgt hier die in einer früheren Abhandlung mit dem nämlichen Titel (F. d. M. XV. 1883. 328) begonnenen Untersuchungen. Er will zeigen, wie die analytischen Eigenschaften der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit Hülfe der Inversionen gewisser Integrale gefunden werden können, und wie umgekehrt die Eigenschaften dieser Inversionen mittels der Wurzeln bestimmt werden. Zuletzt werden auch Untersuchungen angestellt über die Potenzreihen, welche durch Entwickelung der Inversionen erhalten werden. E.

E. Goursat. Démonstration du théorème de Cauchy. Stockh. Vet. Akad., Bihang IX. 6 S.

Diese Note ist auch in den Acta Mathematica IV. S. 197-200 publicirt. Siehe F. d. M. XVI. 1884. 366. E.

C. Runge. Zur Theorie der analytischen F[illegible] Acta Math. VI. 245-248.

Nach einem Satze von Herrn Weierstrass st[illegible] von Potenzreihen in einem Gebiete, in welchem s[illegible] convergent ist, eine monogene analytische Funct[illegible] Runge zeigt nun an einem Beispiel, dass die gleic[illegible] vergenz einer solchen Summe ni[illegible] irgend welchen Linien des Gebiet[illegible]

umme dennoch überall convergirt und eine monogene analytische unction darstellt.

Das Beispiel besteht in einer Summe von rationalen ganzen unctionen, welche für jeden endlichen Wert von x convergirt nd eine monogene analytische Function, nämlich den constanten Wert Null, darstellt. Diese Summe convergirt dabei ungleichmässig längs des positiven Teiles der imaginären Axe.

Hz.

Runge. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Acta Math. VI. 229-244.

In der vorliegenden Abhandlung wird der Satz bewiesen, dass das Gebiet der regulären und ausserwesentlich singulären Stellen iner eindeutigen analytischen Function keiner anderen Beschränkung unterliegt, als in sich zusammenhängend zu sein. Der Verfasser zeigt nämlich, dass zu jedem in sich zusammenhängenden, übrigens beliebigen Gebiete zugehörige Functionen construirt werden können. Letzteres Resultat ist freilich schon in einer Abhandlung Mittag-Leffler's enthalten, jedoch sind die Entwickelungen des Herrn Runge unabhängig entstanden und sowohl wegen ihrer Eleganz als auch wegen der beiden an sich interessanten und wichtigen Hülfssätze bemerkenswert. Der erste Hülfssatz lautet so:

„Ist B ein endliches aus einer endlichen Anzahl endlich-fach zusammenhängender Stücke bestehendes Gebiet, auf welchem (d. h. in dessen Innern und auf dessen Rande) eine im übrigen beliebige analytische Function $f(x)$ sich regulär verhält, und ist C ... Gebiet, so giebt es eine rationale Function
... n $f(x)$, und auf C beliebig
... ang des Beweises ist
... n $f(x)$, ebenfalls re-
... en das Gebiet C

wenn x auf B liegt und das Integral über die Begrenzung von B' erstreckt wird. Liegt x ausserhalb B', also z. B. auf C, so ist der Wert desselben Integrals gleich Null. Nun ist letzteres, nach der Erklärung eines complexen Integrales, gleich dem Grenzwert der Function

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_\mu \frac{f(z_\mu)}{z_\mu - x}(z_\mu - z_{\mu-1}), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

unter $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda$ Stellen verstanden, welche auf der Begrenzung von B' liegen. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass diese Function $R(x)$ „gleichmässig" gegen den Wert des Integrales convergirt, d. h. dass $R(x)$ für einen genügend grossen Wert von λ eine rationale Function von der im Satze genannten Beschaffenheit vorstellt. Da ein unendliches Gebiet durch eine lineare Transformation in ein endliches übergeführt werden kann, so darf die Beschränkung, B sei endlich, fallen gelassen werden. Nun gelingt es dem Verfasser leicht, eine rationale Function $P_\nu(x)$ herzustellen, welche sich von einer gegebenen eindeutigen Function $f(x)$, im ganzen Gebiete des regulären und ausserwesentlich singulären Verhaltens der letzteren, um beliebig wenig, etwa um weniger als $\frac{1}{\nu}$, unterscheidet. Es ist dann

$$f(x) = \lim_{\nu=\infty} P_\nu(x),$$

oder was dasselbe

$$f(x) = P_1(x) + \sum_1^\infty \nu[P_{\nu+1}(x) - P_\nu(x)],$$

also $f(x)$ in ihrem ganzen Gültigkeitsbereiche dargestellt als Summe von rationalen Functionen. Die letzteren werden aber noch an Stellen unendlich, an welchen sich $f(x)$ regulär verhält. Zur Abstellung dieses Uebelstandes dient der folgende Hülfssatz:

„Liegen x_1 und x_2 im Innern eines zusammenhängenden Gebietes und ist eine rationale Function $R(x)$ gegeben, welche nur in x_1 unendlich wird, so kann man eine andere rationale Function bilden, welche nur in x_2 unendlich wird und für alle Werte von x ausserhalb jenes Gebietes beliebig genau mit $R(x)$ übereinstimmt."

Infolge dieses Satzes können die rationalen Functionen, als deren Summe $f(x)$ dargestellt ist, ersetzt werden durch andere rationale Functionen, deren Unstetigkeitsstellen ausserwesentlich singuläre Stellen von $f(x)$ sind.

Mit Hülfe der entwickelten Principien bildet nun (im § 2) der Verfasser eine unendliche Summe von rationalen Functionen, welche in einem zusammenhängenden, endlichen, übrigens beliebigen Gebiete A gleichmässig convergirt und an der Grenze von A überall unstetig ist, nämlich in jeder Nähe einer an der Grenze liegenden Stelle sowohl dem Werte 0 als dem Werte 1 beliebig nahe kommt. Jene Summe stellt daher eine in dem Gebiete A eindeutige und über dieses Gebiet nicht fortsetzbare analytische Function dar, womit das vom Verfasser erstrebte Ziel rreicht ist. Hz.

. Appell. Application du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Ann. d. l'Éc. Norm. (3) II. 67-74.

lerr Appell giebt hier eine neue und interessante Anung des Mittag-Leffler'schen Theorems, bei welcher die der ganzen Functionen, welche zur Herstellung der Conz dienen, in's Unendliche wachsen. Die Functionen $F(x)$, en Darstellung es sich handelt, sind Quotienten von ϑ-Producten und lassen sich analytisch dadurch definiren, dass sie im Endlichen nur ausserwesentlich singuläre Stellen besitzen und den Functionalgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x+2K) = F(x), \\ F(x+2iK') = \lambda e^{-\frac{\mu\pi x}{K}} F(x) \end{cases}$$

genügen. Hier bedeuten $2K$, $2iK'$ die Perioden, λ eine Constante und μ eine positive ganze Zahl. Ist α eine Unstetigkeitsstelle von $F(x)$, A das zugehörige Residuum, so ist auch jede congruente Stelle

$$(2)\qquad \alpha+2mK+2niK' \qquad (m \text{ und } n \text{ ganze Zahlen})$$

eine Unstetigkeitsstelle und

$$A\lambda^n e^{\mu\frac{n\pi i\alpha}{K}} q^{\mu n(n-1)} \qquad \left(q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}\right)$$

das zugehörige Residuum.

Es wird nun zunächst folgende Aufgabe gelöst: Sei

$$\varphi_n(x) = \lambda^n e^{-\mu\frac{n\pi i\alpha}{K}} q^{\mu n(n-1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK'),$$

wo n irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Es soll eine eindeutige Function $\Phi(x)$ bestimmt werden, welche nur an den Stellen (2) und zwar so unstetig wird, dass

$$\Phi(x)-\varphi_n(x)$$

stetig bleibt.

Eine Function der verlangten Beschaffenheit wird nach der Methode von Mittag-Leffler dargestellt durch die Summe:

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n[\varphi_n(x) - g_n(x)],$$

unter $g_n(x)$ geeignete ganze Functionen von $\sin\frac{x\pi}{K}$ und $\cos\frac{x\pi}{K}$ verstanden. Herr Appell zeigt nun, dass die Functionen $g_n(x)$ der Gleichung

$$\varphi_n(x) - g_n(x) = \lambda^n e^{-\mu\frac{n\pi i\alpha}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cot\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK')$$

gemäss gewählt werden können, so dass

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \lambda^n e^{-\mu\frac{n\pi i\alpha}{K}} q^{\mu n(n+1)} \cos\frac{\pi}{2K}(x-\alpha-2niK')$$

wird. Betrachtet man jetzt die Differenz

$$F(x) - \frac{A\pi}{2K}\Phi(x),$$

so stellt dieselbe offenbar eine Function vor, welche an der Stelle α und an den congruenten Stellen nicht mehr unstetig wird. Daher ist

$$F(x) = \frac{\pi}{2K}\Sigma A\,\Phi(x) + G(x),$$

wo das Summationszeichen sich auf die verschiedenen incongruenten

Unstetigkeitsstellen von $F(x)$ bezieht und $G(x)$ eine (transcendente) ganze Function von x bezeichnet. Da letztere den Gleichungen (1) genügen muss, so lässt sie sich bekanntlich als lineare Function mit constanten Coefficienten von μ ϑ-Functionen darstellen.

Der Fall, in welchem die Zahl μ in den Gleichungen (1) nicht eine positive, sondern eine negative ganze Zahl bedeutet, bietet weniger Interesse dar, da in diesem Falle die Summe $\Sigma\varphi_\nu(x)$ für sich convergirt, also die Bestimmung der ganzen Functionen $g_\nu(x)$ fortfällt. Schliesslich mache ich noch auf zwei Abhandlungen desselben Verfassers aufmerksam, welche in den Annales de l'École Normale (1884 und 1885) erschienen sind und welche sich auf dieselben Functionen beziehen. (F. d. M. XVI. 1884. 383 und dieser Band p. 409). Hz.

G. Mittag-Leffler. Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. Liège Mém. (2) XI. 11 S.

Directer Beweis, der nicht das Cauchy'sche Theorem über die bestimmten imaginären Integrale zur Hülfe nimmt, sondern sich auf ein Princip stützt, welches implicite in der berühmten Abhandlung von Weierstrass enthalten ist: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen." Mn. (Lp.)

O. Rausenberger. Ueber eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden. III. Klein Ann. XXV. 222-235.

In den Bänden XX. u. XXI. der Math. Ann. (vgl. F. d. M. XIV. 1882. 348, XV. 1883. 354) hat der Verfasser diejenigen Gruppen reeller linearer Transformationen einer Veränderlichen eingehend untersucht, welche aus der Combination zweier Substitutionen

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{x+b}$$

entstehen. Hier werden die aus den Substitutionen

$$y = p(x), \; |p| < 1 \quad \text{und} \quad y = \varphi_1(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

entstehenden Periodicitätsgruppen untersucht. Schliesst man früher behandelte Fälle aus, so kann die zweite Substitution in der Normalform:

$$y = \varphi_1(x) = 1 - \frac{a}{x-b},$$

wobei

$$|p^{\frac{1}{2}}| < |b| < 1$$

ist, angenommen werden. Betrachtet man nun wieder nur reelle Substitutionen, so stellt für reelles positives p und reelle a, b $\varphi_1(x)$ eine elliptische, parabolische, hyperbolische Substitution vor, je nachdem $4a \gtreqless (1-b)^2$, und ebenso lässt sich leicht der Charakter der combinirten Substitutionen $\varphi_1(p^k x)$ angeben. Die Gesamtheit aller entstehenden Periodicitätsgruppen lässt sich hiernach in drei sofort zu unterscheidende Hauptfälle trennen, je nachdem alle auftretenden Perioden hyperbolisch sind, oder eine Gattung von elliptischen (bez. parabolischen) Perioden auftritt, oder endlich zwei Gattungen von elliptischen (bez. parabolischen) Perioden, die nach m- und $n$maliger Iteration zum Ausgangswerte zurückführen, vorhanden sind, während alle übrigen Perioden hyperbolisch sind. Besonders der letzte Fall findet für $a > 0$ und $b < 0$ eine eingehende analytische und geometrische Discussion, insbesondere für die der Gruppe entsprechenden Gebietseinteilungen der Ebene. Dk.

Bukreieff. Analytische Ausdrücke der eindeutigen Functionen. Kiew Nachr. 1884. (Russisch.)

Die Arbeit enthält eine Zusammenstellung der Resultate, welche von Weierstrass, Mittag-Leffler, Hermite u. a. in der Theorie der analytischen Darstellungen eindeutiger Functionen gewonnen sind. Wi.

K. Weierstrass. Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Berl. Ber. 633-640, 789-806.

Die Grundlage für die vorliegenden Untersuchungen bildet der folgende Satz: „Es sei $f(x)$ eine für jeden reellen Wert der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat. Ferner bedeute $\psi(x)$ eine Function von derselben Beschaffenheit, welche überdies ihr Zeichen nicht ändert, der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt und der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\omega = \int_0^\infty \psi(x) dx$$

einen endlichen Wert hat. Setzt man dann, unter k eine willkürliche positive Grösse verstehend,

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

so ist

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} F(x, k) = f(x).\text{“}$$

Man kann nun (wie Herr Weierstrass auf den ersten vier Seiten der zweiten Mitteilung ausführlich nachweist) $\psi(x)$ so wählen, dass $F(x, k)$ eine transcendente ganze Function von x wird. Bezeichnet man die Summe der ersten n Glieder der Entwickelung von $F(x, k)$ nach aufsteigenden Potenzen von x mit $G(x)$ und vergleicht den Wert von $G(x)$ mit dem von $f(x)$, so ergiebt sich folgender Satz:

„Ist $f(x)$ eine Function von der angegebenen Beschaffenheit, und wird die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine ganze rationale Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Intervalle sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass die Differenz $f(x) - G(x)$ ihrem absoluten Betrage nach beständig kleiner als g ist.“

Seien nun $a_1, a_2, \ldots; g_1, g_2, \ldots$ zwei unendliche Reihen positiver Grössen, so beschaffen, dass $\lim a_n = \infty$ und $\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} g_\nu$ endlich ist, so kann man vorstehendem Satze zufolge eine Reihe ganzer

Functionen

$$G_1(x),\ G_2(x), \ldots$$

bestimmen von der Eigenschaft, dass

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu$$

ist, falls x dem Intervalle $(-a_\nu \ldots a_\nu)$ angehört. Hiernach wird

$$\lim_{\nu = \infty} G_\nu(x) = f(x)$$

sein, und wenn also

$$f_0(x) = G_1(x), \quad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird, so ist

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots.$$

Aus den über die Grössen a_ν und g_ν gemachten Voraussetzungen folgt aber leicht, dass die unendliche Summe, durch welche $f(x)$ dargestellt ist, in jedem endlichen Intervalle unbedingt und gleichmässig convergirt. Man hat also folgenden Satz:

„Jede Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise darstellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jeden endlichen Wert von x, und gleichmässig in jedem Intervalle, dessen Grenzen endliche Grössen sind."

In betreff des ersten, oben angeführten Satzes ist zu bemerken, dass die Abhängigkeit der Function $G(x)$ von der positiven Grösse k nicht genügend leicht übersehen werden kann. Um diesem Uebelstande zu begegnen, entwickelt Herr Weierstrass (in der zweiten Mitteilung) die Function $F(x, k)$ in eine nach den Kugelfunctionen $P^{(0)}(x)$, $P^{(1)}(x), \ldots$ fortschreitende Reihe. Es ergiebt sich

$$F(x, k) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, \varphi_\nu(k) P^{(\nu)}(x),$$

wenn

$$\varphi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\, \psi(u)\, du$$

und

$$f_\nu(u) = \frac{2\nu + 1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x' + u) P^{(\nu)}(x')\, dx'$$

gesetzt wird. Nun kann die Function $G(x)$ gleich $\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, \varphi_{\nu}(k) F^{(\nu)}(x)$ gewählt werden, und von den Coefficienten $\varphi_{\nu}(k)$ lässt sich zeigen, dass sie stetige Functionen von k sind, und dass es für jeden einzelnen Coefficienten eine Grenze giebt, welche sein absoluter Betrag für keinen Wert von k überschreitet. Da in dem in Rede stehenden Satze die Veränderliche x auf ein endliches Intervall beschränkt wurde, so ist klar, dass der Satz auch noch gilt, wenn von der Function $f(x)$ nur vorausgesetzt wird, dass sie für jeden endlichen reellen Wert von x einen bestimmten endlichen und mit x sich stetig ändernden Wert habe.

Besitzt die Function $f(x)$ die reelle Periode $2c$, so wird $F(x, k)$ dieselbe Periode haben und folglich in eine für alle complexen Werte von x convergirende Fourier'sche Reihe entwickelbar sein. Diese Entwickelung lautet folgendermassen:

$$F(x, k) = A_0 + 2 \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\, \varphi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) \left\{ A_n \cos \frac{n\pi}{c} x + A_n' \sin \frac{n\pi}{c} x \right\},$$

wobei

$$\varphi(v) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{-uvi} du,$$

$$A_n = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} f(x') \cos \frac{n\pi}{c} x' dx',$$

$$A_n' = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} f(x') \sin \frac{n\pi}{c} x' dx'$$

gesetzt ist. Bildet man die Summe der ersten n Glieder dieser Fourier'schen Reihe und vergleicht damit den Wert von $f(x)$, so erhält man den Satz:

„Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Wert von x eindeutig definirte, durchweg stetige und reell-periodische Function, so lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g auf mannigfaltige Weise eine endliche Fourier'sche Reihe herstellen, welche sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der Unterschied zwischen beiden Functionen für keinen Wert von x mehr als g beträgt."

Aus diesem Satze folgt nun durch ein ähnliches Verfahren, wie es schon oben angewandt wurde, der folgende Satz:

„Jede Function $f(x)$ von der soeben angegebenen Beschaffenheit lässt sich, wenn $2c$ die primitive Periode derselben ist, darstellen in der Form einer Summe, deren Glieder sämtlich endliche Fourier'sche Reihen mit der Periode $2c$ sind. Diese Reihe convergirt unbedingt für jeden Wert von x und gleichmässig in jedem endlichen Intervalle."

Aus der Entwickelung von $F(x, k)$ ergiebt sich noch folgende Darstellung dieser Function:

$$F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi;\ \frac{k\pi}{c}\right)dx',$$

wo

$$\chi(x,v) = 1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\varphi(nv)\cos nx$$

zu setzen ist. Die besondere Annahme $\psi(x) = e^{-x^2}$ liefert eine schon in Fourier's Théorie analytique de la chaleur vorkommende Formel. Schliesslich wird noch eine bemerkenswerte allgemeine Darstellung einer willkürlichen periodischen Function $f(x)$ erhalten, wenn man in dem für $F(x, k)$ gefundenen Integrale die Grösse k dadurch zum Verschwinden bringt, dass man

$$k = \frac{c}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{n\log(n+1)}}{n+1}$$

setzt und die ganze Zahl n in's Unendliche wachsen lässt.

Hz.

S. Pincherle. Sopra una formola del sig. Hermite.

Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 267-269.

Herr Weierstrass hat in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1880 gezeigt, dass man eine Summe von rationalen Functionen einer complexen Veränderlichen bilden kann, welche in verschiedenen Gebieten der complexen Zahlenebene beliebig vorgegebene Functionen darstellt. Einen Ausdruck derselben Beschaffenheit, welcher aber die Gestalt eines bestimmten Integrales

besitzt, hat Herr Hermite (Kronecker J. XCI.) aufgestellt. Dabei sind die Gebiete der Zahlenebene durch Parallelen zur Axe der imaginären Zahlen begrenzt. Herr Pincherle bemerkt, dass man einen ähnlichen Ausdruck unmittelbar aus dem Satze von Cauchy erhält, wobei die Gebiete durch concentrische Kreise begrenzt werden. Es seien nämlich n der Grösse nach aufeinander folgende Kreise mit dem Mittelpunkte $z = 0$ gegeben; ferner seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ Stellen, welche auf der ersten, zweiten, ..., n^{ten} Kreisperipherie liegen, $C_0, C_1, \dots, C_n$ willkürliche Constante, endlich z eine complexe Veränderliche. Dann hat offenbar der Ausdruck

$$J(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{C_0}{ze^{i\theta}} + \frac{C_1 - C_0}{ze^{i\theta} - a_1} + \cdots + \frac{C_n - C_{n-1}}{ze^{i\theta} - a_n}\right) ze^{i\theta}\, d\theta$$

den Wert C_0 oder C_h oder C_n, je nachdem der Punkt z im Innern des ersten Kreises oder zwischen dem h^{ten} und $(h+1)^{\text{sten}}$ Kreise oder ausserhalb des n^{ten} Kreises liegt. Mit Hülfe dieses Ausdruckes ist es nun leicht, einen anderen zu bilden, welcher in den verschiedenen Gebieten nicht mehr einen constanten Wert, sondern beliebig vorgeschriebene Functionen darstellt. Auch können durch eine Transformation von z die von Kreisen begrenzten Gebiete in beliebig begrenzte übergeführt werden.

Hz.

G. Dillner. Sur le développement d'une fonction analytique pour un contour de convergence qui renferme des infinis uniformes comme seuls points critiques. Upsala. Vetensk. soc. Acta XII. 22 S.

Der Verfasser hat schon im Jahre 1871 in der schwedischen „Tidskrift för Mathematik och Fysik“ Untersuchungen über die Entwickelung analytischer Functionen angestellt, wenn die Convergenzcurve ein Kreis ist, der nur unwesentlich singuläre Punkte beliebiger Ordnung umschliesst. In der vorliegenden Arbeit will er diesen Untersuchungen eine allgemeinere Form geben, so dass sie für eine beliebige Convergenzcurve gelten.

E.

A. Harnack. Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales. Leipz. Ber 379-398

Siehe Abschn. VI. Cap. 3. p. 261.

A. Tonelli. Il teorema di Cauchy per le funzioni a più valori. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 785-790.

Es sei eine über der z-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche gegeben und auf dieser ein Gebiet C abgegrenzt. Ferner möge w irgend eine in dem Gebiete C stetige und eindeutige Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche bedeuten. Dann ist nach Cauchy's Satz:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w}{z-z'}\,dz,$$

wo das Integral über die Gesamtbegrenzung des Gebietes C zu erstrecken ist, und $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die Werte der Function w an denjenigen Stellen des Gebietes C bezeichnen, an welchen z den besonderen Wert z' annimmt. Diese letzteren Stellen können teilweise (in Verzweigungspunkten der Riemann'schen Fläche) zusammenfallen. — Nach demselben Satze ist nun auch

$$w_1^k + w_2^k + \cdots + w_n^k = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w^k}{z-z'}\,dz,$$

wobei der Potenzexponent k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Es sind folglich die Werte $w_1, w_2, \ldots, w_n$ Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten sich ganz und rational aus den Integralen $\int \frac{w^k}{z-z'}\,dz$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zusammensetzen. Ist n gleich der Zahl der Blätter und w eine eindeutige algebraische Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche, so wird, der letzten Gleichung zufolge, das Integral $\int \frac{w^k}{z-z'}\,dz$ eine rationale Function von z' sein. Der Verfasser verwendet die erhaltenen Resultate noch zu dem Beweise des Satzes, dass eine nicht überall constante eindeutige Function des Ortes

auf der Riemann'schen Fläche notwendig an einer Stelle unstetig wird. Hz.

Ch. Hermite. Sur les fonctions holomorphes. Jordan J. (4) I. 9-10.

Wenn eine Function $f(z)$ für alle endlichen Werte des Argumentes z „holomorph", d. h. eindeutig, endlich und stetig ist und überdies die Eigenschaft besitzt, dass $\frac{f(z)}{z^n}$ endlich bleibt für unendlich grosse Werte von z, so ist $f(z)$ eine ganze Function n^{ten} Grades von z.

Diesen Satz beweist Herr Hermite auf folgende Weise. Es ist

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + J,$$

wobei

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{x^{n+1} f(z)\, dz}{z^{n+1}(z-x)}$$

ist, das Integral erstreckt über den Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Punkte $z = 0$ liegt und welcher den Punkt $z = x$ einschliesst. Der Wert von J lässt sich nun auf die Form bringen

$$J = \frac{x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - x)} \lambda e^{-i\theta},$$

unter $\zeta = re^{i\theta}$ einen auf dem Umfange jenes Kreises liegenden Punkt und unter λ eine Grösse verstanden, deren Modul die Einheit nicht überschreitet. Hiernach kann J beliebig klein gemacht werden durch Vergrösserung des Kreises, und folglich ist $J = 0$, womit der zu beweisende Satz erhärtet ist.

Bz.

L. Raffy. Sur une proposition de M. Hermite. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 99-112.

Für die Differentialgleichung erster Ordnung $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$,

in welcher f eine algebraische Function von u und $\frac{du}{dz}$ bedeutet, die aber z nicht enthält, haben Briot und Bouquet (Journal de l'École Pol. Cah. 36) die Bedingungen gegeben, unter denen das Integral sich als eindeutige Function von z ergiebt. Hermite hat nachgewiesen, dass das Geschlecht von $f = 0$ in diesem Falle gleich 0 oder 1 sein muss (Cours d'Analyse de l'École Polyt. 1873, Proc. London Math. Soc. IV. 1873). Raffy hat (Annales de l'École Norm. (2) XII.) weiter die Fälle, in denen das Integral eine doppelt periodische, einfach periodische oder rationale Function darstellt, unterschieden, und leitet jetzt direct aus den von Briot und Bouquet gegebenen Bedingungen für die Eindeutigkeit der Integralfunction den Hermite'schen Satz ab und formulirt die notwendigen (durchaus algebraischen) Processe zur Herstellung der Function u, falls dieselbe eindeutig ist.

Dk.

S. Pincherle. Alcune osservazioni sugli ordini d'infinito delle funzioni. Bologna Mem. (4) V. 739-750.

Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ Functionen der reellen Veränderlichen x, welche beide für ein und denselben Wert von x, etwa für $x = \infty$, positiv unendlich gross werden, so beurteilt man für gewöhnlich die Grade des Unendlichwerdens beider Functionen nach dem Verhalten des Quotienten $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, oder, was dasselbe ist, nach dem Verhalten der Differenz $\log f(x) - \log \varphi(x)$.

Herr Pincherle bemerkt, dass dieser Definition eine gewisse Willkürlichkeit anhaftet, insofern man an Stelle des Quotienten oder der Differenz der Logarithmen auch andere aus $f(x)$ und $\varphi(x)$ gebildete Ausdrücke betrachten kann. In dieser Hinsicht giebt der Verfasser folgende Verallgemeinerung der üblichen Definitionen: Es sei $F(z)$ eine mit z beständig und unbegrenzt anwachsende Function und $\delta(x) = F(f(x)) - F(\varphi(x))$. Die Ordnung des Unendlichen von $f(x)$ in Bezug auf die Form $F(z)$ heisse

grösser als die von $\varphi(x)$, wenn jene Differenz $\delta(x)$ mit wachsendem x positiv unendlich wird, u. s. w. Ist $F(z) = \log z$, so stimmt diese Definition mit der gewöhnlichen überein. Es ist zu bemerken, dass zwei Functionen, welche in Bezug auf eine Form von derselben Ordnung unendlich werden, in Bezug auf eine andere Form von ungleicher Ordnung sein können. Für die allgemeinere Definition gilt derselbe Satz, welchen Herr P. Du Bois-Reymond für die übliche Definition bewiesen hat: Ist irgend eine Reihe unendlich werdender Functionen

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

gegeben, so existirt stets eine Function, welche von höherer Ordnung unendlich wird, als irgend eine Function jener Reihe. Ferner besteht der Satz: Wenn die Differenz zweier unendlich werdenden Functionen beständig positiv ist, so giebt es immer eine Form $F(z)$, in Bezug auf welche die beiden Functionen von verschiedener Ordnung unendlich gross werden. Legt man die gewöhnliche Definition zu Grunde und betrachtet nur Functionen der Form

$$\sum_1^n a_i x^{\alpha_i},$$

unter a_i, α_i reelle Grössen verstanden, so kann man jeder Function den grössten der Exponenten α_i als Masszahl des Unendlichwerdens zuordnen. Es gelten dann die drei elementaren Gesetze:

A. Die Masszahl einer Summe von Functionen ist gleich der grössten der Masszahlen, welche den einzelnen Summanden zukommen.

B. Die Masszahl des Productes von Functionen ist gleich der Summe der Masszahlen der Factoren.

C. Substituirt man eine Function in eine andere, so multipliciren sich die Masszahlen.

Der Verfasser zeigt nun, dass man leicht Functionssysteme bilden kann, bei welchen es unmöglich ist, die Ordnung des Unendlichen durch Masszahlen auszudrücken unter Festhaltung der Gesetze A, B, C, selbst wenn die Ordnungen je zweier Functionen

des Systems vergleichbar sind und Masszahlen zugelassen werden, welche aus unendlich vielen Einheiten zusammengesetzt sind. Will man die Ordnung des Unendlichwerdens der Functionen symbolisch darstellen, so ist es zweckmässig, wie der Verfasser ausführt, die Ordnung von $f(x)$ gleich $\log f(\omega)$ zu setzen. Dabei bedeutet ω ein Symbol, welches den gewöhnlichen Rechnungsgesetzen unterworfen ist, und es ist

$$f(\omega)+\varphi(\omega)=f(\omega)$$

zu setzen, wenn $f(x)$ eine unendlich werdende, dagegen $\varphi(x)$ eine endlich bleibende Function vorstellt. Hz.

S. Pincherle. Sui gruppi lineari di funzioni d'una variabile. Bologna Mem. (4) VI. 101-118.

S. Pincherle. Alcune osservazioni generali sui gruppi di funzioni. Bologna Mem. (4) VI. 205-214.

Ein System von Operationen, welches durch Combination und Wiederholung seiner Elemente in sich selbst übergeht, heisst eine „Operationengruppe“. Ist eine solche Gruppe O vorhanden, und geht jede Function einer gegebenen Functionenmenge durch irgendwelche Operationen der Gruppe O in eine andere Function derselben Menge über, so sagt man, die gegebenen Functionen bilden eine „Functionenklasse in Bezug auf die Operationengruppe O“. Sind n solche Functionen vorhanden, dass keine derselben aus den übrigen durch die Operationen der Gruppe O erhalten werden kann, so heissen die n Functionen „von einander unabhängig in Bezug auf die Gruppe O“. Aus ihnen entsteht eine „durch die Operationengruppe O erzeugte Functionengruppe G“, welche aus allen Functionen besteht, die aus den n Functionen durch die Operationen der Gruppe O erhalten werden. Die n Functionen bilden ein „Fundamentalsystem der Gruppe G“; n heisst die „Dimension“ von G. Es ist leicht, die Teilbarkeit zweier Functionengruppen durch einander, ihren grössten gemein-

schaftlichen Teiler und ihr kleinstes gemeinschaftliches Multiplum zu definiren.

Eine durch eine Operationengruppe O erzeugte Functionengruppe bildet stets eine Klasse in Bezug auf O.

Bilden zwei durch eine und dieselbe Operationengruppe erzeugte Functionengruppen je eine Klasse in Bezug auf eine andere Operationengruppe, so folgt dasselbe von ihrem grössten gemeinschaftlichen Teiler (falls ein solcher existirt).

Unter den unendlich vielen möglichen Arten von Functionenklassen mögen die folgenden hervorgehoben werden.

a) Sind die Grundoperationen der Gruppe O Addition, Subtraction und Multiplication mit Constanten, so heissen die zu der Gruppe O gehörenden Klassen „linear“;

b) Enthält O noch die Multiplication und die Division, so heissen die Klassen „rational“;

c) Wird die Multiplication mit Constanten durch die Multiplication mit Functionen eines gegebenen Systemes A ersetzt, so hat man „lineare“, beziehungsweise „rationale Klassen mit zu A gehörenden Coefficienten“;

d) Besteht O aus dem Inbegriffe aller algebraischen Operationen, so heissen die Klassen „algebraisch“.

Die durch die Operationengruppen O der Arten a), b), d) erzeugten Functionengruppen heissen beziehungsweise „lineare“, „rationale“, „algebraische“ Gruppen.

e) Ein System von Functionen, welches so beschaffen ist, dass die Abgeleiteten seiner Individuen dem System angehören, nennt man eine „differentiale“ Klasse.

Die erste der zwei vorliegenden Abhandlungen ist der Besprechung der linearen Gruppen (mit Coefficienten, welche einem Systeme A angehören) gewidmet, mit besonderer Betrachtung derjenigen linearen Gruppen, die rationale oder differentiale Klassen bilden.

In der zweiten Abhandlung werden, nachdem die Grundzüge der allgemeinen Theorie der Functionengruppen und Klassen auseinandergesetzt sind, die algebraischen Gruppen besonders untersucht.

Eine lineare Gruppe G, welche eine rationale Klasse bildet, mag noch ein „Functionenkörper" heissen. Ist $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ein Fundamentalsystem einer linearen Gruppe mit zu A gehörenden Coefficienten, hat nämlich jede Function von G die Form

$$a_1 E_1 + a_2 E_2 + \cdots + a_n E_n,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus A entnommen sind, so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass G eine rationale Klasse bilde:

$$E_i E_j = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(ij)} E_k \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Jede Function des Körpers G genügt einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten zu A gehören, und deren Grad n nicht übertrifft. Der grösste gemeinschaftliche Teiler und das kleinste gemeinschaftliche Multiplum zweier Körper sind gleichfalls Körper. Jeder Körper von der Dimension n besitzt ein Fundamentalsystem von der Form:

$$1, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}.$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Gruppe (mit zu A gehörenden Coefficienten) eine differentiale Klasse bilde, sind:

$$\frac{dE_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Jede Function einer solchen Gruppe genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung, deren Coefficienten zu A gehören und deren Ordnung n nicht übertrifft. Der grösste gemeinschaftliche Teiler und das kleinste gemeinschaftliche Multiplum zweier Gruppen von der eben besprochenen Art sind ebensolche Gruppen.

Jede lineare Gruppe, die eine differentiale Klasse bildet, besitzt ein Fundamentalsystem von der Form:

$$F, \frac{dF}{dx}, \ldots, \frac{d^{r-1}F}{dx^{r-1}}; \; F_1, \frac{dF_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{r_1-1}F_1}{dx^{r_1-1}}; \ldots;$$

$$F_s, \frac{dF_s}{dx}, \ldots, \frac{d^{r_s-1}F_s}{dx^{r_s-1}},$$

wo

$$r + r_1 + \cdots + r_s = n;$$

Function F genügt einer linearen homogenen Differential-
ichung von der Ordnung r; F_1 genügt einer linearen, nicht
mogenen Differentialgleichung von der Ordnung r_1, deren
chte Seite der Gruppe

$$F, \frac{dF}{dx}, \dots, \frac{d^{r-1}F}{dx^{r-1}}$$

gehört; F_k $(k = 2, 3, \dots, s)$ genügt einer linearen, nicht homo-
nen Differentialgleichung von der Ordnung r_k, deren rechte
ite der Gruppe

$$F, \frac{dF}{dx}, \dots, \frac{d^{r-1}F}{dx^{r-1}}; \; F_1, \frac{dF_1}{dx}, \dots, \frac{d^{r_1-1}F_1}{dx^{r_1-1}}; \dots;$$

$$F_{k-1}, \frac{dF_{k-1}}{dx}, \dots, \frac{d^{r_{k-1}-1}F_{k-1}}{dx^{r_{k-1}-1}}$$

gehört.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass
ne algebraische Gruppe (mit zu A gehörenden Coefficienten)
ne differentiale Klasse bilde, sind:

$$B_i\left(\frac{dE_i}{dx}, E_1, E_2, \dots, E_n\right) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

o die B_i ganze rationale Functionen bedeuten. Jede Function
ner solchen Gruppe genügt einer algebraischen Differential-
leichung, deren Coefficienten aus A entnommen sind, und deren
rdnung n nicht übertrifft. Jede algebraische Gruppe, die eine
fferentiale Klasse bildet, besitzt ein Fundamentalsystem, welches
m oben angeführten Fundamentalsystem einer linearen Gruppe,
e eine differentiale Klasse bildet, ganz analog ist.

Die Dedekind'schen Körper algebraischer Zahlen (siehe Di-
chlet, Zahlentheorie, III. Aufl.) und Functionen (siehe Dedekind
nd Weber: „Theorie der algebraischen Functionen" in Kronecker J.
CII. 181-290) erscheinen als besondere Fälle unserer Functionen-
örper, wo nämlich die Grösse φ des Fundamentalsystemes

$$1, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n-1}$$

ne algebraische Zahl bezw. Function, A der Inbegriff aller ratio-
alen Zahlen bezw. Functionen ist VI.

E. Sadun. Sulla teoria delle funzioni implicite.
Pisa. Nistri.

Die zu besprechende Abhandlung bezweckt die Aufstellung der Bedingungen, unter welchen ein System von Gleichungen:

$$(\alpha) \qquad f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

ein einziges System von Functionen

$$y_r = \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

bestimmt. Sind die f_r in bestimmten Intervallen gegebene, zusammen mit ihren partiellen Abgeleiteten der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \dots, t^{\text{ten}}$ Ordnung endliche und stetige Functionen der reellen Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$, so verlangt man, dass die φ_r Functionen von eben derselben Beschaffenheit seien; sind aber die f_r eindeutige Functionen (im Riemann'schen Sinne) complexer Variabeln, so sollen auch die φ_r derartige Functionen sein. Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Ist $F(z_1, z_2, \dots, z_m)$ eine endliche stetige und bis auf die t^{te} Ordnung derivirbare Function reeller Veränderlichen, so gilt bekanntlich für diese Function die symbolische Formel:

$$(\beta) \quad \begin{cases} F(z_1^0 + l_1, \dots, z_m^0 + l_m) = F(z_1^0, \dots, z_m^0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z_1} l_1 + \cdots \right. \\ \left. + \frac{\partial F}{\partial z_m} l_m\right)_{z_1^0 \dots z_m^0} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} l_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial z_m} l_m\right)^2_{z_1^0 \dots z_m^0} + \\ \cdots + \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} l_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial z_m} l_m\right)^{s-1}_{z_1^0 \dots z_m^0} \\ + \frac{1}{s!}\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} l_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial z_m} l_m\right)^s_{z_1^0 + \theta_1 l_1 \dots z_m^0 + \theta_m l_m} \end{cases}$$

wo $s \leqq t$ ist, und die $\theta_1, \dots, \theta_m$ sämtlich absolut kleiner als 1 und von s abhängig sind. Setzt man insbesondere $s = 1$, und nimmt m Functionen F_r von derselben Beschaffenheit wie F an, so erhält man:

$$F_r(z_1^0 + l_1, \dots, z_m^0 + l_m) = F(z_1^0, \dots, z_m^0) + l_1 P_1^{(r)} + \cdots + l_m P_m^{(r)}$$
$$(r = 1, 2, \dots, m).$$

Damit

$$F_r(z_1^0 + l_1, \dots, z_m^0 + l_m) = F_r(z_1^0, \dots, z_m^0) \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

sei, muss

$$D = \begin{vmatrix} P_1^{(1)} \dots P_m^{(1)} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ P_1^{(m)} \dots P_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Das Element $P_i^{(r)}$ ist der Wert von $\frac{\partial F_r}{\partial z_i}$ für $z_i = z_i^0 + \theta_i^r\, l_i$; also beziehen sich sämtliche Elemente einer Horizontalreihe auf ein und dasselbe Wertsystem der Variabeln, diese Systeme sind aber von Reihe zu Reihe verschieden. Wendet man jedoch das erhaltene Resultat auf das zu Grunde gelegte Functionensystem f_r an, wo jetzt die y_μ als unabhängige Variabeln betrachtet werden müssen, so schliesst man wegen der angenommenen Stetigkeit der Functionen f_r: Verschwindet

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \dots \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

nicht für $y_\mu = y_\mu^0$, so kann man zu jedem Wertsysteme $h_1, h_2, \dots, h_n$ ein entsprechendes Wertsystem $k_1, k_2, \dots, k_m$ bestimmen, derart, dass die Intervalle $x_r^0 - h_r \dots x_r^0 + h_r$, $y_\mu^0 - k_\mu \dots y_\mu^0 + k_\mu$ keine zwei Wertsysteme enthalten, für welche die f_r ein und dasselbe Wertsystem annehmen. Wir bemerken nebenbei, dass dieses als eine Verallgemeinerung des Rolle'schen Satzes angesehen werden kann.

Die Entwickelung (β) gilt nicht für Functionen von complexen Veränderlichen; diese sind aber, wie bekannt, in ihrem Endlichkeitsbereiche nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar. Durch Betrachtung der Convergenzbedingungen solcher Reihenentwickelung kann man den obigen Satz auf den Fall ausdehnen, wo die f_r Functionen complexer Variabeln sind. Um beide Fälle in Uebereinstimmung zu bringen, bedarf es noch einer Bemerkung. Vermittelst des bekannten Satzes: „Eine in einem Intervalle endliche und stetige Function einer reellen Variabeln nimmt jeden zwischen den den Grenzpunkten entsprechenden Functionenwerten liegenden

Wert an", beweist man leicht, dass, „wenn eine stetige Function $F(z)$ in einem Intervalle $-c \cdots +c$ stets absolut kleiner als c ist, ein Punkt z innerhalb des Intervalles existirt, für welchen $F(z) = z$ ist." Diesem Satze steht für Functionen complexer Variabeln der andere gegenüber: „Ist die Function $F(z)$ in einer Kreisfläche ϱ um den Nullpunkt stets absolut kleiner als ϱ, so giebt es jedenfalls innerhalb der Kreisfläche einen Punkt z, für welchen $F(z) = z$ ist".

Nehmen wir jetzt die Gleichungen (α) wieder auf und setzen die Existenz eines denselben genügenden Wertsystemes x_ν^0, y_μ^0 voraus, so wird sein:

$$(\gamma) \qquad f_r(x_\nu^0 + h_\nu, y_\mu^0 + k_\mu) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu P_\nu^{(r)} + \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu Q_\mu^{(r)},$$
$$(r = 1, 2, \ldots, m)$$

oder, nach der Einsetzung neuer, durch die Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu P_\nu^{(r)} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\alpha_\mu}{D} Q_\mu^{(r)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

definirten Grössen $\frac{\alpha_\mu}{D}$ (wo D die Determinante der $Q_\mu^{(r)}$ ist):

$$f_r(x_\nu^0 + h_\nu, y_\mu^0 + k_\mu) = \sum_{\mu=1}^{m} Q_\mu^{(r)} \left(k_\mu - \frac{\alpha_\mu}{D}\right). \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

Aus den obigen Betrachtungen schliesst man, dass, wenn D für x_ν^0, y_μ^0, d. i. die für x_ν^0, y_μ^0 berechnete Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, eine Umgebung der Stelle x_ν^0, y_μ^0 existirt, innerhalb deren jedem Wertsysteme x_ν keine zwei Wertsysteme y_μ entsprechen können, welche die Gleichungen (α) befriedigen.

Es bleibt nur noch übrig, zu beweisen, dass ein solches

System existiren muss. Dazu bemerke man Folgendes. $\frac{\alpha_1}{D}$ ist für bestimmte Werte von $h_1, h_2, \dots, h_n, k_2, \dots, k_m$ eine Function von k_1, welche für genügend kleine Werte von k_1 absolut kleiner als eine bestimmbare Grösse r_1 ist; also verschwindet wegen des oben angeführten Hülfssatzes die Function $k_1 - \frac{\alpha_1}{D}$ wenigstens für einen innerhalb der Kreisfläche r_1 liegenden Wert von k_1. Für diesen Wert von k_1 und für bestimmte Werte von $h_1, h_2, \dots, h_n, k_3, \dots, k_m$ ist $\frac{\alpha_2}{D}$ eine Function von k_2, welche für hinreichend kleine Werte von k_2 unter einer angebbaren Grösse r_2 absolut liegt; also verschwindet $k_2 - \frac{\alpha_2}{D}$ wenigstens für einen unter r_2 absolut liegenden Wert von k_2. Indem man so fortfährt, bestimmt man für jedes Wertsystem $h_1, h_2, \dots, h_n$ wenigstens ein Wertsystem $k_1, \dots, k_m$, für welches $k_1 - \frac{\alpha_1}{D}, \dots, k_m - \frac{\alpha_m}{D}$ gleich Null ist, welches folglich die Gleichungen:

$$(\delta) \qquad f_r(x_\nu^0 + h_\nu,\ y_\mu^0 + k_\mu) = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

erfüllt. Solcher Wertsysteme können aber, wie oben gefunden, keine zwei existiren. Man kann also schliessen:

Giebt es ein Wertsystem x_ν^0, y_μ^0, welches die Gleichungen (α) befriedigt, so existirt in einer angebbaren Umgebung der Stelle x_ν^0, y_μ^0 zu jedem Wertsysteme h_ν ein und nur ein entsprechendes Wertsystem, welches die Gleichungen (δ) erfüllt.

Die k_μ werden gleichzeitig mit den h_ν unendlich klein.

Durch die aus (γ) und (δ) folgenden Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu P_\nu^{(r)} + \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu Q_\mu^{(r)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

kann man für $h_1 = h_2 = \dots = h_{\rho-1} = h_{\rho+1} = \dots = h_n$ die Grenzwerte der Verhältnisse $\frac{k_\mu}{h_\rho}$ für $\lim k_\mu = 0$, $\lim h_\rho = 0$, d. i. die Werte der partiellen Ableitungen $\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\rho}$ für $x_\nu = x_\nu^0$ erhalten. Es

bestimmen demnach die Gleichungen (α) die y_μ als endliche, stetige und derivirbare Functionen der x_ν.

Fährt man analog fort, so findet man, dass die Functionen $y_\alpha = \varphi_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ partielle Ableitungen bis auf dieselbe Ordnung zulassen, bis auf welche die f_ν derivirbar sind, also aller Ordnungen, wenn die f_ν Functionen complexer Veränderlichen sind.

Die Umkehrung der Reihen zeigt sich als ein besonderer Fall unseres Satzes.

Ist $D = 0$ für $x_\nu = x_\nu^0$, $y_\mu = y_\mu^0$, so entsprechen jedem Wertsysteme h_ν mehrere Wertsysteme k_μ. Diesen Fall erledigt der Verfasser nur für $n = 1$, $m = 1$; er beweist, dass, wenn $\frac{\partial^p f}{\partial y^p}$ die erste Abgeleitete ist, welche für $x = x^0$, $y = y^0$ nicht verschwindet, die Gleichung $f(x, y) = 0$ (unter gewissen Umständen) p verschiedene Functionen y von x bestimmt.

Wie der Verfasser erwähnt, hatte schon Herr Dini (Lezioni d'Analisi infinitesimale) die von ihm behandelte Untersuchung für Functionen reeller Variabeln durchgeführt. Wir bemerken auch, dass die gewonnenen Resultate für den Fall einer einzigen Function complexer Variabeln im ersten Paragraphen von Weierstrass' Schrift: „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze" (seit 1879 lithographirt erschienen, später den Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin, Springer 1886, einverleibt) der Sache nach enthalten sind. Vi.

P. Fambri. Sulle funzioni continue le quali in un dato intervallo non ammettono derivate. Ven. Ist. Atti (6) III. 823-831.

Diese Note enthält einige allgemeine Betrachtungen über stetige, unendlich oft oscillirende Functionen, insbesondere über solche von der Form $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, wo die Reihe in einem gegebenen Intervalle ab überall convergirt, die Functionen $u_n(x)$ in demselben Intervalle endlich, stetig und derivirbar sind und Maxima

und Minima in endlicher Anzahl besitzen, welche aber mit n unbegrenzt zunimmt. Eine solche Function (siehe Dini, Fondamenti etc. S. 148, nicht 248) lässt im ganzen Intervalle ab keine Ableitung zu. Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, wenn man die geometrische Darstellung der einzelnen Functionen $u_n(x)$ ins Auge fasst. Die Ordinaten der Curven $y = u_n(x)$ sind (wegen der Convergenz der gegebenen Reihe) um so kleiner, je grösser n ist, und die Curve $y = u_n(x)$ für $n = \infty$ oscillirt unendlich oft um die x Axe. Man muss sich aber, fährt der Verfasser fort, davor hüten zu denken, diese Curve reducire sich auf eine Gerade. Hier versäumt er es leider, das zutreffende und anschauliche Beispiel zu erwähnen, welches Hankel in seinen Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen (§ 3, Fussnote) angeführt hat. Wird ein Quadrat mit der Seite a in n^2 gleiche Quadrate geteilt, so bilden die Katheten der n auf einer und derselben Seite der einen Diagonale liegenden Halbquadrate eine gebrochene aber stetige Linie. Nimmt n unbegrenzt zu, so nähert sich diese Linie um so mehr der Diagonale, je grösser n ist; sie identificirt sich aber nie mit dieser Geraden, da die Länge der gebrochenen Linie, unabhängig von n, gleich $2a$ ist, während die Länge der Diagonale durch $a\sqrt{2}$ ausgedrückt wird.

Herr Fambri schliesst seine kurze Note mit der Betrachtung einiger besonderen Fälle. Vi.

A. Tonelli. Sulla rappresentazione analitica di certe funzioni singolari. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 124-130.

Die unendlich oft oscillirende Hankel'sche Function

$$f(x) = \frac{\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}}{\sum_1^\infty \frac{1}{n^s \varphi^2(\sin n\pi x)}} \qquad s > 1$$

(wo $\varphi(y) = \pm 1$ von $y = \pm 1$ bis $y = 0$ und 0 für $y = \pm 1$ und für $y = 0$) hat für alle rationalen Werte von x den Wert 0, für alle irrationalen den Wert 1. Diese Function mag auf die

folgende Weise verallgemeinert werden. Es sei $\pi(x)$ eine analytische Function, welche in einem gegebenen Intervalle ab endlich, absolut genommen nicht kleiner als 1 ist, Oscillationen nur in endlicher Anzahl erfährt, und in einem inneren Punkte c des Intervalles ab eine solche Unstetigkeit hat, dass $\pi(c+0) = -\pi(c-0)$. Man bilde, mittels der Fourier'schen Reihe, eine Function $\varphi(x)$, welche im ganzen Intervalle ab, die Punkte a, b, c ausgeschlossen, mit $\pi(x)$ zusammenfällt, während sie in a und b den Wert

$$\tfrac{1}{2}\{\pi(a+0)+\pi(b-0)\},$$

in c den Wert 0 erhält. Sind $\sum_0^\infty u_n(x)$, $\sum_0^\infty u_n'(x)$ zwei im ganzen Intervalle ab convergente Reihen, p, q zwei willkürliche Grössen, so hat die Function

$$F(x) = p\,\frac{\displaystyle\sum_0^\infty \frac{u_n(x)}{\pi^2[c+(a-c)\sin^2 n\pi x]}}{\displaystyle\sum_0^\infty \frac{u_n(x)}{\varphi^2[c+(a-c)\sin^2 n\pi x]}} + q\,\frac{\displaystyle\sum_0^\infty \frac{u_n'(x)}{\pi^2[c+(b-c)\sin^2 n\pi x]}}{\displaystyle\sum_0^\infty \frac{u_n'(x)}{\varphi^2[c+(b-c)\sin^2 n\pi x]}}$$

den Wert 0 für jeden rationalen, den Wert $p+q$ für jeden irrationalen Wert von x. Man kann daraus, wenn zwei willkürliche Functionen $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ gegeben sind, eine Function $F_1(x)$ erhalten, welche für rationale Werte von x mit $\varphi_1(x)$, für irrationale mit $\psi_1(x)$ coincidirt. Eine solche Function wird durch die Gleichungen

$$p+q = \psi_1(x)-\varphi_1(x), \quad F_1(x) = \varphi_1(x)+F(x)$$

gegeben, wo, wie man sieht, nur die Summe von p und q bestimmt ist, ihre einzelnen Werte aber übrigens willkürlich bleiben. Ersetzt man nun in $F_1(x)$ die Functionen $\varphi_1(x), \psi_1(x)$ durch diejenigen vermittelst der Fourier'schen Reihe erhaltenen Functionen, welche im Intervalle ab (das wir von nun an durch $a_1 b_1$ bezeichnen wollen), die Endpunkte ausgeschlossen, mit ihnen beziehungsweise coincidiren und ausserhalb dieses Intervalles überall gleich Null sind, und bildet man analog $F_2(x), F_3(x), \ldots, F_n(x)$

für die gegebenen, ausser einander liegenden Intervalle $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \ldots, a_n b_n$, so hat die Function $\sum_1^n F_i(x)$ die Eigenschaft, dass sie in den rationalen Punkten von $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n$, beziehungsweise die Werte $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, in den irrationalen beziehungsweise die Werte $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ annimmt, und sonst überall verschwindet.

Die obigen Resultate können auf die Functionen von mehreren Veränderlichen leicht ausgedehnt werden, und mit dem Versuche einer solchen Ausdehnung wird die Note geschlossen.

Im Ausdrucke von $F(x)$ (S. 126) muss man $+(a-c)$ statt $-(a-c)$ lesen. Vi.

N. A. Johansson. Några tillämpningar af det Abelska teoremet å unikursala kurvor, som ega en dubbelpunkt eller en spets. Redogörelse för Göteborgs realläroverk under läsåret 1884-1885 (4) + 40 p.

Der Verfasser giebt hier einige Anwendungen des Abel'schen Theorems auf unicursale Curven, die einen Doppelpunkt oder eine Spitze besitzen. Er verfolgt dabei den Weg, der von Clebsch in der Abhandlung: „Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind" (Crelle J. LXIV.) eingeschlagen ist. Besonders werden untersucht die unicursalen ebenen Curven dritter Ordnung und die unicursalen Raumcurven vierter Ordnung. E.

H. Poincaré. Sur une généralisation du théorè
C. R. C. 40-42.

Der mitgeteilte Satz ist eine Erweiterung des
Theorems auf Flächen. Ist $f = 0$ eine Fläche vom
x_ν, y_ν, z_ν einer der Schnittpunkte mit einer Raumcurv
$\varphi_1 = 0$ (wobei die Raumcurve sich zunächst als der vo
Durchschnitt der beiden Flächen, de bez.
ergiebt); ist ferner $x_\nu + dx_\nu, y_\nu + dy_\nu$

punkte mit einer Nachbarcurve, so hat man die Relation:

$$\sum_{\nu=1}^{rs} \frac{P_\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}dz_\nu\right)}{\Delta_\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{rs} \frac{Q_\nu\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_\nu}dz_\nu\right)}{\Delta_\nu} = 0.$$

Dabei sind P_ν und Q_ν ganze Functionen von x, y, z vom Grade $m+p-4$, bez. $m+n-4$, diese Functionen gebildet für den Punkt x_ν, y_ν, z_ν. Δ_ν ist, gleichfalls für jenen Punkt berechnet, die Functionaldeterminante von f, φ, φ_1.

Es wird noch der specielle Fall betrachtet, wo die Fläche $f=0$ eine Ebene ist und weiter, speciell am Beispiel der Raumcurve dritter Ordnung angedeutet, wie die Formulirung des Satzes zu gestalten ist, falls die Raumcurve sich nicht als der vollständige Durchschnitt zweier Flächen ergiebt. Dk.

F. Casorati. Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. Milan. 15 p. 4°.

Aus dem von Jacobi bewiesenen Satze, dass, wenn drei Grössen $\omega, \omega', \omega''$ gegeben sind, sich ganze Zahlen m, m', m'' so wählen lassen, dass der absolute Betrag von

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega''$$

kleiner als jede noch so kleine angebbare Grösse ist, folgt unmittelbar, dass eindeutige Functionen einer Variabeln mit mehr als zwei Perioden unmöglich sind. Auch diejenigen mehrdeutigen Functionen, welche für jeden Wert der Variabeln eine endliche Anzahl von Werten haben, können nicht mehr als zwei Perioden haben. Aber wie verhält es sich nun mit mehrdeutigen Functionen, die eine unendliche Zahl von Werten für jeden Wert der Variabeln annehmen können? Das ist die Frage, mit der sich der Herr Verfasser bereits früher in einigen Abhandlungen in den C. R. vom December 1863 und Januar 1864 beschäftigt hat, und welche er hier wieder aufnimmt, da man vielfach an der absoluten

Absurdität der vielfachen Periodicität der analytischen Functionen einer einzigen Variabeln festhält, verleitet durch Jacobi, der aber wahrscheinlich nur diejenige Klasse von Functionen im Auge hatte, zu denen die cyklometrischen und elliptischen Functionen gehören, d. h. die Klasse der eindeutigen Functionen. Herr Casorati betrachtet einige sehr einfache Differentialgleichungen, deren sämtliche Integrale eine unendliche Zahl von Werten zulassen und eine Periodicität besitzen, die bei einer eindeutigen Function unmöglich wäre. Er findet, dass diese Integrale, weit davon entfernt absurd oder nicht analytische Functionen zu sein, sich nicht allein wie die gewöhnlichen analytischen Functionen in der Umgebung eines jeden besonderen Wertes der Variabeln verhalten, sondern dass sie auch ohne Hindernis Schritt für Schritt fortgesetzt werden können, ganz wie die gewöhnlichen analytischen Functionen. M.

ARZELÀ. Un teorema intorno alle serie di funzioni.
Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 262-267

Es sei x eine reelle, auf das Intervall $(a\dots b)$ beschränkte Veränderliche, $u_1(x), u_2(x), \dots$ eine unendliche Reihe von Functionen der Veränderlichen x, ferner σ eine beliebig klein angenommene positive Grösse, endlich

$$R_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty} {}_{\nu}\, u_\nu(x)$$

der Rest der unendlichen Summe $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ Dann lautet der Satz des Herrn Arzelà: Wenn die Reihe $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ in jedem Punkte des Intervalles $(a\dots b)$ convergirt, so wird die Summe derjenigen Stücke des Intervalles, in deren Punkten für einen gegebenen Wert von n

$$|R_n(x)| > \sigma$$

ist, unendlich klein mit unendlich anwachsendem n.

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung aus dem Hülfssatz, dessen Beweis den Hauptgegenstand der Note bildet: Es sei $g_1, g_2, \dots$ eine Reihe von unendlich vielen Zahlen so beschaffen, dass $\lim_{\nu=\infty} g_\nu$ einen bestimmten endlichen Wert g_0 besitzt. Man

nehme ein rechtwinkliges Coordinatenkreuz an und schneide auf jeder der Geraden $y = y_1$, $y = y_2, \ldots$ ein Stück von der Länge $b - a$ durch die Geraden $x = a$ und $x = b$ ab. Endlich begrenze man auf dem Stücke, welches auf der Geraden $y = y_s$ liegt, eine endliche, jedoch mit s in's Unbegrenzte wachsende Anzahl von auseinanderliegenden Teilstücken δ und bezeichne ihre Summe mit d_s. Wenn nun für jeden Wert von s immer $d_s^1 > d$ ist, so d eine bestimmte von Null verschiedene Grösse bezeichnet, so giebt es zwischen a und b mindestens einen Punkt x_0 so beschaffen, dass die Gerade $x = x_0$ eine unendliche Anzahl von Teilstücken δ trifft. Hz.

G. Pick. Ueber mehrdeutige doppeltperiodische Functionen.

Wien. Ber. XCII 893-899.

Besteht zwischen θ, z eine algebraische Gleichung $f(\overset{n}{\theta}, z) = 0$ (welche in θ vom n^{ten} Grade sein möge), so bilden nach Herrn Kronecker's Terminologie alle rationalen Functionen von θ und z einen „Bereich" (θ, z) algebraischer Functionen. Als „ganze" Grössen des Bereiches werden diejenigen Functionen bezeichnet, welche für alle endlichen Werte von z selbst endlich sind. Es gilt nun der Satz, dass die „ganzen" Grössen sich darstellen lassen als lineare Functionen von n Grössen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ mit Coefficienten, welche ganze Grössen des Bereiches (z), d. h. ganze rationale Functionen von z sind. Das System der n Grössen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ wird als ein „Fundamentalsystem" bezeichnet.

Herr Pick entwickelt einen ähnlichen Satz für die aus drei Grössen θ, p, p' gebildeten rationalen Functionen, wobei einerseits eine algebraische Gleichung

$$f(\overset{n}{\theta}, p, p') = 0$$

besteht, während andererseits

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

ist. Als „ganze" Grössen des Bereiches (θ, p, p') werden die für alle endlichen Werte von p endlich bleibenden Functionen angesehen.

Bekanntlich lassen sich p und p' als eindeutige doppeltperiodische Functionen einer Veränderlichen u darstellen, und es werden dann die Grössen des Bereiches (p, p') gleich Quotienten von σ-Producten:

$$c \cdot \frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_r)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_r)}, \qquad (\Sigma a = \Sigma b).$$

Man erweitere nun den Bereich (p, p') durch Aufnahme auch derjenigen Quotienten, für die Σa nicht gleich Σb ist, welche die „idealen" Grössen des Bereiches bilden. Dann gilt der Satz, dass ein Fundamentalsystem aufgestellt werden kann, falls man als Coefficienten alle ganzen Grössen des erweiterten Gebietes zulässt. Ferner ergiebt sich, dass ein Fundamentalsystem im gewöhnlichen Sinne (wo also die Coefficienten „eigentliche" Grössen des Bereiches (p, p') sind) dann existirt, wenn die „Discriminante" des Bereiches (θ, p, p') eine eigentliche Grösse des Bereiches (p, p') ist. Der Verfasser bemerkt, dass ihm „die mutmassliche Existenz eines solchen Satzes von Herrn F. Klein gesprächsweise mitgeteilt sei".

Hz.

P. Appell. Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. C. R. CI 1478-1480.

P. Appell. Développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Ann de l'Éc Norm 3, II. 9-36.

Fortsetzung der früheren Arbeiten über Zerlegung doppelt periodischer Functionen in einfache Elemente (F. d. M. XV. 1883. 409. XVI. 1884. 383). Die doppeltperiodischen Functionen dritter Gattung, welche meromorphe Functionen sind, lassen sich unter der Form eines Productes von θ-Functionen, dividirt durch ein Product von θ-Functionen darstellen. Wenn im Zähler m θ-Functionen mehr als im Nenner vorkommen, so kann man, wie Herr Appell gezeigt hat, die Function auf folgende Weise in einfache Elemente zerlegen. Wenn die Function die Gleichungen

$$F(z+2K) = F(z), \quad F(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi i z}{K}} F(z)$$

erfüllt, so seien $a, b, \ldots, l$ die als einfach vorkommend vorausgesetzten Pole, welche diese Function in einem Periodenparallelogramm besitzt, und $A, B, \ldots, L$ die entsprechenden Residuen; ferner sei

$$\chi_m(x, y) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{nm\pi y i}{K}} q^{mn(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(x - y - 2niK');$$

alsdann hat man die Zerlegung

$$F(z) = A\chi_m(z, a) + B\chi_m(z, b) + \cdots + L\chi_m(z, l),$$

und die $A, B, \ldots, L$ sind durch m lineare homogene Gleichungen verbunden. Betrachten wir nun eine Function $\Phi(z)$ der dritten Gattung, welche m θ-Functionen mehr im Nenner als im Zähler enthält und die Gleichungen

$$\Phi(z+2K) = \Phi(z), \quad \Phi(z+2iK') = e^{-\frac{m\pi z i}{K}} \Phi(z)$$

erfüllt; sind $a, b, \ldots, l$ die Pole, einfach vorausgesetzt, und $A, B, \ldots, L$ die Residuen im Periodenparallelogramm

$$z_0, \; z_0+2K, \; z_0+2K+2iK', \; z_0+2iK',$$

so hat man die Zerlegung

$$\Phi(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \cdots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

wo zwischen $A, B, \ldots, L$ keine Relation besteht, und wo G eine ganze Function bezeichnet, welche die Gleichungen

$$G(z+2K) = G(z), \quad G(z+2iK') = e^{\frac{m\pi z i}{K}} G(z)$$

erfüllt und von der Form

$$G(z) = \lambda_0 G_0^{(m)}(z) + \lambda_1 G_1^{(m)}(z) + \cdots + \lambda_{m-1} G_{m-1}^{(m)}(z)$$

ist, wo

$$G_\nu^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi z i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{nm\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Die Resultate dieser Zerlegung sind in der ersten Note angegeben, während die zweite Abhandlung die Beweise und Anwendungen enthält. Die Beweismethode ist diejenige, welche Herr Hermite für die Zerlegung der elliptischen Functionen in einfache Elemente angewandt hat. M.

O. Biermann. Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen. Wien. Ber. XCII. 1137-1152.

Es werden folgende auf die Theorie der „Fuchs'schen Functionen" bezügliche Punkte besprochen:

1. Jede zu einer bestimmten Fuchs'schen Gruppe gehörige Fuchs'sche Function lässt sich bekanntlich durch zwei unter ihnen x und y rational darstellen. Die Analogie mit den elliptischen Functionen lässt unter allen diesen Functionen zwei

$$\xi = R_1(x, y) \quad \eta = R_2(x, y)$$

als „Normalfunctionen" bezeichnen, deren eine an einer bestimmten Stelle von der Ordnung $\varrho + 1$, die andere von der Ordnung $\varrho + 2$ unendlich wird, wo ϱ den Rang (das Geschlecht) der Fuchs'schen Function bezeichnet. Die Nullstellen dieser Functionen sind dann bis auf eine (bez. 2) bestimmt. Allgemeiner gilt nach bekannten Sätzen: Für eine Fuchs'sche Function vom Range ϱ und vom Grade r (wo $r > \varrho$) sind $r - \varrho$ Nullstellen mit den übrigen Null- und Unendlichkeitsstellen bestimmt.

2. Für die Untersuchung der Nullstellen einer Thetafuchs'schen Function

$$\vartheta(z) = \sum_i H f_i(z) \left(\frac{df_i(z)}{dz} \right)^m$$

ist die Discussion der Hülfsfunction

$$\theta(z) = \sum_i \left(\frac{df_i(z)}{dz} \right)^m$$

wichtig. Für die Gruppe der linearen ganzzahligen Substitutionen von der Determinante 1 lassen sich die Nullstellen der letzteren Function ohne weiteres bestimmen.

3. Die ϱ algebraischen Gleichungen, durch welche ϱ Nullstellen der (Fuchs'schen) Function $\zeta = R(\xi, \eta)$ (in der R rational und vom Grade r ist) durch die r vorgegebenen Unendlichkeitsstellen und durch $r - \varrho$ vorgegebene Nullstellen bestimmt sind, können als Analogon des Additionstheorems bei den doppeltperiodischen Functionen angesehen werden.

4. Eine Fuchs'sche Function r^{ten} Grades, die an k incongruenten Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_k$ von den Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k$

(wo $\Sigma \nu_i = r$) unendlich wird, besitzt für die Umgebung jener Stellen Entwickelungen von der Form:

$$\sum_{\mu_k=1}^{\nu_k} \frac{C_{\mu_k}^{(k)}}{(z - z_k)^{\mu_k}} + \mathfrak{P}_k(z - z_k),$$

für welche

$$C_1^{(1)} + C_1^{(2)} + \cdots + C_1^{(k)} = 0$$

ist.

5. Wenn zwei Fuchs'sche Gruppen eine Untergruppe mit einander gemein haben, so besteht (und zwar auch nur dann) zwischen den zur einen und andern Gruppe gehörigen Normalfunctionen ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 eine algebraische Beziehung. Mit der Frage nach derselben werden die Verallgemeinerungen der auf die Transformation der elliptischen Functionen bezüglichen Formulirungen berührt. Dk.

E. Picard. Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 357-384.

E. Picard. Sur certaines fonctions hyperfuchsiennes. C. R. CI. 1127-1128.

In verschiedenen Noten in den Comptes rendus und in der grösseren Abhandlung „Sur les formes quadratiques ternaires à indeterminées conjuguées (Acta Math. V., F. d. M. XVI. 1884. 385*) hat Herr Picard hyperfuchs'sche Functionen (von zwei Variabeln) studirt, die sich auf ein gewisses System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen mit drei gemeinsamen linear unabhängigen Lösungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ beziehen. Es handelt sich hier um den präcisen Ausdruck der Bedingungen, unter welchen die

*) Man vergl. hierzu noch Annales de l'Éc. Norm. 1881. „Mémoire sur les séries hypergéométriques de deux variables (F. d. M. XIII. 1881. 389, XII. 1880. 328), sowie Appell: „Mémoire sur les fonctions hypergéométriques de deux variables" (J. de Math. 1881, F. d. M. XIV. 1882. 375).

unabhängigen Variabeln x, y sich durch die Quotienten

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

je zweier Particularlösungen als eindeutige „hyperfuchs'sche" Functionen darstellen lassen. Sie ergeben sich analog den von Schwarz für die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (Crelle J. LXXV.) formulirten Bedingungen. Diese letzteren werden in der erstgenannten Abhandlung zunächst im Hinblick auf die gewünschte Ausdehnung auf einem neuen Wege abgeleitet. Wir schicken sie zum Vergleich mit den Bedingungen für die hyperfuchs'schen Functionen voraus: Die Integrale

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

(wo g, h zwei der Grössen $0, 1, x, \infty$ bedeuten) genügen der Differentialgleichung (2ter Ordnung) der hypergeometrischen Reihe. Der Quotient

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = z$$

zweier linear unabhängiger Particularlösungen ergiebt x als eindeutige Function von z, wenn die Ausdrücke

$$\frac{1}{\lambda + b_1 - 1}, \quad \frac{1}{\lambda + b_2 - 1}, \quad \frac{1}{b_1 + b_2 - 1}$$

ganze positive Zahlen sind, und

$$\lambda + b_1 + b_2 < 2$$

ist. Die Function, innerhalb eines „Grenzkreises" definirt, ist eine eindeutige Function mit linearen Transformationen in sich.

Analog ergiebt sich hier: Die Integrale jenes Systems von drei linearen partiellen Differentialgleichungen sind, x und y als unabhängige Variable betrachtet, in der Gestalt:

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-x)^{\mu-1}(u-y)^{\lambda-1}\,du$$

enthalten, wo g, h zwei der Grössen $0, 1, x, y, \infty$ bedeuten.
je zweier der Grössen λ, μ, b_1, b_2 müssen dann die Ausdrücke

$$\frac{1}{\lambda + b_1 - 1}$$

ganze positive Zahlen sein; ebenso für je drei dieser Grössen die Ausdrücke wie

$$\frac{1}{2-\lambda-\mu-b_1};$$

endlich ist

$$\lambda+\mu+b_1+b_2<3.$$

Dann sind x und y eindeutige Functionen von u und v mit „hyperfuchs'scher Gruppe“. Weiter kann man die Particularlösungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ so wählen, dass die Functionen x, y innerhalb einer vierdimensionalen Kugel

$$u'^2+u''^2+v'^2+v''^2=1$$

($u=u'+iu''$, $v=v'+iv''$) vom Radius 1 definirt erscheinen. Der „Fundamentalraum“ der hyperfuchs'schen Gruppe kann dabei bis zur „Grenzkugel“ mit einzelnen singulären Punkten heranreichen, wie dies im Falle

$$\lambda=\mu=b_1=b_2=\tfrac{1}{2}$$

geschieht und auch bei allen jenen hyperfuchs'schen Gruppen der Fall ist, die Picard im Anschluss an gewisse ternäre quadratische Formen (Acta Mata. V.) studirte, oder aber er kann ganz im Innern desselben gelegen sein, wie dies für

$$\lambda=\mu=b_1=b_2=\tfrac{1}{4}$$

statt hat. Dk.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

C. Weierstrass. Zu Lindemann's Abhandlung: „Ueber die Ludolph'sche Zahl“. Berl. Ber. 1067-1086.

Aus den Untersuchungen des Herrn Lindemann Berl. Ber. 1882 u. Klein Ann. XX. (siehe F. d. M. XIV. 1882. 369) hat sich

der bis dahin vergebens erstrebte Beweis ergeben, dass die Zahl π eine transcendente Zahl ist, dass also eine Quadratur des Kreises auf constructivem Wege nicht möglich ist. In Hinsicht auf dies allgemein interessante Resultat hat es Herr Weierstrass unternommen, eine möglichst elementar gehaltene, auch auf allbekannte Sätze sich stützende Begründung der Lindemann'schen Theoreme zu geben. Dieselbe beruht hauptsächlich auf folgendem Satz: „Es sei $f(z)$ eine ganze Function $(n+1)^{ten}$ Grades der Veränderlichen z mit gegebenen ganzzahligen Coefficienten, die so beschaffen sind, dass die Gleichung

$$f(z) = 0$$

$(n+1)$ von einander verschiedene Wurzeln hat, welche mit z_0, $z_1, \ldots, z_n$ bezeichnet werden mögen. Alsdann lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ, auf mannigfaltige Weise ein System von $(n+1)$ ganzen Functionen $g_0(z), g_1(z), \ldots, g_n(z)$ des Arguments z von nicht höherem als dem n^{ten} Grade, deren Coefficienten sämtlich ganze Zahlen sind, so bestimmen, dass erstens jede der Differenzen

$$g_\nu(z_\nu)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)e^{z_\nu} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n;\ \nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, und zweitens die Determinante

$$|g_\nu(z_\lambda)| \qquad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots, n)$$

einen von Null verschiedenen Wert hat.“ Dieser Satz wird in § 1 bewiesen. Im folgenden Paragraphen ergiebt sich dann, dass π eine transcendente Zahl ist, aus dem Nachweis, dass das Product

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda} + 1)$$

und somit auch jeder einzelne Factor desselben einen von N[ull] verschiedenen Wert hat. Der letzte Paragraph enthält allg[e]meinere, auf die Exponentialfunction sich beziehende Sätze, a[us] denen u. a. folgende Sätze sich ergeben: „Die Exponentialgröss[e] e^x ist stets eine transcendente Zahl, wenn x eine von Null ver[]schiedene algebraische Zahl ist“, und: „Der [...] Logarith-

mus einer algebraischen Zahl X ist immer eine transcendente Zahl, wenn X nicht den Wert 1 hat." M.

F. Franklin. Note on the theorem $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Newcomb Am. J. VII. 376.

Beweis durch einfache geometrische Construction, bei der die Punkte 1, $\left(1+\frac{ix}{n}\right)$, $\left(1+\frac{ix}{n}\right)^2, \cdots, \left(1+\frac{ix}{n}\right)^n$ auf einem Kreisbogen von der Länge x mit dem Radius 1 liegen.

M.

G. Heppel. T. C. Simmons. Solution of question 6456. Ed. Times XLII. 34-35.

Es sei

$$\sec x = 1 + \frac{u_2}{2!} x^2 + \frac{u_4}{4!} x^4 + \cdots,$$

$$2\sec^2 x = 2 + \frac{v_2}{2!} x^2 + \frac{v_4}{4!} x^4 + \cdots,$$

so finden die Beziehungen statt:

$$u_{2n} = u_{2n-2} + \frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!} u_{2n-4} v_2 + \frac{(2n-2)!}{4!(2n-6)!} u_{2n-6} v_4 + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2} v_{2n} = u_{2n} + \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} u_2 u_{2n-2} + \frac{(2n)!}{4!(2n-4)!} u_4 u_{2n-4} + \cdots,$$

wo die letzte Reihe abbricht, wenn der erste Index grösser als der zweite wird, und der Coefficient zu hälften ist, wenn beide Indices gleich sind. Lp.

M. A. Baraniecki. Ueber die Bernoulli'schen Functionen. Krak. Ber. XIII. (Polnisch.)

Der Verfasser wendet hier die von E. Lucas (Brioschi Ann. 1877) für die Bernoulli'schen Zahlen eingeführten Symbole auf die Bernoulli'schen Functionen an und beweist die wichtigsten Eigenschaften derselben. Dn.

A. di Prampero. Saggio di tavole dei logaritmi quadratici. Udine. Doretti.

Ist $(a)^{2^x} = N$, wo a die constante Basis $(10)^{2^{-10}}$, N eine beliebige Zahl ist, so sagt der Verfasser, x sei der „quadratische Logarithmus" von N oder $x = L_q N$. Es folgt daraus:

$$L_q N^h = L_q N + \frac{\log h}{\log 2},$$

wo h ein beliebiger Exponent ist. Setzt man $(N)^{2^k} = N_k$, also $(N)^{2^{10}} = N_{10}$, und $E = \log N_{10}$, so erhält man:

$$L_q N = \frac{\log E}{\log 2} = \frac{\log \log N}{\log 2} + 10.$$

Nehmen wir nun N_{10} als Argument an, so können wir daraus $N, N_1, N_2, \dots, N_9, N_{11}, N_{12}, \dots$ und ferner E und $L_q N$ berechnen. Das hat Herr Prampero gethan für Werte von N_{10}, welche von 10 bis 100 mit der constanten Differenz $\frac{1}{10}$ fortschreiten, und für solche, die den von 10 bis 11 mit der constanten Differenz $\frac{1}{100}$ fortschreitenden Werten von N_9 entsprechen. Von den zwei übrigen dem Büchlein angehängten kleineren Tafeln giebt die erste die Werte von $\frac{\log E}{\log 2}$ für bekannte Werte von E an, die zweite aber den Exponenten, zu welchem man eine gegebene Basis erheben muss, um eine gleichfalls gegebene Zahl zu erhalten.

Die Tafeln sollen dazu dienen, jede Potenzirung oder Radicirung durch eine Addition oder Subtraction zu ersetzen. Ein Beispiel mag genügen, um die Sache zu erklären. Will man die dritte Potenz von 9 erhalten, so suche man den L_q von 9 also 9,932427 und addire dazu $\frac{\log 3}{\log 2}$ oder 1,584962; man hat als Resultat 11,517389. Sucht man die Mantisse in der Columne L_q auf, so ist das entsprechende N_{11} 729, welches die gesuchte Zahl ist. Vi.

J. C. Kapteyn et W. Kapteyn. Les sinus de quatrième ordre. Néerl. Arch. XXIV. 1-98.

Die Herren Verfasser haben sich mit dem Studium der Functionen

$$\frac{z^{\mu}}{\mu!} \pm \frac{z^{\mu+n}}{(\mu+n)!} + \frac{z^{\mu+2n}}{(\mu+2n)!} \pm \cdots,$$

wo z eine imaginäre Variable, n eine ganze positive Zahl und μ eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ist, beschäftigt und veröffentlichen hier die erhaltenen Resultate für den speciellen Fall $n=4$, d. h. die Theorie der Sinus vierter Ordnung. Je nachdem das obere oder untere Vorzeichen genommen wird, gehören diese Sinus höherer Ordnung der hyperbolischen oder elliptischen Gattung an. Der erste Abschnitt enthält die Fundamentaltheoreme für diese Functionen beider Gattungen, der zweite die Entwickelung einer willkürlichen holomorphen Function in Reihen, die den Fourier'schen Reihen analog sind.

Ueber diese Sinus der vierten Ordnung findet sich in Grunert Arch. XXVII. eine Abhandlung von Knar; die näheren bibliographischen Notizen über Sinus höherer Ordnung hat Günther in seinem Buche: „Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen" gegeben.

M.

Hj. Mellin. Om en ny klass af transcendenta funktioner, hvilka äro nära beslägtade med gammafunktionen. I. Helsingf. Vet. Soc. Acta XIV. 353-385.

Die hier ausgeführten Untersuchungen sind wesentlich dieselben, die in der späteren Abhandlung „Zur Theorie der Gammafunctionen" (Acta Math. VIII. 37-80) enthalten sind, worüber im folgenden Jahrgang der „Fortschritte" berichtet werden soll.

E.

B. Elliptische Functionen.

H. A. Schwarz. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor K. Weierstrass. Göttingen Dieterich. Bogen 11 u. 12, S. 81-96.

Fortsetzung der Sammlung, über welche F. d. M. XV. 1883. 373 berichtet worden ist. Die vorliegenden Bogen enthalten die Fortsetzung des Artikels: „Das Quadrat des Moduls und die absolute Invariante als Function des Periodenverhältnisses“, ferner die „Normalform der elliptischen Integrale erster, zweiter, dritter Art“:

$$u = \int_{(s,\sqrt{S})}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} \quad (S = 4s^3 - g_2 s - g_3), \qquad \frac{\sigma' u}{\sigma u} = -\int^{(s,\sqrt{S})} \frac{s\,ds}{\sqrt{S}},$$

$$\log \frac{\sigma(v-u)}{\sigma u . \sigma v} + \frac{\sigma' v}{\sigma v} \cdot u + C = \int \frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} du.$$

Es folgen die Additionstheoreme der elliptischen Integrale und die Bestimmung der Perioden der aus elliptischen Functionen entspringenden Integralfunctionen. M.

K. Weierstrass. Sur la théorie des fonctions elliptiques. Acta Math VI. 169-228.

Eine von Herrn A. Pautonnier gegebene Uebersetzung der Abhandlung Berl. Ber. 1883 (Math. u. naturw. Mitteilungen p. 95-105, 163-173, 621-647), über welche F. d. M. XV. 1883 [illegible] berichtet worden ist.

A. Söderblom. Sur les fonctions elliptiques $\Xi(u)$ Upsala, Vet. Soc. Acta XIII. (1884). (4) + 123 + (1) S.

Enthält S. 1-6 eine Einleitung, wo mit Benutzung der Schw[illegible] schen Formelsammlung einige Relationen zwischen den elliptis[illegible]

Functionen gegeben werden und dann S. 7-16 Integrationsformeln für die einfachsten Integrale von der Form

$$\int F(\wp(u))\,du.$$

Das Uebrige der umfangreichen Abhandlung (S. 17-123) bezieht sich auf Integration von Ausdrücken, die Functionen von den elliptischen Hülfsfunctionen $\xi(u)$ (nach Weierstrass' Bezeichnung) sind.

In der Einleitung bemerkt der Verfasser: „Les nouvelles fonctions elliptiques $\xi(u)$ ont été introduites dans l'analyse par M. Weierstrass". Das Wort „nouvelles" scheint nicht ganz berechtigt zu sein, da Herr W. den Buchstaben ξ benutzt haben dürfte, nur um einige Relationen zwischen den Quotienten der σ-Functionen in ein Paar Formeln zusammenfassen zu können. Es erscheint darum höchst zweifelhaft, ob der Arbeit des Verfassers überhaupt wirklich ein bedeutenderer Wert beigelegt werden kann, zumal die Abhandlung kein Resultat enthält, das nicht von jedem, der desselben bedarf, aus bekannten Formeln unmittelbar abgeleitet werden kann. Dazu kommt noch, dass der Satz, dass die zwölf Functionen ξ aus dreien von ihnen durch Vermehrung des Arguments um eine halbe Periode hervorgehen, nicht benutzt wird, obgleich dadurch der Umfang der Abhandlung sehr beschränkt werden konnte.

E.

J. Vivanti. Démonstration d'un théorème sur les périodes de la fonction elliptique $\wp(u)$. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 325-336.

Es wird ein elementarer Beweis für folgendes Theorem gegeben, das Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über elliptische Functionen beweist und das sich in der Schwarz'schen Formelsammlung 1883, p. 32-33 findet: „Es giebt ein und nur ein Paar primitiver Perioden der elliptischen Function $\wp(u)$, welches die Bedingungen erfüllt:

$$\text{I.} \qquad \wp(\Omega) = e, \quad \wp(\Omega') = e'.$$

wo e und e' zwei willkürlich gewählte Werte der Wurzeln e, e', e'' der kubischen Gleichung

$$4\wp^3u - g_2\wp u - g_3 = 0$$

sind;

II. der reelle Teil von $\frac{\Omega'}{\Omega i}$ ist positiv;

III. das Parallelogramm, dessen zwei anstossende Seiten Ω, Ω' sind, wird durch seine kürzeste Diagonale in zwei spitzwinklige Dreiecke zerlegt." M.

de Sparre. Sur la réduction aux fonctions elliptiques de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}}$.
Brux. S. sc. IX B. 205-230.

Ergänzung der betreffenden in den Brux. Soc. sc. Ann. VIII. B. 97-120 (F. d. M. XVI. 1884. 402) veröffentlichten Arbeit, wo der Verfasser in einfacher Art den Fall behandelt hatte, dass das Polynom unter dem Wurzelzeichen alle Wurzeln reell hat. Er untersucht jetzt der Reihe nach das Problem der Reduction, 1) wenn der Radicand vom vierten Grade ist und imaginäre Wurzeln hat, 2) wenn der Radicand vom dritten Grade ist und imaginäre Wurzeln besitzt, 3) wenn der Radicand vom dritten Grade ist und reelle Wurzeln hat. Dieser Fall wird einfacher behandelt, als dies geschähe, wenn man ihn als Grenze desjenigen ansähe, wo der Radicand vom vierten Grade ist. Als Anwendung löst Herr de Sparre d[illegible] dem der Bewegung des Kreispendels. Mn. (Lp.)

G. Battaglini. Intorno [illegible] ia delle forme binarie qu[illegible] quazione differenziale ell[illegible]

Sind e_1, [illegible] Ebene, V_1, [illegible] setzt man sy[illegible]

$$v_1 : v_2 : v_3 = a_t^2 : b_t^2 : c_t^2, \quad V_1 : V_2 : V_3 = A_T^2 : B_T^2 : C_T^2,$$

so durchläuft M einen Kegelschnitt K, und m umhüllt einen Kegelschnitt k, wenn man $\frac{t_1}{t_2}$, $\frac{T_1}{T_2}$ unbeschränkt variiren lässt. Man kann durch Anwendung der Theorie der binären quadratischen Formen eine Relation (R) aufstellen, welche die zwei Werte t', t'' des Parameters $\frac{t_1}{t_2}$ verbindet, die zu den Schnittpunkten von K mit einer Tangente an k gehören.

Setzt man die Relation

$$a_t^2 A_T^2 + b_t^2 B_T^2 + c_t^2 C_T^2 = 0,$$

welche ausdrückt, dass M und m vereinigt liegen, in die symbolische Form:

$$P_T^2 p_t^2 = 0$$

und differentiirt sie vollständig, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{(t\,dt)}{\sqrt{(PP')^2 p_t^2 p_t'^2}} + \frac{(T\,dT)}{\sqrt{(pp')^2 P_T^2 P_T'^2}} = 0.$$

Betrachtet man nun $\frac{T_1}{T_2}$ als den Parameter einer bestimmten Tangente m an k, so gilt die obige Gleichung für die beiden Werte x, y von $\frac{t_1}{t_2}$, die den Schnittpunkten von m mit K angehören. Durch successive Einsetzung dieser Werte und Vergleichung beider Resultate erhält man die elliptische Differentialgleichung:

$$\frac{(x\,dx)}{\sqrt{(PP')^2 p_x^2 p_x'^2}} = \frac{(y\,dy)}{\sqrt{(PP')^2 p_y^2 p_y'^2}},$$

deren vollständiges Integral durch die Relation (R) unmittelbar gegeben wird, wenn man in dieselbe x, y statt t', t'' setzt.

Durch Annahme specieller Tripel quadratischer Formen kann man die Formeln beträchtlich vereinfachen.

Die Entwickelung des in der vorliegenden Note kurz angedeuteten Gedankenganges bildet den Inhalt eines späteren, den gleichen Titel tragenden Aufsatzes des Verfassers (Batt. G. XXIV. 128-140). Vi.

M. A. TYCHOMANDRITZKY. Die Ableitung der Grundsätze der Theorie der elliptischen Integrale unabhängig von der canonischen Form der Function unter dem Wurzelzeichen. Chark. Ges. 1883. 79-94. (Russisch.)

In seiner Note „Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale" (Math. Ann. XXII., siehe F. d. M. XV. 1883. 376, 395) hat der Verfasser gezeigt, wie man aus der Gleichung

$$Z(u+v)-Z(u-v)-2Z(v) = -\frac{2k^2 \operatorname{sn} v . \operatorname{cn} v . \operatorname{dn} v . \operatorname{sn}^2 u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u . \operatorname{sn}^2 v},$$

welches als ein Ausdruck des Additionstheorems der elliptischen Integrale zweiter Gattung angesehen werden kann, zu den Functionen Θ, Al oder allgemeiner zu den Hermite'schen „fonctions intermédiaires" übergeht. In dieser neuen Note hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, diesen natürlichen Uebergang von den elliptischen Integralen zu den allgemeinen Θ-Functionen auseinanderzusetzen, ohne dass man die Function unter dem Wurzelzeichen auf die canonische Form reducirt. Er nimmt also

$$R(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$$

und beweist die merkwürdige Identität:

$$2\sqrt{R(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{x-b}{2\sqrt{R(x)}}\right\}$$
$$=2\sqrt{R(y)}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{y-b}{2\sqrt{R(y)}}\right\},$$

wo b eine Constante ist.

Diese Identität führt dann leicht zum Theorem über die Vertauschung des Parameters und des Arguments und zum Additionstheorem zweiter Gattung. Der Uebergang von diesem Theorem zu den allgemeinen Θ-Functionen ist genau derselbe, welcher schon früher von dem Verfasser veröffentlicht worden ist.

Wi.

M. Tychomandritzky. Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale. Klein Ann XXV. 197-202. Chark. Ges. 1884. 187-196

In seinen früheren Arbeiten (Klein Ann. XXII. 450; Chark. Ges. 1883, s. das vorstehende Referat) hat der Herr Verfasser einen Weg angegeben, wie man, vom Additionstheorem der elliptischen Integrale 2ter Gattung ausgehend, zur Θ-Function oder dem Al(u) von Weierstrass kommt, ferner dass man auf demselben Wege zu allen „fonctions intermédiaires" von Briot und Bouquet (Théorie des fonctions elliptiques, 2 éd., p. 235) gelangt, und endlich, dass man dieses Verfahren von der canonischen Form des Radicanden unabhängig machen kann. Jetzt zeigt der Herr Verfasser, dass man auch direct von den Integralen zur Θ-Function durch eine elementare Rechnung gelangen kann, ohne das Additionstheorem zum Ausgangspunkte zu nehmen und ohne überhaupt irgend etwas ausser der Monodromie der oberen Grenze des Integrals erster Gattung, als Function seines Wertes betrachtet, zu kennen, wodurch sich ja die Periodicität der Integrale von selbst ergiebt. Unter Voraussetzung der Weierstrass'schen Normalform ergiebt sich so ein einfacher Uebergang vom elliptischen Integral zur σ-Function, die unter den „fonctions intermediaires" besonders ausgezeichnet ist. M.

G. H. Halphen. Note sur l'inversion des intégrales elliptiques. J. d. l'Éc. Polyt. Cah. LIV. 171-181.

Eine einfache Darstellung des Umkehrproblems, welches bekanntlich verlangt, $\sqrt{X}$ (wo X ein Polynom vierten Grades von x) und x zugleich durch elliptische Functionen eines und desselben Argumentes auszudrücken. Der Herr Verfasser wendet die Bezeichnungen und Formeln von Weierstrass an und beabsichtigt mit dieser Note, vorbereitende Formeln zum Verständnis einer grösseren Arbeit aus der Mechanik: „Sur une courbe élastique" zu geben, über welche in Abschnitt XI. berichtet werden wird. M.

T. J. Stieltjes. Sur quelques formules qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques. Amst. Verst. en Meded. (3) II. 101-104.

Einzelne Formeln zur Theorie der elliptischen Functionen. Nach einer Bemerkung des Verfassers können dieselben aus den Grundeigenschaften der Θ-Functionen und aus den Formeln von Gauss in der „Summatio quarundam serierum singularium" abgeleitet werden. G.

A. Mukhopâdhyày, A. Martin. Solution of question 7532. Ed. Times XLII. 121-122.

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}\right\}^{\frac{1}{2}}d\theta=\pi\sqrt{1-2^{-\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{2}{\pi}F(\sqrt{2}-1)\right).$$

Lp.

M. Falk. Beweis eines Satzes aus der Theorie der elliptischen Functionen. Acta Math. VII. 197-200.

Die Grössen K und K' sind bekanntlich durch die Werte der Integrale

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}$$

eindeutig definirt, wenn man von dem Gebiete k^2 alle reellen Werte von $-\infty$ bis 0 und von $+1$ bis $+\infty$ (incl. 0 und $+1$) ausschliesst und jeder der Quadratwurzeln denjenigen Wert beilegt, dessen erste Coordinate positiv ist. Es wird nun ein Beweis dafür gegeben, dass K, K' immer [illegible] von Null verschieden bleiben und dass K, K' [illegible] ordinaten haben.

E. Phragmén. Sur un théorème co[illegible] elliptiques. Acta Math. VII. 33-42.

Beweis des für die Theorie der elliptischen Functionen wichtigen Fundamentalsatzes: Jede analytische Function $\varphi(u)$, welche ein Additionstheorem besitzt, oder mit andern Worten, welche so beschaffen ist, dass eine algebraische Beziehung zwischen den Werten der Function besteht, welche den Werten des Arguments $u, v, u+v$ entsprechen, ist entweder 1) eine algebraische Function von u, oder 2) eine algebraische Function von $e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$, wo ω eine passend gewählte Constante bezeichnet, oder endlich 3) eine algebraische Function der Function

$$\wp(u|\omega,\omega') = \frac{1}{u^2} + \Sigma'\left(\frac{1}{(u-2\mu\omega-2\mu'\omega')^2} - \frac{1}{(2\mu\omega+2\mu'\omega')^2}\right),$$

$$\mu, \mu' = 0, 1, 2 \dots (\text{ausser } \mu = \mu' = 0)$$

wenn ω, ω' zwei passend gewählte Constanten sind. Hierbei sieht der Herr Verfasser ab von der Möglichkeit der Verallgemeinerung des Beweises für den allgemeinen Fall der Abel'schen Functionen, wie sie Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen betont.

M.

J. Töplitz. Ueber Additionstheoreme. Pr. Lissa.

Nachdem der Herr Verfasser den Gedanken angegeben, der der Aufstellung von Additionstheoremen zu Grunde liegt, und daran einige Notizen geknüpft hat, behandelt er nach der Abel-Jacobi'schen Methode die Additionstheoreme für Integrale von der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

in denen $f(x)$ eine ganze Function von x ist, und leitet dann diese Theoreme für die Kreis- und elliptischen Functionen ab.

M.

W. E. Story. The addition-theorem for elliptic functions. Newcomb Am. J. VII. 364-375.

Eine vollständige Herleitung des Additionstheorems für die elliptischen Functionen mit Angabe der fertigen Ausdrücke für

$$\mathrm{sn}(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n-1}),\ \mathrm{cn}(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n-1}),$$
$$\mathrm{dn}(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n-1}).$$

Veranlasst ist diese Darstellung dadurch, dass der Herr Verfasser bei den ihm bekannten Herleitungen die Untersuchung der Gültigkeit der Resultate in dem Falle vermisst hat, wo eine gewisse vermittelnde Gleichung

$$(p - \lambda p_1)^2 - (q - \lambda q_1)^2 R(x) = 0$$

gleiche Wurzeln hat. M.

A. R. Forsyth. The addition theorem for the second and third elliptic integrals. Mess. XV. 49-57.

Formeln für elliptische Integrale zweiter und dritter Gattung, die vier Argumente mit der Summe Null enthalten. So ist z. B. in Jacobi's Bezeichnung, wenn $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ ist:

$$E(u_1) + E(u_2) + E(u_3) + E(u_4)$$
$$= -\frac{k^2 s_1 s_2 s_3 s_4}{1 + k^2 s_1 s_2 s_3 s_4}\left(\frac{c_1 d_1}{s_1} + \frac{c_2 d_2}{s_2} + \frac{c_3 d_3}{s_3} + \frac{c_4 d_4}{s_4}\right),$$

wo $s_1, s_2, \ldots$ zur Abkürzung für $\mathrm{sn}\,u_1, \mathrm{sn}\,u_2, \ldots$ gesetzt ist. Das Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich noch in sehr mannigfaltiger Art umformen. Eine ähnliche Formel wird für $\Sigma\Pi(u_r, a)$ gegeben. Die Resultate werden durch Anwendung des Abel'schen Theorems gewonnen. Glr. (Lp.)

L. J. Rogers. Note on the porism of the inscribed and circumscribed polygon. Lond. M. S. Proc. XVI. 306-311.

Sind S und S' zwei Kegelschnitte und ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Wurzeln der Gleichung, die man erhält, wenn man die Discriminante von $\xi S - S'$ gleich Null setzt, dann ist es möglich, durch diese Wurzeln die Bedingung auszudrücken, dass ein Polygon von n Seiten gefunden wird, das dem Kegelschnitt S umbeschrieben und S' eingeschrieben ist. Dies wird hier gezeigt. Wenn alle drei Wurzeln ξ_1, ξ_2, ξ_3 positiv und von absteigender Ordnung der

Grösse nach, so ist die Bedingung:

$$\xi_3 = \xi_1 \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{n}, \quad \operatorname{mod} k = \sqrt{\frac{\xi_2-\xi_3}{\xi_1-\xi_3} \cdot \frac{\xi_1}{\xi_2}};$$

wenn aber eine Wurzel (ξ_3) negativ und $\xi_1 < \xi_2$, so ist die Be-dingung

$$\xi_2 \cdot k^2 \operatorname{cn}^2 \frac{2K}{n} = \xi_1 \operatorname{dn}^2 \frac{2K}{n}, \quad k = \sqrt{\frac{\xi_2-\xi_3}{\xi_1-\xi_3} \cdot \frac{\xi_1}{\xi_2}};$$

und allgemein, wenn die Wurzeln proportional $1, re^{\vartheta i}, re^{-\vartheta i}$, so lautet die Bedingung

$$r = \frac{2 \operatorname{dn} \frac{4K}{n}}{1 + \operatorname{cn} \frac{4K}{n}}, \quad k = \cos \tfrac{1}{2} . \operatorname{tg}^{-1} \frac{r \sin \vartheta}{1 + r \cos \vartheta}.$$

M.

M. da Silva. Sur une question de la théorie des for-tions. Belg. Bull. (3) X. 79-84.

P. Mansion. Rapport. Belg. Bull. (3) IX. 324-326.

Gudermann hat in Crelle J. XVIII. p. 164 ff. verschi Formeln über die elliptischen Functionen für drei und vier Argumente bekannt gemacht. Unter diesen Formeln man die folgende herausgreifen:

$$-k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s$$
$$- \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2},$$

worin $u+v+r+s = 0$ vorausgesetzt ist.

Herr Cayley hat eine allgemeinere Formel gegeben, welcher die vier Argumente beliebig sind. Herr Martins d Silva zeigt, dass die Cayley'sche Formel in einer von Rosenhain veröffentlichten Jacobi'schen enthalten ist (Mém. des sav. étr. de l'Ac. de Paris. XI. p. 375), giebt ihr verschiedene Formen und weist nach, dass sie zu verschiedenen interessanten Ergebnissen führt, die von H. J. S. Smith und anderen gefunden sind.

Mn. (Lp.)

J. Griffith. Abstract of some results with respect to doubly periodic elliptic functions of the second and third kinds. Lond. R. S. Proc. XXXVII. 206-209, 316-319.

I. 1) Es möge **am** definirt werden als die Umkehrung des lliptischen Integrals zweiter Gattung, $E(\mathbf{am}\, a) = a$. Setzt man erner, um abzukürzen:

$$f(a, b) = \sin\mathbf{am}\, a \cos\mathbf{am}\, b \varDelta\mathbf{am}\, b + \sin\mathbf{am}\, b \cos\mathbf{am}\, a \varDelta\mathbf{am}\, a$$
$$\div (1-k^2\sin^2\mathbf{am}\, a \sin^2\mathbf{am}\, b),$$

o haben wir als Fundamentalgleichung, der die neue Function inam genügt:

$$\sin\mathbf{am}\{a+b-k^2\sin\mathbf{am}\, a \sin\mathbf{am}\, b f(a, b)\} = f(a, b).$$

immt man nämlich an $\mathbf{am}\, a = \mathrm{am}\, \alpha$, $\mathbf{am}\, b = \mathrm{am}\, \beta$, so ist ann $f(a, b) = \sin\mathrm{am}(\alpha+\beta)$, und die Gleichung wird:

$$\text{in}\mathbf{am}\{a+b-k^2\sin\mathrm{am}\,\alpha\sin\mathrm{am}\,\beta\sin\mathrm{am}(\alpha+\beta)\} = \sin\mathrm{am}(\alpha+\beta),$$

$$\mathbf{am}\{a+b-E\mathrm{am}\,\alpha - E\mathrm{am}\,\beta + E\mathrm{am}(\alpha+\beta)\} = \sin\mathrm{am}(\alpha+\beta),$$

da $E\mathrm{am}\,\alpha = E\mathbf{am}\, a = a$ und ebenso $E\mathrm{am}\,\beta = b$, so ist Gleichung $\mathbf{am}\, E\mathrm{am}(\alpha+\beta) = \mathrm{am}(\alpha+\beta)$, was richtig ist]. so che Gleichungen giebt es, denen $\cos\mathbf{am}$ und $\varDelta\mathbf{am}$ bezw. n. Die neuen Functio en $\sin\mathbf{am}$, $\cos\mathbf{am}$, $\varDelta\mathbf{am}$ sind chaffen, dass:

bei

$$\sin\mathbf{am}\{a+4E+4i(K'-E')\} = \sin\mathbf{am}\, a,$$
$$\cos\mathbf{am}\{a+4E+4i(K'-E')\} = \cos\mathbf{am}\, a,$$
$$\varDelta\mathbf{am}\{a+4E+4i(K'-E')\} = \varDelta\mathbf{am}\, a,$$

ate, die sich ableiten lassen aus:

$$\int_0^{\sin^{-1}k} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.d\varphi$$
$$+i\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} - k^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\{1-k'^2\sin^2\varphi\}^{\frac{3}{2}}}\right\}$$
$$= E + i(K'-E').$$

2) Gleiche Resultate in betreff des Integrals dritter Gattung.

3) Bemerkungen über eine Function $\zeta(u)$, welche die Jabi'sche $Z(u)$ als besonderen Fall einschliesst.

II. 1) Ueber die Function $z(u)$, eine Ergänzung zu Jacobi's $Z(u)$.

2) Ableitung einer Function $\Phi(u)$ aus $z(u)$ [analog Jacobi's $\Theta(u)$].

Entwickelung von $\Phi(u)$ in eine hyperharmonische Reihe, die ungerade Vielfache von $\frac{\pi u}{2K'}$ enthält.

4) Einige Folgerungen aus den obigen Sätzen.

5) Ausdehnung der obigen Methode auf eine Function $\zeta_1(u)$, die mit den elliptischen Integralen dritter Gattung zusammenhängt. ($\zeta_1(u)$ ist noch eine Function, ähnlich wie $\zeta(u)$ im ersten Teile.)

Cly. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. On the quantities $K, E, J, G, K', E', J', G'$ in elliptic functions. Quart. J. XX. 313-361.

Diese umfangreiche Arbeit beschäftigt sich mit den 8 Fundamentalgrössen

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad E = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

$$K' = -i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$E' = -i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

nach der Bezeichnung von Jacobi, und

$$J = K-E, \quad G = E-k'^2K, \quad J' = K'-E', \quad G' = E'-k^2K',$$

(siehe Quart. J. XIX. 145). Auf die Darstellung dieser Grössen als Integrale folgen identische Relationen zwischen K, E, J, G, dann zwischen K^2, E^2, J^2, G^2, zwischen K, K' etc. und $\frac{\pi}{2}$, zwischen K, E etc. und $\frac{dK}{dh}, \frac{dE}{dh}$, etc. (wo $k^2 = h$), ferner Differentialgleichungen für K, k^2 etc., Werte für $\frac{d^2K}{dh^2}, \frac{d^2K'}{dh^2}$ etc.,

Ausdrücke für K', E', J', G' durch k, ferner für $J-G$, $E+G$, $E-J$, $J+G$ etc., $J'-G'$, erste und zweite Ableitungen von $J-G$ etc., Differentialgleichungen für $J-G$ etc. und angenäherte Werte von K, K' etc. für kleine k (§ 2-21). Die folgenden Paragraphen enthalten Differentialgleichungen für K, E etc., wenn k die unabhängige Variable, dann die Ableitungen nach q, ferner die Grössen KE, KJ etc., Ausdrücke für $\frac{4KE}{\pi^2}$, $\frac{4KJ}{\pi^2}$ etc. als q-Reihen oder Quotienten von q-Reihen, ebenso q-Reihen für $\frac{16k^2E^2}{\pi^4}$ etc. und $\frac{16k^2JG}{\pi^4}$ etc., ferner für Grössen, welche $E+2G$ etc. enthalten, Ausdrücke für $\frac{2E}{\pi}$ etc. als Quotienten von q-Reihen, und Quotientenformeln für $\frac{4E^2}{\pi^2}$ etc. und $\frac{4EJ}{\pi^2}$ etc. (§ 22-40). Im Folgenden werden die Functionen

$$\text{ez}\,x = \frac{E}{K}x + Z(x), \quad \text{iz}\,x = -\frac{J}{K}x + Z(x),$$

$$\text{gz}\,x = \frac{G}{K}x + Z(x),$$

wo

$$Z(x) = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

betrachtet (§ 41), dann die Functionen

$$\text{Ae}\,x = e^{\int_0^x \text{ez}\,x\,dx}, \quad \text{Ai}\,x = e^{\int_0^x \text{iz}\,x\,dx}, \quad \text{Ag}\,x = e^{\int_0^x \text{gz}\,x\,dx}$$

(§ 42). Die Formeln in §§ 24-29 werden symmetrischer, wenn statt J

$$I = -J$$

eingeführt wird (§§ 43-46). Es folgen Ausdrücke für $\frac{4K(E+I+G)}{\pi^2}$ etc. als q-Reihen (§ 47), dann die Grössen

$$U = \tfrac{1}{2}(J+G), \quad V = \tfrac{1}{2}(G+E), \quad W = \tfrac{1}{2}(E+I)$$

und endlich die Functionen $Q(\omega)$ und $Q'(\omega)$ des Herrn H. J. S. Smith (Messenger XIII. 1-54) (§§ 47-52). M.

J. W. L. Glaisher. On the Zeta-functions. Mess. XV 92-142.

Man bezeichne mit I und G die Grössen $E-K$ und $E-k'^2K$, mit I' und G' die correspondirenden Grössen, wenn der Modulus k in k' verwandelt wird. Die hauptsächlich betrachteten Zetafunctionen sind $\mathrm{iz}\,x$, $\mathrm{gz}\,x$, $\mathrm{ez}\,x$, die aus Jacobi's Zetafunction $Z(x)$ vermittelst der Gleichungen:

$$\mathrm{iz}\,x = \frac{I}{K}x+Z(x), \quad \mathrm{gz}\,x = \frac{G}{K}x+Z(x),$$

$$\mathrm{ez}\,x = \frac{E}{K}x+Z(x)$$

abgeleitet sind. Diese Functionen sind „quasi-periodisch" sowohl in Bezug auf $2K$ als auch auf $2iK'$. Man hat nämlich:

$$\mathrm{iz}(x+2mK+2niK') = 2mI-2niE'+\mathrm{iz}\,x,$$
$$\mathrm{gz}(x+2mK+2niK') = 2mG-2niG'+\mathrm{gz}\,x,$$
$$\mathrm{ez}(x+2mK+2niK') = 2mE-2niI'+\mathrm{ez}\,x.$$

Ausserdem:

$$\mathrm{iz}(x+K) = I+\mathrm{iz}\,x-k^2\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x},$$

$$\mathrm{iz}(x+iK') = -iE'+\mathrm{iz}\,x-\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{cn}\,x},$$

$$\mathrm{iz}(x+K+iK') = I-iE'+\mathrm{iz}\,x+\frac{\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}\,x};$$

nebst ähnlichen Formeln für die Functionen gz und ez, in denen I, E' bezw. durch G, G' und E, I' zu ersetzen sind. Aus der Function $Z(x)$ werden drei andere, durch die Suffixe 1, 2, 3 unterschiedene Functionen abgeleitet mit Hülfe der Formeln:

$$Z_1(x) = Z(x)+\frac{\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}\,x}, \quad Z_2(x) = Z(x)-\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{cn}\,x},$$

$$Z_3(x) = Z(x)-k^2\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x}{\mathrm{dn}\,x},$$

und aus $Z_1(x), Z_2(x), Z_3(x)$ werden neun andere Functionen $\mathrm{iz}_1 x, \mathrm{iz}_2 x, \mathrm{iz}_3 x, \ldots$ durch Formeln abgeleitet, die genau denen entsprechen, durch welche $\mathrm{iz}\,x, \ldots$ aus $Z(x)$ folgen, nämlich:

$$\mathrm{iz}_1 x = \frac{I}{K}x + Z_1(x), \quad \mathrm{gz}_1 x = \frac{G}{K}x + Z_1(x),$$

$$\mathrm{ez}_1 x = \frac{E}{K}x + Z_1(x).$$

In betreff der Periodicität verhalten sich die neun Functionen $\mathrm{iz}_1 x, \mathrm{iz}_2 x, \ldots$ ähnlich wie $\mathrm{iz}\, x, \ldots$.

Am passendsten betrachtet man das vollständige System der zwölf Zetafunctionen $\mathrm{iz}\, x, \mathrm{iz}_1 x, \ldots$, statt eine Grundform zu bevorzugen. Soll indes eine der Gruppen $\mathrm{iz}_1 x, \mathrm{gz}_1 x, \mathrm{ez}_1 x$ herausgegriffen werden, so zeigt sich die Gruppe $\mathrm{gz}_1 x$ am geeignetsten hierzu. So hat man z. B.:

$$\mathrm{iz}\, ix = -i\, \mathrm{ez}_2(x, k'), \quad \mathrm{iz}_1 ix = -i\, \mathrm{ez}_1(x, k'), \ldots,$$

und daher auch

$$\mathrm{ez}\, ix = -i\, \mathrm{iz}_2(x, k'), \ldots.$$

Dagegen verwandelt sich die Function gz durch Einsetzung von ix für x in sich selbst:

$$\mathrm{gz}\, ix = -i\, \mathrm{gz}_2(x, k'), \quad \mathrm{gz}\, ix = -i\, \mathrm{ez}_3(x, k'), \ldots$$

Die zwölf Zetafunctionen sind mit den zwölf elliptischen Functionen eng verknüpft:

$$\mathrm{iz}\, x = -k^2 \int_0^x \mathrm{sn}^2 x\, dx, \qquad \mathrm{iz}_1 x = \frac{1}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^x \mathrm{ns}^2 x\, dx,$$

$$\mathrm{gz}\, x = k^2 \int_0^x \mathrm{cn}^2 x\, dx, \qquad \mathrm{gz}_1 x = \frac{1}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^x \mathrm{ds}^2 x\, dx,$$

$$\mathrm{ez}\, x = \int_0^x \mathrm{dn}^2 x\, dx, \qquad \mathrm{ez}_1 x = \frac{1}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^x \mathrm{cs}^2 x\, dx,$$

u. s. w., wo ε unendlich klein ist.

Es werden Formeln gegeben, welche $\int \mathrm{sn}^4 x\, dx$ u. s. w. nebst $\int \mathrm{sn}^2 x\, \mathrm{cn}^2 x\, dx$ u. s. w. in Gliedern mit den zwölf Zetafunctionen ausdrücken. Ferner werden auch Systeme von Formeln mitgeteilt, welche die Ableitungen der elliptischen und der Zetafunctionen nach dem Modulus geben; z. B., wenn man h, h' statt k^2, k'^2 setzt:

$$2kk' \frac{d}{dk} \operatorname{sn} x = -\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{gz}_3 x \text{ u. s. w.},$$

$$2kk' \frac{d}{dk} k \operatorname{sn} x = -k \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{gz}_3 x \text{ u. s. w.},$$

$$2kk' \frac{d}{dk} \operatorname{sn} u = -\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u Z_3(u) \text{ u. s. w.},$$

$$2kk' \frac{d}{dk} k \operatorname{sn} u = -k \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u Z_3(u) \text{ u. s. w.},$$

wo u für $\frac{2Kx}{\pi}$ steht.

Andere Formeln beziehen sich auf die Theorie der zwölf Zetafunctionen, ihre q-Reihen und ihre Entwickelungen nach Potenzen von k. Die Schrift schliesst mit einer Liste von 32 unbestimmten Integralen, die in Gliedern mit den Zeta- und den elliptischen Functionen ausgewertet werden. Z. B.:

$$k'^2 \int \frac{dx}{1-\operatorname{sn} x} = -\operatorname{gz}_1 x + \operatorname{dc} x, \quad k^2 \int \frac{\operatorname{dn} x \, dx}{1+\operatorname{dn} x} = \operatorname{gz}_1 x - \operatorname{cs} x,$$

u. s. w. [In späteren Schriften über den Gegenstand hat der Verfasser es passender gefunden, die Endbuchstaben s, c, d statt der Suffixe 1, 2, 3 zu gebrauchen und die Abwesenheit eines Suffixes durch n darzustellen. So werden die vier Zetafunctionen $Z(x)$, $Z_1(x)$, $Z_2(x)$, $Z_3(x)$ geschrieben: zn x, zs x, zc x, zd x und die Functionen iz x, gz$_1 x$, ... wie folgt: izn x, gzs x, ... Aus verschiedenen Gründen passt diese Bezeichnung gut zur Bezeichnung der zwölf elliptischen Functionen.] Glr. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. On the square of the series in which the coefficients are the sums of the divisors of the exponents. Mess. XV. 156-163.

Vgl. Abschn. V. Cap. 2. pag. 234.

J. Griffiths. Results from a theory of transformation of elliptic functions. Lond. M. S. Proc. XVI. 83-108.

Die hier entwickelte Theorie der Transformation basirt auf der Annahme, dass eine Transformations-Gleichung aus zwei oder mehreren Gleichungen niederen Grades zusammengesetzt ist. Die Formen, welche hier benutzt werden, sind identisch mit folgenden:

$$(1) \qquad y = \sin(\vartheta + A + B + C + \cdots),$$

wo

$$\sin\vartheta = x, \quad \cos A = \frac{1-(1+\alpha'^2)x^2}{1-\alpha^2x^2}, \quad \sin A = \frac{2\alpha' x\sqrt{1-x^2}}{1-\alpha^2x^2},$$

$$\cos B = \frac{1-(1+\beta'^2)x^2}{1-\beta^2x^2}, \quad \sin B = \frac{2\beta' x\sqrt{1-x^2}}{1-\beta^2x^2}, \text{ etc}$$

und die Coefficienten von der Form

$$\alpha = k\,\mathrm{sn}\,\frac{2K}{n}, \; \alpha' = \mathrm{dn}\,\frac{2K}{n}, \; \beta = K\,\mathrm{sn}\,\frac{4K}{n}, \quad \gamma = K\,\mathrm{sn}\,\frac{6K}{n}, \text{ etc}$$

sind, wenn n der Grad der Transformation und $\frac{1}{2}(n-1)$ die Anzahl der Coefficienten.

$$(2) \qquad y = \sin(L + A + B + C + \ldots),$$

eine irrationale Transformationsgleichung, worin

$$\sin L = \frac{(1+k^2x)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad \cos L = \frac{1-(1+k^2)x^2}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$\sin A = \frac{2a'x\sqrt{1-x^2}}{1-a^2x^2}, \qquad \cos A = \frac{1-(1+a'^2)x^2}{1-a^2x^2},$$

$$\sin B = \frac{2b'x\sqrt{1-x^2}}{1-b^2x^2}, \qquad \cos B = \frac{1-(1+b'^2)x^2}{1-b^2x^2},$$

$$a \equiv k\,\mathrm{sn}\,\frac{dK}{n}, \quad a' \equiv \mathrm{dn}\,\frac{dK}{n}, \quad b \equiv k\,\mathrm{sn}\,\frac{2K}{n}, \text{ etc.};$$

$2n$ die Ordnung der Transformation und $n-1$ die Zahl der Coefficienten. Eng verbunden mit (2) ist die Gleichung

$$(3) \qquad y = \cos(A + B + C + \cdots),$$

d. h. $y =$ einer ganzen rationalen Function von x, dividirt durch eine ebensolche von demselben Grade. Ausserdem

$$(4) \qquad iy = \mathrm{tg}(X + X_1 + X_2 + \cdots),$$

die complementäre Gleichung, wo X, X_1, X_2, etc. Functionen von x und k.

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass die Formel (4) nicht nur die Jacobi'sche rationale Transformationsgleichung

$$y = \frac{x\,G_1(1, x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{G_2(1, x^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

wo G_1, G_2 ganze rationale Functionen von x^2 vom Grade $\frac{n-1}{2}$ sind, enthält, sondern auch andere wichtige Transformationsgleichungen. Im 2ten Teile ist die Theorie der Zusammensetzung auf die Transformation der θ-Functionen angewandt und ein neues Multiplicationstheorem hergeleitet. M.

J. Griffiths. On some consequences of the transformation formula $y = \sin(L + A + B + C + \cdots)$. Lond. M. S. Proc. XVII. 11-24.

Wenn

$$\cos A = \frac{1-(1+\alpha'^2)x^2}{1-\alpha^2x^2}, \quad \sin A = \frac{2\alpha' x\sqrt{1-x^2}}{1-\alpha^2x^2},$$

$$\cos B = \frac{1-(1+\beta'^2)x^2}{1-\beta^2x^2} \quad \text{etc.},$$

wo

$$\alpha^2+\alpha'^2 = 1 = \beta^2+\beta'^2 = \cdots,$$

$$\sin L = \frac{(1+k')x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad \cos L = \frac{1-(1+k')x^2}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

und $(1, x^2)^n$ = einer rationalen und ganzen Function von x von der Ordnung $2n$, und

$$\Pi\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2 u_0}\right)$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2\frac{K}{n}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2\frac{2K}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}K}\right),$$

so wird gezeigt, wie die drei geraden rationalen Transformationsgleichungen

$$y = \frac{x_1(1,x^2)^{n-1}}{(1,x^2)^n}, \quad y = \frac{(1,x^2)^n}{(1,x^2)^{n-1}}, \quad y = \frac{(1,x^2)^n}{x_1(1,x^2)^{n-1}}$$

aus der Formel

$$y = \sin(L + A + B + \cdots)$$

abgeleitet werden können, und zweitens, wie sich neue Resultate für die Transformation und Multiplication mit $2n$ für die Function sn und für die Θ-Functionen ergeben. M.

J. W. L. Glaisher. On the coefficients in the q-series for $\frac{\pi}{2K}$ and $\frac{2G}{\pi}$. Quart. J. XXI. 60-76.

Aus den hier gegebenen Reihenentwickelungen für $\frac{\pi}{2K}$ und $\frac{2G}{\pi}$, wo

$$G = E - k'^2 K,$$

zeigt sich, dass die Coefficienten der q-Reihen für $\frac{2G}{\pi}$ sich nur durch einfache numerische Vielfache von den entsprechenden Coefficienten in den q-Reihen für $\frac{\pi}{2K}$ und $\frac{8k^2k'^2K^3}{\pi^3}$ unterscheiden. M.

J. W. L. Glaisher. On the expression for the complete elliptic integral of the second kind as a series proceeding by sines of multiples of the modular angle. Phil. Mag. XIX. 504-510.

Die Reihe für E, welche der für K von Gudermann in Crelle J. XIX. 51-52 gegebenen entspricht, wird besprochen. Es wird auch bemerkt, dass die erhaltenen Resultate einen Teil eines allgemeineren Formelsystems ausmachen.

Gbs. (Lp.)

F. Mertens. Zur Theorie der elliptischen Functionen.
Wien Ber. XCI. 974-980.

Herr Weierstrass hat (Berl. Ber. 1883) gezeigt, dass die Grösse q sich in eine nach ganzen positiven Potenzen von k' fortschreitende Reihe entwickeln lässt, welche für alle Werte von k^2, deren absoluter Betrag nicht >1 ist, convergirt. Herr Mertens zeigt, wie man zu der erwähnten Reihe unmittelbar aus dem Theorem II. Art. 37 der Fundamenta nova gelangen kann.

M.

E. de Jonquières. Sur une relation de récurrence qui se présente dans la théorie des fonctions elliptiques.
C. R. CI. 414-417.

Herr Catalan hat in einer Abhandlung über eine gewisse Entwickelung des elliptischen Integrals erster Gattung (Congrès du Havre 1877) für die dort auftretenden Coefficienten folgende Recursionsformel gefunden:

$$n^2P_n-8(3n^2-3n+1)P_{n-1}+128(n-1)^2P_{n-2}=0$$

mit der Bedingung $P_0=1$, und gezeigt, dass alle Zahlen P_n ganze Zahlen, multiplicirt mit 2^n sind. Mit diesen Coefficienten hat sich Herr de Jonquières weiter beschäftigt und für dieselben folgende allgemeinere Reductionsformel aufgestellt:

$$n^2P_n-2^\alpha(3n^2-3n+1)P_{n-1}+2^{2\alpha+1}(n-1)^2P_{n-2}=0,$$

wo α irgend eine, selbst gebrochene oder negative Zahl sein kann.

M.

R. Lipschitz. Déduction arithmétique d'une relation due à Jacobi. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.
Acta Math. VII 95-180.

Rein arithmetischer Beweis der Formel

$$\vartheta(0,q)\,\vartheta_2(0,q).\vartheta_3(0,q)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{d\vartheta_1(w,q)}{dw}\right)_{(w=0)}$$

(Jacobi, Fundamenta art. 66 form 5) der auf dem Nachweis der Relation

$$\sum_a \sum_b \sum_c \sum_f \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + c^2 - \frac{f^2}{4}\right)(-1)^{a+\frac{f-1}{2}} f q^{a^2+\frac{b^2}{4}+c^2+\frac{f^2}{4}} = 0$$

beruht. M.

P. Appell. Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques. S. M F. Bull. XIII. 13-19.

H. Poincaré. Remarque sur l'emploi de la méthode précédente. S. M F. Bull. XIII. 19-27.

Da die Jacobi'schen Functionen

$$\theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{nx} q^{n^2}, \quad \theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{nx} q^{n^2}$$

ungerade sind, so hat man, wenn man setzt

$$\frac{\theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)}{\theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx},$$

$$A_{-n} = A_n.$$

Die Coefficienten A_n lassen sich nun auf folgende Weise finden. Aus der obigen Gleichung folgt

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{nx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{nx} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx}$$

und daraus

$$(-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=+\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}),$$

welche für $n = 0, 1, 2, \dots$ ein Gleichungssystem liefert, aus dem sich die Coefficienten finden lassen, und damit die Entwickelung

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = Q\left(1 + 4 \sum_{\mu=1} \frac{q^\mu}{1+q^{2\mu}} \cos\frac{\mu\pi z}{K}\right).$$

Die hier angewandte Methode, wonach Herr Appell auf die Betrachtung einer unendlichen Reihe linearer Gleichungen geführt wird, die unendlich viele Unbekannte enthalten, lässt sich, wie Herr Poincaré zeigt, auch auf andere Probleme an-

wenden. Zu dem Zweck behandelt Herr Poincaré ein solches Gleichungssystem von rein algebraischem Gesichtspunkte aus.

M.

R. Russell. A transformation in elliptic integrals and its application to spherical trigonometry. Quart. J. XX. 378-383.

Die Transformation ist folgende: Setzt man

$$\sin(\varphi - 2\psi) = k \sin\varphi,$$

so wird

$$\frac{2\,d\psi}{\sqrt{(1-k)^2 + 4k\sin^2\psi}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

und wenn man

$$\cot\psi = i\sin\chi$$

setzt, erhält man

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2i}{1+k} \cdot \frac{d\chi}{\sqrt{1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2\sin^2\chi}}.$$

Dies wird auf das sphärische Dreieck angewandt.

M.

A. Cayley. An algebraic transformation. Mess. XV. 58-59.

Beweis einer Transformation, die in einem Aufsatze von Herrn Hermite vorkommt: „Ueber die Theorie der Modulargleichungen" C. R. XLVIII. (1859). p. 1100. Schreibt man q für $1-2u^8$, l für $1-2v^8$, so wurde bei der Transformation fünften Grades die Modulargleichung von Jacobi in der Gestalt ausgedrückt:

$$\Omega = (q-l)^6$$
$$-256(1-q^2)(1-l^2)\{16ql(9-ql)^2+9(45-ql)(q-l)^2\} = 0;$$

und wenn man hierin $q = 1-2x$, $l = \frac{x+1}{x-1}$ setzt (oder, was dasselbe ist, zwischen q und l die Beziehung aufstellt

$q-l = 3+ql$, d. h. zwischen u und v die Beziehung $v^{-8} = 1-u^{8}$), so wird die Function Ω:

$$\Omega = \frac{64}{(1-x)^4}\{(x^2-x+1)^3+2^7(x^2-x)^2\}$$
$$\times\{(x^2-x+1)^3+2^2.3^3(x^2-x)^2\}.$$

Glr. (Lp.)

F. Rohde. Zur Transformation der Thetafunctionen.
Hoppe Arch. (2) III. 138-213.

Der Verfasser beschäftigt sich damit, für die Transformation dritter und fünfter Ordnung Relationen zwischen den transformirten und den ursprünglichen Thetafunctionen herzustellen.

Für die Untersuchungen des § 2 bilden die vier Gleichungen:

$$\vartheta_\alpha(3v, 3\tau)+x_\alpha\vartheta_\alpha\left(v, \frac{\tau}{3}\right) = x'_\alpha\,\vartheta_\alpha^3(v, \tau) \qquad (\alpha=0,1,2,3)$$

mit unbestimmten Coefficienten x, x' und die zwölf aus ihnen durch Aenderung von v um halbe Perioden hervorgehenden den Ausgangspunkt. Diese Gleichungen dividire man links und rechts durch $\vartheta_0^3(v, \tau)$ und forme sie so um, dass sie ausser den Quotienten:

$$\frac{\vartheta_\alpha(v, \tau)}{\vartheta_0(v, \tau)},\quad \frac{\vartheta_\alpha(3v, 3\tau)}{\vartheta_0(3v, 3\tau)},\quad \frac{\vartheta_\alpha\left(v, \frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{3}\right)} \qquad (\alpha=1,2,3)$$

nur noch die zwei Quotienten:

$$\frac{\vartheta_0(3v, 3\tau)}{\vartheta_0^3(v, \tau)},\quad \frac{\vartheta_0\left(v, \frac{\tau}{3}\right)}{\vartheta_0^3(v, \tau)}$$

enthalten; die ersteren drücke man durch elliptische Functionen aus, indem man diese gleichzeitig durch ihre Entwickelungen in unendliche Reihen ersetzt, die letzteren entwickele man mit Hülfe unbestimmter Coefficienten y, y' nach Potenzen derselben Variablen. Durch Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen entstehen dann aus den obigen sechzehn Gleichungen Relationen zwischen den unbestimmten Coefficienten x, x', y, y' und aus

ihnen endlich durch Elimination dieser Grössen die gewünschten Gleichungen zwischen den Nullwerten der zwölf Functionen

$$\vartheta_\alpha(v,\tau)=\vartheta_\alpha,\quad \vartheta_\alpha(3v,3\tau)=O_\alpha,\quad \vartheta_\alpha\left(v,\frac{\tau}{3}\right)=O'_\alpha$$

$$(\alpha=0,1,2,3).$$

§ 3 behandelt auf die nämliche Weise den Fall der Transformation fünfter Ordnung.

Für den weiteren Teil der Arbeit stellt sich der Verfasser die folgende Aufgabe: Nennt man die $4p+4$ aus

$$\vartheta_\alpha(pv,p\tau),\quad \vartheta_\alpha\left(v,\frac{\tau+\varrho}{p}\right),\qquad (\varrho=0,1,\ldots,p-1)$$

für $\alpha=0,1,2,3$ hervorgehenden Functionen die Repräsentanten der p^{ten} Ordnung, so sollen unter der Voraussetzung, dass p eine ungerade Primzahl ist, die Producte der Repräsentanten der $(p-1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit einer beliebigen fundamentalen Thetafunction durch die Repräsentanten der p^{ten} Ordnung ausgedrückt werden. Die Lösung dieser Aufgabe ergiebt sich aus den zuerst von Herrn Schröter in seiner Inaugural-Dissertation „De aequationibus modularibus" aufgestellten Thetaformeln, wenn man noch die darin auftretenden Teilwerte der Repräsentanten der p^{ten} Ordnung durch diese selbst ausdrückt. Dazu bedient sich der Verfasser derjenigen Formeln, welche aus der bekannten Relation:

$$\vartheta_3(v,\tau)=\sum_\mu e^{\pi i(\mu^2\tau+2\mu v)}\,\vartheta_3(pv+p\mu\tau,p^2\tau)\qquad(\mu=0,1,\ldots,p-1)$$

hervorgehen, wenn man in ihr τ durch $\frac{\tau+2^{\nu}\varrho}{p}$ ersetzt und sodann das für $\varrho=0,1,\ldots,p-1$ entstehende System von p Gleichungen nach den auf den rechten Seiten vorkommenden Thetafunctionen als Unbekannten auflöst.

In den §§ 5 und 6 sind die gewonnenen Formeln für die Fälle der Transformation dritter und fünfter Ordnung verwertet.

Kr.

A. Cayley. A verification in regard to the linear transformation of the theta-functions. Quart J. XXI. 77-84.

Die Bezeichnungen sind die von Smith in dessen nicht veröffentlichtem „Memoir on the Theta and Omega functions", dessen $\vartheta_{\mu,\nu}$ gleich dem Hermite'schen (Liouville J. III. 27-36, 1858), multiplicirt mit i^{mn}, und infolge dessen tritt in dem Werte für δ, der hier gegeben wird, der Factor $i^{\mu\nu-mn}$ auf. Wenn nämlich

$$\omega = \frac{c+d\Omega}{a+b\Omega}, \quad \text{wo} \quad ad-bc = 1,$$

so lautet die Transformationsformel:

$$\vartheta_{\mu\nu}\left\{(a+b\Omega)\frac{\pi x}{h},\ \Omega\right\} = Ce^{-i\pi b(a+b\Omega)\frac{x^2}{h^2}}\vartheta_{mn}\left(\frac{\pi x}{h},\ \omega\right),$$

wo

$$m = a\mu + b\nu + ab, \quad n = c\mu + d\nu + cd,$$

und je nachdem b positiv oder negativ, ist

$$C = \frac{\delta H}{\sqrt{i(a+b\Omega)}} \quad \text{oder} \quad C = \frac{\delta H}{\sqrt{i(a+b\Omega)}}$$

und δ, H sind achte Einheitswurzeln:

$$\delta = e^{\frac{1}{4}\pi i(ac\mu^2+2bc\mu\nu+bd\nu^2+2abc\mu+2abd\nu+ab^2d)}\,i^{\mu\nu-mn},$$

$$H = \left(\frac{b}{a}\right)i^{\frac{1}{2}a} \qquad (b \text{ positiv, } a \text{ ungerade}),$$

$$H = \left(\frac{a}{b}\right)i^{\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}(a-1)(b-1)} \qquad (b \text{ positiv und ungerade}),$$

$$H = \left(\frac{-b}{-a}\right)i^{\frac{1}{2}a} \qquad (b \text{ negativ, } a \text{ ungerade}),$$

$$H = \left(\frac{-a}{-b}\right)i^{\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}(a+1)(b+1)} \qquad (b \text{ negativ und ungerade}).$$

M.

C. H. Kummel. The quadric transformation of elliptic integrals, combined with the algorithm of the arithmetico-geometric mean. Wash. Bull. VII. 102-121.

Der vorliegende Aufsatz hat den Zweck, den Vorteil des Gauss'schen Algorithmus des arithmetisch geometrischen Mittels an der hier durchgeführten Transformation der elliptischen Functionen zu zeigen. M.

L. Kiepert. Ueber eine Resolvente derjenigen algebraischen Gleichung, von welcher in der Theorie der elliptischen Functionen die Teilung der Perioden abhängt. Gött. N. 256-281.

Mitteilung einiger Resultate aus der grösseren Abhandlung in Klein Ann. XXVI (siehe das folgende Referat). Sie betreffen die Eigenschaften der speciellen Teilungsgleichung, die Einführung der Grösse $f\left(\frac{\tilde{\omega}}{n}, \tilde{\omega}'\right)$ und ihre Bedeutung für die Transformation der elliptischen Functionen, das Verhalten der Grösse $Q(\omega, \omega')$ bei einer linearen Transformation der Perioden, die Untersuchung der Fälle, in welchen n eine Primzahl von der Form $bl+1$ ist, oder eine zusammengesetzte Zahl von der Form $bl+1$, oder durch 3 teilbar ist. M.

L. Kiepert. Ueber Teilung und Transformation der elliptischen Functionen. Klein Ann. XXVI. 369-454.

Diese Abhandlung schliesst sich an die früheren des Herrn Verfassers in Kronecker J. LXXXVII. 199-216, LXXXVIII. 205-212 und XCV. 218-231 an (F. d. M. XI. 1879. 295 und XV. 1883. 391). Die von Herrn Kiepert eingeführte Hülfsgrösse f (siehe unser Referat F. d. M. XI. 1879. 295), welche die Eigenschaft besitzt, dass sich alle übrigen bei der Transformation auftretenden Grössen durch sie und die Invarianten g_2, g_3 rational ausdrücken lassen, erschien, besonders nachdem Herr Klein gefunden, dass durch passende Wahl von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in der linearen Function $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$, die für τ gesetzt werden kann,

$$\tau^{n-1} \qquad f^{n-1}/^{n} \qquad (\Delta = g_2^3 - 27g_3^2)$$

gemacht werden kann, als der vornehmste Repräsentant einer ganzen Gattung von Hülfsgrössen, die nicht nur für die Transformation, sondern auch für die Algebra von besonderer Wichtigkeit sind, und die zu einander in inniger Beziehung stehen. Deshalb wird hier eine vollständige Theorie der f-Gleichung in

ihrem Zusammenhange mit der Teilung und mit der Transformation der elliptischen Functionen gegeben. Den Ausgangspunkt bildet die Untersuchung der Teilwerte von $\wp$, d. h. derjenigen Werte von $\wp(u)$, bei denen u der n^{te} Teil einer Periode ist. Die von einander verschiedenen Teilwerte sind Wurzeln einer „speciellen Teilungsgleichung", deren Coefficienten ganze rationale Functionen von g_2, g_3 sind. Für eine zusammengesetzte Zahl n lassen sich alle Teilwerte $\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$, bei denen die Zahlen λ, μ, n einen gemeinsamen Factor haben, absondern, wodurch eine Reduction der Teilungsgleichung eintritt. Ordnet man die genannten Teilwerte in Gruppen und bildet cyklische Functionen $C_{\lambda\mu}$ der Teilwerte einer solchen Gruppe, so erhält man algebraische Gleichungen zwischen $C_{\lambda\mu}$ und g_2, g_3, die „Resolventen" der reducirten Teilungsgleichung. Diejenigen, welche zur Transformation der elliptischen Functionen führen, nehmen eine hervorragende Stelle ein. Unter den charakteristischen Darstellungen von f, mit deren Hülfe das Transformationsproblem gelöst wird, sind die folgenden beiden hervorzuheben:

1) Ist

$$h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}, \quad Q(\omega,\omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu}),$$

so wird

$$Q^{24}(\bar{\omega}, \omega') = \Delta(\bar{\omega}, \bar{\omega}') = g_2^3 - 27g_3^2 \quad \text{und} \quad f = \frac{Q\left(\frac{\bar{\omega}}{n}, \omega'\right)}{Q^{2}(\bar{\omega}, \bar{\omega}')};$$

2) ist n ungerade, so ist bei der Darstellung von

$$\bar{\wp}(u) = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\bar{\omega}}{n}, \bar{\omega}'\right)$$

als rationale Function von $\wp u = s$ der Nenner das Quadrat einer ganzen Function $P(s)$, und für die Gleichung

$$P(s) = 0$$

wird $\pm f^{-n+3}$ die Discriminante. Mit Hülfe einer partiellen Differentialgleichung, welcher die Function $f^3 P(s)$ genügt, ergeben sich die Coefficienten von $P(s)$ als Functionen von f und den partiellen Ableitungen von f nach g_2, g_3, und daraus die Darstellung von

$\bar{\sigma}(u)$ und $\bar{\sigma}\left(u \middle| \frac{\bar{\omega}}{n}, \bar{\omega}'\right)$. Auch die transformirten Invarianten ergeben sich aus dieser Differentialgleichung. Der Schwerpunkt der ganzen Untersuchung liegt also in der Bildung der f-Gleichung und ihrer Wurzeln. M.

E. W. Fiedler. Ueber eine besondere Klasse irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Wolf Z. XXX. 129-229.

Die Abhandlung gehört zu der Gruppe derjenigen Untersuchungen, welche die Herren Klein, Gierster, Hurwitz, Dyck u. a. auf Grund der von Herrn Klein begründeten Theorie der elliptischen Modulfunctionen über die Modulargleichungen und Modularcorrespondenzen veröffentlicht haben. Aus der Transformation der sogenannten Hauptmoduln entspringen neue, den gewöhnlichen Modulargleichungen zwischen $\varkappa^2$, λ^2 völlig analoge Gleichungen. Sind ferner $M_1, M_2, \dots$ die Moduln eines zur ϱ^{ten} Stufe gehörigen vollen Systems, so findet zwischen $M_1, M_2, \dots$ einerseits und den transformirten Werten $M_1, M_2, \dots$ andererseits, für jeden zu ϱ relativ primen Transformationsgrad, ein Entsprechen statt, welches nach Grad, Galois'scher Gruppe und Vertauschbarkeit der Argumente mit den eigentlichen Modulargleichungen für dasselbe ϱ übereinstimmt. Dieses Entsprechen ist, da den zwischen den Moduln des Systems bestehenden algebraischen Relationen Rechnung getragen werden muss, in geometrischer Deutung eine Correspondenz auf einer Grundcurve höheren Geschlechtes. Diese Modularcorrespondenzen hat Herr Gierster eingehend bearbeitet, um Klassenzahlrelationen höherer Stufe aufzustellen. Auf das Studium der überall endlichen Integrale der Grundcurve, als einer allgemeineren Art von Modulfunctionen, und der zugehörigen θ-Functionen gründete dann Herr Hurwitz seine principielle Erledigung der Frage nach der algebraischen Darstellung der Modularcorrespondenzen. Er löste in seiner Abhandlung: „Ueber die Klassenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe“ (Leipz. Ber. 1885, p. 222; s. Abschn. III. S. 157) die Frage

nach der Existenz und der allgemeinen Form einer zur Definition hinreichenden Gleichung. Herr Fiedler macht nun den Versuch, im Falle eines gegebenen Modulsystems die Definitionsgleichung auf Grund gewisser fundamentaler und charakteristischer Eigenschaften der Correspondenz wirklich herzustellen. Eine Modularcorrespondenz hat nämlich die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man ihre entsprechenden Elemente erstens einer gewissen Gruppe linearer simultaner Transformationen und zweitens bestimmten Vertauschungen unterwirft.

Die Untersuchungen des Herrn Fiedler betreffen nun eine besondere Klasse irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Legendre, Gützlaff und Herr Schröter haben bekanntlich solche Modulargleichungen in irrationaler Form aufgestellt, die oft eine ausserordentlich einfache Gestalt annehmen. Algebraisch ausgezeichnet sind diejenigen Fälle, in denen die irrationale Modulargleichung, zusammen mit den Relationen zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$ und $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda'}$ sowie zwischen den Quadraten dieser Moduln, das genaue Aequivalent der gewöhnlichen Modulargleichung bildet, in denen daher eine einzige Gleichung zwischen den Modulpaaren zur vollständigen Definition der zugehörigen Modularcorrespondenz ausreicht. Die vorliegende Abhandlung umfasst nun die Theorie der so umschriebenen besonderen Klasse irrationaler Modulargleichungen der angegebenen Modulsysteme 16ter und 8ter Stufe. Fertige Gleichungen werden gegeben für:

(A) $n \equiv 7 \mod 16$, $n = 7, 23, 39, 55, 71$;
$n \equiv 15 \mod 16$, $n = 15, 31, 47, 79$;
$n \equiv 3 \mod 8$, $n = 35$;
$n \equiv 5 \mod 8$, $n = 21$;

(B) $n \equiv 3 \mod 8$, $n = 3, 11, 19, 27$.

M.

G. Pick. Zur Lehre von den Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Wien. Ber. XCI. 138-149.

Es werden zahlentheoretische Eigenschaften der Coefficienten der Modulargleichungen bewiesen. M.

H. v. Mangoldt. Ueber eine Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte. Gött. N 313-319

Jede eindeutige Function von τ, welche im Innern der positiven Halbebene überall den Charakter einer rationalen Function hat, lässt sich nach Weierstrass (Berl. Ak. Abh 1876) darstellen als Quotient zweier Producte, deren Factoren sämtlich die Form haben

$$(k\tau + l).e^{g(\tau)},$$

wo k, l Constante bedeuten, und $g(\tau)$ eine eindeutige Function von τ bezeichnet, welche im Innern der positiven Halbebene überall den Charakter einer ganzen Function besitzt. Bei manchen elliptischen Modulfunctionen ist nun zwar die Verteilung der Null- und Unendlichkeits-Stellen im Innern der positiven Halbebene bekannt, so dass man die linearen Bestandteile der Factoren, welche bei der erwähnten Darstellung dieser Functionen durch unendliche Producte auftreten, ohne weiteres angeben kann, aber die Bestimmung der hinzuzufügenden, die Convergenz bewirkenden Zusatzfactoren $e^{g(\tau)}$ ist für die Functionen dieser Art noch in keinem speciellen Falle gemacht. Diese Bestimmung wird in vorliegender Abhandlung ausgeführt für die Function

$$\frac{\theta(\tau) - \theta(\varrho)}{\theta(\tau) - \theta(\sigma)} \qquad (k^2 = \theta(\tau)),$$

wo ϱ, σ irgend zwei im Innern der positiven Halbebene liegende nicht äquivalente Werte von τ sind. Alsdann werden ähnliche Sätze, wie die für die Function $k^2 = \theta(\tau)$ hergeleiteten, auch für die sogenannte absolute Invariante der elliptischen Functionen

$$j(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

aufgestellt. M.

Brioschi. Sur quelques équations différentielles. Klein Ann. XXVI. 106-109.

Hurwitz. Ueber einige besondere homogene lineare Differentialgleichungen. Klein Ann. XXVI. 117-126.

Siehe Abschn. VI. Cap. 5. S. 321.

F. Klein. Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Functionen. Klein Ann. XXVI. 455-467.

F. Klein. Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen. Leipz. Ber. 70-91.

G. Morera. Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Teilung und der Transformation der elliptischen Functionen. Klein Ann. XXV. 208-211.

G. Morera. Zur Transformation und Teilung der elliptischen Functionen. Leipz. Ber. 302-313.

G. Morera. Intorno alla risoluzione di certe equazioni modulari. Lomb. Rend. (2) XVIII. 629-634.

G. Pick. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. Klein Ann. XXV. 433-448, Leipz. Ber. 15-24.

G. Pick. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. II. Klein Ann. XXVI. 219-230.

Th. Molien. Ueber gewisse, in der Theorie der elliptischen Functionen auftretende Einheitswurzeln. Leipz. Ber. 25-38.

P. Biedermann. Ueber Multiplicatorgleichungen höherer Stufe. Leipz. Ber. 201-221.

Vorstehende Arbeiten über die elliptischen Functionen behandeln insgesamt eine Reihe von Problemen, auf welche Herr F. Klein bei seinen Untersuchungen über die Theorie der genannten Functionen geführt worden ist, und die er teils selbst

in seinen Abhandlungen über die Transformation der elliptischen Functionen und über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen (siehe F. d. M. XI.-XVI. 1879-1884) angegriffen, teils seinen Schülern zur Bearbeitung vorgelegt hat. In der ersten angeführten Note, in der Herr Klein selbst ein zusammenhängendes Referat über die einschlägigen Arbeiten (einige demnächst erscheinende Dissertationen inbegriffen) giebt, verteilt er selbst den Gesamtstoff auf zwei Abschnitte. Einmal nämlich handelt es sich um die weitere Durchführung jenes Programms einer reinen Theorie der elliptischen Modulfunctionen, welches sich aus den Untersuchungen des Herrn Klein im 14. und 15. Bande der Annalen entwickelt hat, andererseits aber um die Aufgabe, die betreffenden Ueberlegungen mit der eigentlichen Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere mit den Fundamentalformeln, wie sie Weierstrass in seinen Vorlesungen zu geben pflegt, in Verbindung zu bringen. Dieses Programm verlangt nicht bloss die Untersuchung der Modulfunctionen im engeren Sinne, d. h. der Functionen des Periodenverhältnisses ω, sondern weitergehend die der Modulformen, d. h. der homogenen Functionen der Perioden ω_1, ω_2, wie solche der ersten Stufe Herr Hurwitz im 18. Bande der Math. Annalen betrachtet hat. Diesem Gegensatze der Modulfunctionen und Modulformen entsprechend treten an die Seite der Modulargleichungen die Multiplicatorgleichungen, wo unter einem Multiplicator ein Quotient verstanden wird, dessen Zähler der transformirte Wert einer Modulform ist und dessen Nenner durch den anfänglichen Wert der Modulform gegeben wird. Durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz der im Nenner des Multiplicators stehenden Modulform verwandelt sich die Multiplicatorgleichung in eine solche, welche den transformirten Wert einer Modulform von den gegebenen Werten irgendwelcher anderen Modulformen abhängig macht, und darin liegt die Bedeutung dieser Multiplicatorgleichungen. Herr Biedermann hat insbesondere diejenigen Multiplicatorgleichungen untersucht, zu welchen das Studium der Weierstrass'schen Function

$$\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2) = -e^{-\frac{(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2n^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

führt. Als Wurzeln der Multiplicatorgleichung müssen dann die Quotienten

$$\chi_{\lambda\mu} = \frac{\sigma_{\lambda\mu}(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)}{\sigma_{\lambda\mu}(\omega_1, \omega_2)}$$

genommen werden, wo a, b, c, d ganze Zahlen, so dass $ad - bc = n$, dem Grade der Transformation. Die Bedeutung dieser Theorie liegt darin, dass alle die Eigenschaften, welche beispielsweise Joubert für die Jacobi'schen Multiplicatorgleichungen, die ersten einfachsten Beispiele, nachweist, lediglich als einzelne Glieder einer ganzen Kette von Sätzen erscheinen.

Herr Molien weist nach, dass sich das Verhalten der in der Theorie der linearen Transformation der ϑ-Functionen als Factor in der Transformationsgleichung auftretenden 8ten Einheitswurzel, sowie das der Hermite'schen Functionen $\chi(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ vom Standpunkte der Weierstrass'schen Theorie aus, soweit es auf diese Einheitswurzel Bezug hat, aus dem Verhalten einer einzigen Function, der 24ten Wurzel aus der Discriminante:

$$\sqrt[24]{\Delta} = \sqrt[24]{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

erschliessen lässt. Der Factor, um welchen sich $\sqrt[24]{\Delta}$ bei linearer Transformation der Perioden ändert, wird in der Weise bestimmt, dass die Reihenentwickelung für $\Pi(1-q^{2\nu})$ den Ausgangspunkt bildet und auf diese das Cauchy'sche Verfahren der Reihenvergleichung (Bull. Soc. Phil. 1817) angewandt wird.

Der Fortschritt der neueren Theorie der elliptischen Functionen, dass vor dem Eingehen auf $\varkappa^2$ und höhere Functionen des Periodenquotienten zunächst die absolute Invariante in Betracht gezogen wird, wird von Herrn Pick verwertet, um einen einfachen Beweis für jenen Hauptsatz aus der Theorie der complexen Multiplication zu geben, der gelegentlich von Abel („Solution d'un problème etc." Oeuvres compl. I. 426) angedeutet, späterhin von Herrn Kronecker (Berl. Ber. 1857, 1862 etc.) nebst einer grossen Zahl weiterer Eigenschaften der Gleichungen für die singulären Moduln eingehend erörtert worden ist. Eine Ergänzung dieser Entwickelungen enthält die zweite Abhandlung

gleichen Titels, indem sie einen Beweis für den Satz giebt, dass die Gleichungen der complexen Multiplication irreducibel sind, selbst nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante, zu welcher die betreffenden singulären Moduln gehören.

Im engen Zusammenhang mit der Abhandlung des Herrn Klein: „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade" (Klein Ann. XV. 252-282; siehe F. d. M XI. 1879, p. 74) steht die erstgenannte Arbeit des Herrn Morera. Es werden die Bildungsgesetze für einige Systeme gegeben, welche bei der n-Teilung und der Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen eine wichtige Rolle spielen. n wird als ungerade Primzahl vorausgesetzt.

Das Problem der n-Teilung, also auch das der Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen war von Herrn Klein (Leipz. Ber. 1884, siehe F. d. M. XVI. 1884. 397) für alle durch 3 nicht teilbaren ungeraden Zahlen n auf die Bestimmung gewisser Moduln n^{ter} Stufe:

$$A_0;\ z_1, z_2, \ldots, z_{\frac{n-1}{2}}$$

zurückgeführt. Das A_0 ist $= \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ und kann dementsprechend als Wurzel einer mehrfach untersuchten Multiplicatorgleichung berechnet werden, worauf aus bekannten gruppentheoretischen Principien folgt, dass die weitere Bestimmung der $z_1, z_2, \ldots, z_{\frac{n-1}{2}}$ nur noch Wurzelzeichen erfordert. Herr Morera zeigt in den folgenden Abhandlungen, wie man die Grössen, aus denen die betreffenden Wurzeln zu ziehen sind, im Falle eines primzahligen n ($n > 3$) berechnen kann.

In der zweiten Notiz des Herrn Klein in den Leipz. Ber. referirt derselbe über Untersuchungen, welche Herr Fricke über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen angestellt hat, und deren Resultate demnächst in einer Dissertation veröffentlicht werden sollen. Die Klein'sche Betrachtung der Kreisbogendreiecke der ω-Ebene und der aus ihnen gebildeten Fundamentalpolygone ergab, dass für $n = 3, 4, 5$ sich sämtliche Modul-

functionen der zugehörigen Stufe rational je durch einen Hauptmodul darstellen lassen, welcher, wenn man die Modulfunction der ersten Stufe J als gegeben ansieht, beziehungsweise mit einer der durch die regulären Körper definirten Irrationalitäten coincidirt. Diese Methode führte für $n = 7$ und $n = 11$ auf grosse Complicationen, scheint also auf kleine Stufenzahlen beschränkt. Herr Fricke hat nun die kleinen Werte von n sämtlich in dem angedeuteten Sinne discutirt, und dies ausgeführt für $n = 6, 8, 10$ und 16. M.

F. Klein. Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe. Leipz. Abhandlungen No. 4.

Nach Herrn Klein bezeichnet man eine Function zweier Variabeln ω_1, ω_2 als eine Modulfunction der n^{ten} Stufe, wenn sie bei allen ganzzahligen linearen Transformationen von ω_1 und ω_2, welche die Determinante 1 besitzen und (mod. n) der Identität congruent sind, ungeändert bleibt. Hatte Herr Klein in früheren Abhandlungen diese Functionen für sich untersucht, so handelt es sich im vorliegenden Aufsatze namentlich um den Zusammenhang derselben mit den aus der Theorie der elliptischen Transcendenten bekannten Functionen. Hier werden von Wichtigkeit die auch an sich interessanten „elliptischen Normalcurven". Darunter ist zu verstehen jede Curve, welche durch n Gleichungen der Gestalt

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho x_0 = A.\prod_1^n \sigma(u-a_i), \\ \varrho x_1 = B.\prod_1^n \sigma(u-b_i), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varrho x_{n-1} = N.\prod_1^n \sigma(u-n_i) \end{cases}$$

definirt wird, wo $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ homogene Punktcoordinaten in einem Raume von $n-1$ Dimensionen, $\sigma(u)$ die Weierstrass'sche

Function und $A, B, \ldots, a_i, b_i \ldots$ Constanten bedeuten, zwischen welchen die Relationen $\Sigma a_i = \Sigma b_i = \cdots = \Sigma n_i = 0$ bestehen.

Die hauptsächlichen Eigenschaften dieser Curven, welche Herr Klein auf Grund von Sätzen der Theorie der elliptischen Functionen ableitet, sind diese:

Die Ordnung der Curve ist gleich n. Alle überhaupt möglichen Normalcurven n^{ter} Ordnung sind durch Collineationen des Raumes von $n-1$ Dimensionen in einander überführbar. Die Normalcurve geht, den Substitutionen

$$u' = \pm u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

entsprechend, durch $2n^2$ Collineationen des Raumes in sich über.

Durch die Curve gehen $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige quadratische Flächen, welche, für $n > 3$, zu ihrer Definition ausreichen.

Je nach der Wahl des Coordinatensystems verändert sich natürlich die analytische Darstellung der Curve. In dieser Hinsicht sind zwei Darstellungen von besonderem Interesse. Die eine, die „kanonische" Darstellung, entsteht, wenn die Grössen x_i lauter elliptischen Functionen erster Stufe proportional gesetzt werden, etwa wenn für einen ungeraden Wert von n (auf welchen Fall sich der Herr Verfasser der einfacheren Darstellung halber durchgehends beschränkt)

$$x_0 : x_1 : \cdots : x_{\frac{n-1}{2}} : x_{\frac{n+1}{2}} : \cdots : x_{n-1} = 1 : p(u) : \cdots : p(u)^{\frac{n-1}{2}} : p'(u) : \cdots : p'(u)\, p(u)^{\frac{n-3}{2}}$$

gesetzt wird. Die andere Darstellung legt das sogenannte „singuläre" Coordinatensystem zu Grunde. Die Normalcurve enthält nämlich n^2 Punkte, in welchen die Schmiegungsebene der Curve n-punktig berührt. Diese Punkte sind diejenigen, denen die Parameter-Werte

$$u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

zukommen. Bezeichnet man einen solchen Punkt kurz durch

(λ, μ), so werden nach dem Abel'schen Theorem immer die Punkte einer Horizontalreihe im nachfolgenden Schema:

$$\begin{cases} 0,0 & 1,0 & 2,0 & \ldots (n-1),0 \\ 0,1 & 1,1 & 2,1 & \ldots (n-1),1 \\ \vdots & & & \\ 0,(n-1) & 1,(n-1) & 2,(n-1), & \ldots (n-1),(n-1) \end{cases}$$

je in eine Ebene fallen, und diese n Ebenen bilden nun die Coordinaten-Ebenen des singulären Coordinatensystems. An die Darstellung der Curve, welche sich auf dieses Coordinatensystem gründet, knüpft der Zusammenhang der Normalcurve n^{ter} Ordnung mit den Functionen n^{ter} Stufe an. Die n-gliedrigen σ-Producte, welche nämlich hier auf der rechten Seite der Gleichungen (1) auftreten, sind bei geeigneter Wahl der Constanten $A, B, \ldots, N$ diejenigen Grössen, welche für die Modulfunctionen der n^{ten} Stufe als fundamental angesehen werden müssen. Herr Klein bezeichnet dieselben mit $X_0(u), \ldots, X_{n-1}(u)$ und giebt verschiedene Darstellungen derselben durch Teilwerte der σ- und ϑ-Functionen. Ferner werden die $\frac{n(n-3)}{2}$ quadratischen Relationen, welche zwischen den $X_\alpha(u)$ nach dem Früheren bestehen müssen, entwickelt und der Ausdruck des an der Normalcurve entlang erstreckten Integrales erster Gattung u durch die X_α hergestellt.

Die Bedeutung der $X_\alpha(u)$ für die Modulfunctionen n^{ter} Stufe zeigt sich zunächst darin, dass ihre Nullwerte z_α und die Nullwerte ihrer ersten Differentialquotienten y_α ein „volles Modulsystem" bilden. Es lassen sich nämlich sowohl diese Grössen z_α, y'_α rational durch die Teilwerte $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, wie auch umgekehrt diese durch jene ausdrücken. In dem Beweise dieses Satzes, wird eine an sich interessante Eigenschaft der Quotienten $\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n}$, dass sie nämlich einer partiellen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügen, benutzt. Diese Differentialgleichung liefert zugleich die Mittel, um von dem erwähnten „kanonischen" Coordinatensystem zu dem „singulären" überzugehen. Die Functionen $X_\alpha(u)$ sind als Modulfunc-

tionen n^{ter} Stufe invariant gegenüber solchen linearen Transformationen der Perioden, welche (mod. n) der Identität congruent sind, aber sie zeigen auch bei anderen linearen Transformationen ein einfaches Verhalten: sie substituiren sich nämlich homogen und linear, falls ω_1 und ω_2 einer beliebigen linearen Transformation unterworfen werden, und zwar haben diese Substitutionen der X_α rein numerische Coefficienten. Die Gesamtheit der Substitutionen der X_α bildet eine endliche Gruppe, welche der Gruppe der (mod n) betrachteten Periodentransformationen holoëdrisch isomorph ist.

Ein neues System von n Grössen $\overline{X}_\alpha(u)$, welches die soeben erwähnte Eigenschaft der Grössen $X_\alpha(u)$ ebenfalls besitzt, wird durch gewisse lineare Verbindungen der zur Zahl $3n$ gehörigen Functionen $X_\alpha(u)$ vorgestellt.

Diese neuen Functionen $\overline{X}_\alpha(u)$ sind darum von Wichtigkeit, weil die halben Nullwerte A_α der Functionen eine Verbindung zwischen den früher genannten Moduln z_α, y'_α vermitteln.

Einerseits gelingt es nämlich, die y'_α als rationale ganze Functionen dritten Grades der A_α darzustellen, andererseits die Grössen A_α durch die z_α und die eine Grösse A_0 auszudrücken. Die Grösse A_0 ihrerseits ist als rationale Function oder als Quadratwurzel einer rationalen Function der z_α darstellbar, je nachdem $n \equiv 1$ oder $n \equiv 3$ (mod. 4) ist. Es wird jedoch von den A_0 mit den z_α verbindenden Relationen nur eine aufgestellt, welche nämlich $A_0^{\frac{n-1}{2}}$ rational darstellt. Diese Relation genügt für die Fälle $n = 5$ und $n = 7$, um die Darstellung von A_0 bez. A_0^2 zu gewinnen. Hz.

H. Weber. Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Acta Math. VI. 329-416.

Gleichsam als Vorbereitung für eine umfangreiche zahlentheoretische Anwendung der elliptischen Functionen wird hier zunächst eine zusammenhängende Darstellung der Transformationstheorie der genannten Functionen gegeben. Der Jacobi'sche Weg, welcher von den Θ-Functionen ausgeht, wird auch hier

zur Einführung in die doppeltperiodischen Functionen gewählt, doch macht der Herr Verfasser immer nur von den Reihenentwickelungen, nicht von den Productentwickelungen Gebrauch. Die Transformationstheorie ergiebt sich als notwendige Consequenz aus der Teilungsaufgabe, wenn letztere nach Galois'schen Principien aufgefasst wird. Auf diese Weise gelangt man auch am natürlichsten und einfachsten zu den algebraischen Gleichungen, welche in der Transformationstheorie auftreten. Der erste Abschnitt geht aus von der Thetafunction m^{ter} Ordnung, giebt die Darstellung der Thetafunction der ersten Ordnung, den Ausdruck für die der zweiten Ordnung, für die Functionen $\vartheta_{\lambda,\mu}(nu, n\omega)$ und die Function $\eta(\omega)$ und schliesst mit der linearen Transformation. Im zweiten Abschnitt wird der Uebergang zu den elliptischen Functionen gemacht, und dann wird das Periodenverhältnis ω als Function des Moduls k^2 und der Invariante $j(\omega) = 2^8 \frac{(1-k^2k'^2)^3}{k^4k'^4}$ betrachtet. Der dritte Abschnitt enthält das Additionstheorem, die Multiplication der elliptischen Functionen, die Teilung der elliptischen Functionen durch 2 und die Potenzen von 2, die Teilung derselben durch eine ungerade Zahl, die Teilung der Perioden, die Galois'sche Gruppe und die irreductiblen Factoren der Teilungsgleichung, die Zurückführung der Teilungsgleichung auf Transformationsgleichungen, Betrachtung besonderer Transformationsgleichungen, eine zweite Darstellung der Wurzeln der Transformationsgleichungen und die Invariantengleichung. Im 4. Abschnitt beginnen die zahlentheoretischen Anwendungen der elliptischen Functionen, welche später fortgesetzt werden sollen. Es wird zunächst die Transformation benutzt zur Ableitung einiger Sätze aus der Theorie der complexen Multiplication; ferner werden die Beziehungen zwischen den Klasseninvarianten der verschiedenen Ordnungen hergeleitet und nach Recapitulation einiger Hülfssätze aus der Theorie der algebraischen Functionen die Zerfällung der Klassengleichung in Factoren behandelt. M.

L. Kronecker. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berl. Ber. 761-784.

Fortsetzung der Mitteilungen in den Berl. Ber. 1883, 497-506 und 525-530, über welche F. d. M. XV. 1883. 400 berichtet worden ist. Bedeutet

$$f(m,n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2,$$

so wird der Grenzwert

$$\lim_{\varrho=0}\left\{-\frac{1}{\varrho}+\sum_{m,n}(2\pi f(m,n))^{-1-\varrho}\right\}$$

dargestellt durch das Integral

$$\int_0^1 \left\{\sum_{m,n} x^{2\pi f(m,n)} - \frac{x}{\log\frac{1}{x}}\right\} d\log x,$$

wenn die Summation auf alle ganzzahligen Werte von m, n, mit Ausnahme des Paares $m = n = 0$, erstreckt wird. Dass dieses Integral für alle reellen positiven Grössen a_0, c_0 einen endlichen Wert hat, und dass also, wenn

$$\lim_{\varrho=0}\left\{-\frac{1}{\varrho}+\sum_{m,n}(2\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2))^{-1-\varrho}\right\} = L(a_0, c_0)$$

gesetzt wird, durch $L(a_0, c_0)$ eine bestimmte endliche Function der beiden reellen positiven Variabeln a_0, c_0 dargestellt wird, ist als das Resultat und auch als das Ziel der bisherigen Entwickelungen zu bezeichnen. Im Folgenden wird nun gezeigt, dass sich die Werte dieser Function $L(a_0, c_0)$ für alle diejenigen Argumente a_0, c_0, für welche die Verhältnisse der drei Grössen $a_0 : b_0 : c_0$ oder

$$a_0 : \sqrt{4a_0 c_0 - 1} : c_0$$

in ganzen Zahlen ausdrückbar sind, mit Hülfe der elliptischen Functionen darstellen lassen. Es ergiebt sich die merkwürdige Relation:

$$(\mathfrak{K})\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\varrho=0}\sum_{m,n}\left\{\frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\varrho}}-\frac{1}{(a'm^2+b'mn+c'n^2)^{1+\varrho}}\right\} \\ &\qquad = -\frac{2\pi}{\sqrt{\varDelta}}\log\frac{c(\vartheta'(0,w_1')\,.\,\vartheta'(0,w_2'))^{\frac{2}{3}}}{c'(\vartheta'(0,w_1)\,.\,\vartheta'(0,w_2))^{\frac{2}{3}}},\end{aligned}\right.$$

worin

$$w_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}, \quad w_2 = \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c},$$

$$w'_1 = \frac{-b'+i\sqrt{\Delta}}{2c'}, \quad w'_2 = \frac{b'+i\sqrt{\Delta}}{2c'}.$$

Der Ausdruck rechts ist eine Invariante der durch die quadratischen Formen (a, b, c), (a', b', c') repräsentirten Klassen, und

$$\frac{1}{c}\left(\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)\right)^{\frac{1}{3}}$$

eine Invariante der durch die Form (a, b, c) repräsentirten Klasse.

Es werden nun, um die Anwendungen von der obigen Formel $(\mathfrak{K})$ auseinandersetzen zu können, einige Entwickelungen aus der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen vorausgeschickt, wie solche Herr Kronecker in seinen Vorlesungen gegeben hat. Alsdann wird gezeigt, wie man mit Hülfe der Formel $(\mathfrak{K})$ zu einer Darstellung der Function $L(a_0, c_0)$ in dem Falle, wo a_0^2, $a_0 c_0$ und c_0^2 rationale Werte haben, gelangt. Die folgende Untersuchung ergiebt nachstehendes Resultat. Nimmt man für (a, b, c) solche Repräsentanten aller verschiedenen Klassen von Formen der Discriminante D oder $D_1 D_2$, in denen a relativ prim zu D ist, sind D_1 und D_2 beide irgend welche Fundamental-Discriminanten, D negativ und D_2 positiv, und ist $\tau = 6$ für $D_1 = -3$, $\tau = 4$ für $D_1 = -4$, $\tau = 2$ für $D_1 < -4$; nimmt man ferner für k_1 die Zahlen $1, 3, 5, \ldots, (-2D_1 - 1)$, für k_2 die Zahlen $1, 3, 5, \ldots, (2D_2 - 1)$, und für r_1, r_2 alle positiven Zahlen, für m, n alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, ausgenommen $m = n = 0$, so ist

$$\frac{2\tau}{\sqrt{D}} \sum_{k_1, k_2} \sum_{r_1, r_2} \left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right) \sin 2\pi\left(\frac{k_2 r_2}{D_2} - \frac{k_1 r_1}{D_1}\right) F(r_1, r_2)$$

$$= \sum_{a, b, c}\left[\left(\frac{D_1}{a}\right) + \left(\frac{D_2}{a}\right)\right] \sum_{m, n} F(am^2 + bmn + cn^2).$$

Wird hier

$$F(h) = (1-(-1)^h)\,q^{\frac{1}{4}h}$$

gesetzt, wo q, wie bei Jacobi, eine reelle oder complexe Grösse,

wofür $|q| < 1$, bedeutet, so erhält man aus der obigen Gleichung:

$$\frac{\pi\vartheta_1'(0)}{2\pi i\sqrt{D}}\sum_{k_1,k_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\frac{\vartheta_1\left(\frac{k_2}{D_2}-\frac{k_1}{D_1}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{k_1}{D_1}\right)\vartheta_0\left(\frac{k_2}{D_2}\right)}$$

$$=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n} q^{\frac{1}{4}(am^2+bmn+cn^2)},$$

in welcher die Summation links auf

$$k_1 = 1, 3, 5, \ldots, (-D_1 - 1), \quad k_2 = 1, 3, 5, \ldots, (D_2 - 1),$$

rechts auf alle diejenigen positiven und negativen Zahlen m, n zu erstrecken ist, für die $am^2 + bmn + cn^2$ ungerade wird, und die ϑ Functionen durch die Gleichungen

$$\vartheta_0(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-q)^{n^2}\cos 2n\xi\pi,$$

$$\vartheta_1(\xi) = q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^n q^{n^2+n}\sin(2n+1)\xi\pi$$

bestimmt sind. Für $D_2 = 1$ resultirt hieraus eine von Dirichlet gegebene Formel. M.

Ch. Hermite. Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 303-314.

Die hier behandelten doppeltperiodischen Functionen zweiter Gattung bilden das System derjenigen 16 Quotienten, die aus den Zählern

$$\Theta(x+a),\ H(x+a),\ \Theta_1(x+a),\ H_1(x+a)$$

und den Nennern

$$\Theta(x),\ H(x),\ \Theta_1(x),\ H_1(x)$$

sich bilden lassen. Für alle diese wird im Vorliegenden eine Entwickelung in Sinus- und Cosinus-Reihen gegeben, wie sie Jacobi für die Functionen

$$\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)},\quad \frac{H(x+a)}{\Theta(x)},\quad \frac{\Theta_1(x+a)}{\Theta(x)},\quad \frac{H_1(x+a)}{\Theta(x)}$$

in seinen Untersuchungen über die Rotation eines Körpers um einen festen Punkt gefunden hat. Den Ausgangspunkt für diese Entwickelungen bildet einmal die Reihe

$$\Sigma \frac{e^{\frac{n\pi a}{K}}}{\sin \frac{\pi}{2K}(x+2niK')}$$

und dann die Reihe

$$\cot \frac{\pi a}{2K} + \Sigma e^{\frac{n\pi a}{2K}}\left(\cot \frac{\pi}{2K}(x+niK')+ai\right),$$

schliesslich wird gezeigt, wie die Jacobi'schen Ausdrücke und die übrigen nach Potenzen von q entwickelt werden können, wie solches für die ersteren Herr Kronecker gethan hat.

M.

R. Lipschitz. Sur la théorie des fonctions elliptiques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 315-320.

In seiner Abhandlung: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques" hat Herr Hermite für die Function

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(0).H(z+\omega)}{H(z).H(\omega)}$$

zwei Entwickelungen gegeben, deren eine

$$= \cot \frac{\pi z}{2K} + \cot \frac{\pi\omega}{2K} + 4\Sigma q^{2nn'} \sin \frac{\pi}{K}(nz+n'\omega) \quad (n, n' = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist (siehe auch das vorhergehende Referat). Diese Entwickelung hat Herrn Lipschitz zu folgender Bemerkung geführt. Setzt man

$$x+iy \text{ für } z, \quad x-iy \text{ für } \omega, \quad K'+gt \text{ für } K',$$

wo g eine constante reelle Grösse und t eine reelle Variable, so lässt sich obige Function in eine Reihe entwicke[...] der partiellen Differentialgleichung genügt, welche [...] der Wärme in einer Ebene bestimmt, deren Pu[...] linigen Coordinaten x, y sind, während t die Zeit [...] Lipschitz stellt sich nun die Aufgabe, das Bew[...] der Wärme zu finden, das durch die Hermite'sche [...] löst wird.

Bugaieff. Quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des fonctions discontinues. Moscou 1884. 260 S. (Russisch); Darb. Bull. (2) IX. 89-103.

Dieses Werk besteht aus 4 Abhandlungen. Die erste (112 p.) hat den Titel: Lois numériques particulières qui découlent de la considération des constantes elliptiques, und enthält Anwendungen von Relationen, welche in der Theorie der elliptischen Functionen zwischen den Potenzen von q auftreten, auf Sätze der Zahlentheorie, insbesondere der unbestimmten Analysis, welche wir hier unter „Theorie der discontinuirlichen Functionen“ zu verstehen haben. Unter anderen ergiebt sich das von Liouville (Liouville J. 1860, p. 288) ohne Beweis gegebene Theorem:

$$E\sqrt{n}+E\sqrt{n-1^2}+E\sqrt{n-2^2}+E\sqrt{n-3^2}+\cdots$$
$$=E\frac{n}{1}-E\frac{n}{3}+E\frac{n}{5}-\cdots.$$

Die zweite Abhandlung: Lois numériques génerales qui dépendent de la considération des fonctions de Jacobi (42 p.), enthält allgemeine Formeln, welche unmittelbar aus der Betrachtung der Functionen $H(x)$, $\Theta(x)$, $H_1(x)$, $\Theta_1(x)$ fliessen, von der Form:

$$\sum \tfrac{1}{2}(1-(-1)^d)\sin(dx)$$
$$+2\mathop{S}_{u=1}(-1)^u\cos(ux)\sum \tfrac{1}{2}(1-(-1)^d)\sin dx$$
$$=(-1)^{\nu+1}(E\sqrt{n}-E\sqrt{n-1})\sqrt{n}\sin(x\sqrt{n}),$$
$$\sin x\sum_{n}\sin 2dx-\sin 3x\sum_{n-1}\sin 2dx+\sin 5x\sum_{n-3}\sin 2dx+\cdots$$
$$+(-1)^{\mu}\sin(2\mu+1)x\sum_{n-\frac{\mu(\mu+1)}{2}}\sin 2dx+\cdots=0$$

oder

$$=\frac{(-1)^{\nu}}{4}\left[(2\nu+1)\cos(2\nu+1)x-\frac{\cos x}{\sin x}\sin(2\nu+1)x\right],$$

je nachdem die ganze Zahl n von der Form $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ oder nicht. Aus diesen und ähnlichen allgemeinen Formeln fliessen dann zahlreiche besondere Zahlengesetze, wenn man der Variabeln x

verschiedene besondere Werte giebt, oder wenn man die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x vergleicht, oder wenn man beides zu gleicher Zeit thut.

Die dritte Abhandlung trägt die Ueberschrift: Lois générales numériques qui découlent de la considération de quelques fonctions elliptiques (88 p.). Mit Hülfe einer Function $p_\mu(n)$, welche gleich 1 ist für alle Zahlen von der Form $pn+\mu$ $(\mu < p)$ und Null für alle übrigen, stellt der Herr Verfasser die trigonometrische Entwickelung einiger elliptischen Functionen in Form von unendlichen Reihen dar, z. B. [$2_1(n) = \frac{1}{2}(1-(-1)^n)$ gesetzt]:

$$\frac{2kK}{\pi}\,\mathrm{sn}\,\frac{2Kx}{\pi} = 4 Sq^{\frac{s}{2}} \sum_{\delta}^{s} 2_1(\delta) 2_1(d) \sin dx,$$

und erhält aus den in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommenden Relationen zahlreiche numerische Formeln.

In der vierten Abhandlung: Lois générales numériques qui dépendent des fonctions arbitraires, zeigt der Herr Verfasser, dass jedes allgemeine numerische Gesetz, das von willkürlichen Constanten abhängt, in ein allgemeines Gesetz umgewandelt werden kann, das von willkürlichen Functionen abhängt. Unter anderen ergiebt sich eine Verallgemeinerung der von Liouville (Liouville J. (2) III. p. 144, form. A) ohne Beweis gegebenen Formel. M.

R. Hoppe. Anwendung der Thetafunctionen auf geodätische Strecken und Winkel. Hoppe Arch. (2) III. 75-83.

Die geodätischen Bogen auf einem Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

lassen sich in der Form

$$s = \int \frac{b}{k'}\,\mathrm{dn}^2 u\,du \qquad (k = e\sin\beta,\ \sin\beta = \sin\beta_0\,\mathrm{sn}\,cu),$$

also als elliptische Integrale zweiter Gattung, und die zugehörigen geographischen Längen als

$$\lambda \int \mathrm{sn}'\alpha\,\mathrm{cn}'\alpha\,.\,\mathrm{dn}'\alpha\,\frac{\mathrm{dn}^2 u\;du}{1-\mathrm{sn}'^2\alpha\,.\,\mathrm{dn}^2 u}\left(\mathrm{dn}'\alpha=\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right),$$

also als reine Integrale dritter Gattung vierter Art mit Coefficienten 1 darstellen. Da nun die Excentricität des Erdmeridians sehr klein ist, so kann man nach Einführung der Thetafunctionen schon die vierte Potenz von q vernachlässigen bei einer Rechnung auf 13 Decimalstellen. Das macht die Anwendung der Thetafunctionen zur directen Berechnung geodätischer Strecken und Winkel vielversprechend. Der Herr Verfasser löst hier die beiden Aufgaben: Es sind die geographische Länge und Breite des Anfangspunktes eines geodätischen Bogens, ferner das Azimut der Anfangstangente und die Breite des Endpunktes gegeben; es soll 1) die geodätische Länge des Bogens und 2) die geographische Länge des Endpunktes gesucht werden.

M.

Picquet. Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques. J. de l'Éc. Pol. cah. LIV. 31-100.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2 D.

A. Cayley. On the quadriquadric curve in connexion with the theory of elliptic functions. Klein Ann. XXV. 152-156.

Mit Hülfe des Additionstheorems der elliptischen Functionen wird folgende Eigenschaft der Curve:

$$U_1 = Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2 = 0,$$
$$U'_1 = A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'w^2 = 0$$

nachgewiesen: sind (a, b, c, f, g, h) und (a', b', c', f', g', h') die Coordinaten zweier einander schneidenden Geraden, von denen jede die Curve zweimal schneidet, so ist

$$af'+a'f = 0,\quad bg'+b'g = 0,\quad ch'+c'h = 0.$$

M.

E. Oekinghaus. Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie. Hoppe Arch. (2) II. 138-192.

Bei der Untersuchung der geometrischen Relationen für diejenigen Verhältnisse, welche aus den verschiedenen Lagen einer um einen festen Punkt drehbaren Geraden zu einem Kreise hervorgehen, wird der Herr Verfasser auf eine Transformation geführt, welche wieder in allen auf Reihenentwickelungen bezüglichen Untersuchungen sich als eine reiche Quelle merkwürdiger Relationen erweist. Diese Transformation steht in innigem Zusammenhang mit der Theorie der Kettenlinie, durch welche die elliptischen Functionen und ihre Reihenentwickelungen eine wertvolle Bereicherung und Ergänzung erfahren. Diese Curve führt auch auf die Lösung des irreducibeln Falles der kubischen Gleichungen und ist somit verwandt mit der Lemniscate und der gleichseitigen Hyperbel. M.

A. Söderblom. Öfningsexempel för räkning med elliptiska integraler och funktioner. Upsala. Almqvist & Wicksell 8°. (6) + 188 Seiten.

Uebungsbeispiele für Rechnungen mit elliptischen Integralen und Functionen. Die Bezeichnungen sind die Weierstrass'schen; unter den Beispielen sind auch einige aus der analytischen Mechanik. E.

R. J. Escher. Onderzoekingen aangaande de elliptische integralen van de derde soort en de hyperelliptische integralen van de eerste soort. Diss. Sneek. van Druten. 94 Seiten.

Der Gegenstand dieser Dissertation ist eine Untersuchung über elliptische Integrale dritter und hyperelliptische Integrale erster Gattung. Die Behandlungsweise ergiebt sich am besten aus der Aufzählung der Ueberschriften der verschiedenen Abschnitte.

Einleitung. (Geschichtliche Darstellung der Entdeckungen Legendre's, Landen's, Jacobi's und Abel's auf diesem Gebiete.

Erste Abteilung. Umformung der elliptischen Integrale dritter Gattung hinsichtlich des Parameters. Cap. 1. Die Substitution von Legendre. Cap. 2. Erweiterung der Substitution von Legendre. Cap 3. Anwendung der allgemeinen Theorie auf besondere Fälle Cap. 4. Ableitung der verschiedenen Fälle, in welchen ein elliptisches Integral dritter Gattung durch niedrigere Functionen ausgedrückt werden kann. Cap. 5. Abel's Untersuchungen über die Transformation elliptischer Integrale dritter Gattung hinsichtlich des Parameters.

Zweite Abteilung. Betrachtungen über das Abel'sche Theorem für die hyperelliptischen Integrale erster Gattung. Cap 1. Allgemeine Uebersicht der Abel'schen Untersuchungen, welche sich auf sein Theorem für die elliptischen Integrale erster Gattung beziehen (hierin werden die Verdienste Abel's hinsichtlich dieses Gegenstandes weit über die von Jacobi, Cauchy und Riemann gestellt) Cap. 2. Die ersten Abhandlungen von Abel. Cap. 3. Bemerkungen über das Abel'sche Theorem im allgemeinen und Anwendung desselben auf die Exponential- und geometrischen Functionen als besondere Fälle Cap. 4. Untersuchungen Jacobi's und Rosenhain's Cap. 5. Neue Ableitung des Abel'schen Theorems für eine besondere Art von hyperelliptischen Integralen erster Gattung. Hier finden sich die selbständigen Untersuchungen des Verfassers. Er kommt zu dem Schluss, dass für hyperelliptische Integrale erster Gattung kein Abel'sches Theorem in dem Sinne besteht, wie es bei elliptischen Integralen erster Gattung aufgefasst wird, dass sie nämlich dieselbe untere Grenze Null haben. G.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen

E. Goursat. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques. S. M. F. Bull. XIII 143-162

Die Reduction hyperelliptischer und Abel'scher Integrale auf

elliptische ist in den letzten Jahren Gegenstand einer grossen Zahl von Abhandlungen gewesen, von Königsberger, Picard, Poincaré u. a. Die vorliegende Behandlung, welche sich auf die Reduction der hyperelliptischen Integrale beschränkt, ist eine rein algebraische, ohne Berücksichtigung der Theorie der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Der Herr Verfasser zeigt, dass sich das Jacobi'sche Theorem der algebraischen Transformation der Quadratwurzeln aus Polynomen vierten Grades in folgender Weise verallgemeinern lässt. Es sei

$$P(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2p})$$

und $x = \frac{U}{V}$ eine rationale Substitution vom Grade D, so dass

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)};$$

alsdann ist

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{V^{p-2}(U'V-UV')dt}{\sqrt{(U-a_1V)(U-a_2V)\dots(U-a_{2p}V)}}.$$

Jeder vielfache Factor von der Ordnung r einer der Gleichungen

$$U-a_iV = 0$$

kommt in $U'V-UV'$ in der Potenz $r-1$ vor; wenn r gerade, $= 2m$, so bleibt der Factor nach dem Heben im Zähler nur in der Potenz $m-1$; wenn r von der Form $2m+1$, bleibt er im Zähler in der Potenz m und unter dem Wurzelzeichen in der ersten. Nach dem Heben reducirt sich das Radical auf $\sqrt{Q(t)}$ und der in $U'V-UV'$ bleibende Factor ist höchstens vom Grade $\Delta = 2D-2-\sum_{i=1}^{q} n_i$. Ist nun $f(x)$ eine ganze Function von x, deren Grad nicht $p-2$ überschreitet, so hat man vermöge der obigen Substitution

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{f_1(t)dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

wo $f_1(t)$ eine ganze Function von t, deren Grad nicht höher als $q-2$. Daraus folgt: 1) Es existirt eine unendliche Menge von Polynomen gegebenen Grades > 4, so dass das hyperelliptische Integral

$$\int \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

worin $f_1(t)$ ein passend gewähltes Polynom ist, sich durch eine rationale Substitution auf ein elliptisches Integral erster Gattung reduciren lässt; der Grad dieser Substitution kann so gross sein, wie man will. 2) Die einzigen rationalen Substitutionen, welche ein hyperelliptisches Integral auf ein anderes hyperelliptisches derselben Art überführen, sind die linearen Substitutionen. 3) Es existirt nur eine endliche Zahl von rationalen Substitutionstypen, welche von einem hyperelliptischen Integrale $(p-1)^{ter}$ Gattung zu einem solchen $(q-1)^{ter}$ Gattung $(q > p)$ überführen. 4) Die Coefficienten eines reductiblen Typus $(q-1)^{ter}$ Gattung hängen, auf die Normalform gebracht, höchstens von $q-1$ willkürlichen Parametern ab.

Im Folgenden wird der einfachste Fall, wo $p = 2$, $q = 3$ ist, betrachtet, also die Reduction der hyperelliptischen Integrale der zweiten Gattung. Als Beispiele dienen die Werte $D = 2, 3, 4, 5$.

M.

E. Goursat. Sur un cas de réduction des intégrales hyperelliptiques du second genre. C. R. C. 622-624.

Die beiden Integrale

$$\int \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}},$$

wo

$$R(t) = (t^3 + at + b)(t^3 + pt^2 + q),$$

lassen sich durch rationale Substitutionen dritten Grades auf elliptische Integrale zurückführen, wenn

$$q = 4b + \tfrac{4}{3}pa$$

ist. M.

O. Bolza. Zur Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. Freiburg. Ber. 6 Seiten.

Der Herr Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die beiden

allgemeinsten hyperelliptischen Integrale erster Ordnung und erster Gattung zu finden, welche sich durch eine Transformation vierten Grades auf ein elliptisches Integral reduciren lassen, und teilt die erhaltenen Resultate mit, die Ableitung derselben einer späteren Veröffentlichung vorbehaltend. Nach Herrn Picard (S. M. F. Bull. XI., F. d. M. XV. 1883. 431) giebt es „im allgemeinen" nur 2 zu derselben Irrationalität gehörige Integrale erster Gattung, welche überhaupt algebraisch auf je ein elliptisches reducirbar sind; aber wenn man den beiden von einander unabhängigen Parametern, welche $R(x)$ nach Verfügung über 3 Constante der linearen Transformation enthält (s. Biermann: Zur Theorie der zu einer binomischen Irrationalität gehörigen Abel'schen Integrale, Wien. Ber. 1883, p. 981, F. d. M. XV. 1883. 427), specielle Werte erteilt, so kann es sogar unendlich viele zu $\sqrt{R(x)}$ gehörige Integrale erster Gattung geben, welche algebraisch auf je ein elliptisches reducirbar sind. Die Bedingungen dafür werden hier angegeben. M.

Ch. Hermite. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques, extrait d'une lettre adressée à M. le prof. Chrystal. Edinb. Proc. XII. 642-646.

Vereinfachung einer Methode zur Reduction des Integrals $\int\frac{P\,dx}{Q\sqrt{R}}$ (P, Q, R rationale ganze Functionen von x), die vom Verfasser in Darb. Bull. gegeben worden ist. Cly. (Lp.)

Prym. Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen. Zweite Ausgabe. Berlin. Mayer u. Müller.

Man muss dem Herrn Verfasser und den Herren Verlegern dankbar sein, dass sie die „Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen" durch eine neue Ausgabe wieder leichter zugänglich gemacht haben, nachdem dieselbe seit langem vergriffen war. Es ist bekannt, dass diese Schrift zur Verbreitung ...

bildung der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale in hervorragender Weise beigetragen hat, aber noch heutzutage giebt es kaum ein Werk, welches den mathematisch gebildeten Leser auf eine gleich leichte und elegante Weise in den Geist der Riemann'schen Methode einführte. Der Herr Verfasser teilt den Stoff, welchen er behandelt, in zwei Teile, denen er die Ueberschriften: „Graphik des Problems" und „Analytik des Problems" giebt. In dem ersten Teile wird die graphische Darstellung der Irrationalität

$$s = \sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)}$$

durch eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche entwickelt. Die Zerschneidung dieser Fläche in eine einfach zusammenhängende knüpft der Verfasser an die Untersuchung des Integrales

$$u = \int (\alpha+\beta x) \frac{dx}{s},$$

dessen analytischer Charakter dabei klar zu Tage tritt.

In dem zweiten Teile wird die ϑ-Function eingeführt und das Hauptproblem der Theorie gelöst: nämlich der Quotient von irgend zwei der 16 ϑ-Functionen $\vartheta(u_1-f_1, u_2-f_2)$, wo f_1, f_2 beliebige Constante bezeichnen, als algebraische Function der gemeinsamen oberen Grenze (x, s) der beiden Integrale erster Gattung u_1, u_2 dargestellt. Schliesslich überträgt der Verfasser das hier erhaltene Resultat auf den Fall der allgemeinsten hyperelliptischen Integrale.

Der neuen Ausgabe ist dem Fortschritte der Wissenschaft gemäss eine grössere Zahl berichtigender und erläuternder Zusätze angefügt. Auch hat der Verfasser dementsprechend die beigegebenen Tafeln neu gezeichnet und durch einige Figuren vermehrt.

Hz.

A. Cayley. A memoir on the abelian and thetafunctions. Newcomb Am. J. VII. 101-166.

Fortsetzung der Uebersicht über die Vorlesungen vom Jahre 1882 (F. d. M. XIV. 1882. 411). Das Erste betrifft die Nöther'sche Reduction des Abel'schen Integrals auf die Normalformen für

alle Arten von Singularitäten der Curve $f = 0$. Das Folgende behandelt das Abel'sche Theorem, Aronhold's kubische Transformation, das elliptische Differential, Additionstheoreme der elliptischen Functionen und der doppelten Thetafunctionen. M.

M. A. TYCHOMANDRITZKY. Ueber das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale. Charkow. (Russisch.)

Der Hauptzweck der Arbeit ist, die Untersuchungen des Verfassers über den natürlichen Uebergang von den hyperelliptischen Integralen zu den θ-Functionen auseinander zu setzen, wie er ihn schon für die elliptischen Integrale veröffentlicht hatte in seinen Noten: „Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale" (Klein Ann. Bd. XXII, XXV, cf. diesen Band S. 423, 424). Da aber die Abel'schen Functionen ziemlich wenig in Russland bekannt sind, so hat er noch drei Capitel vorangeschickt, die den Leser mit den Grundlagen der Theorie bekannt machen, und damit hat er sich ein grosses Verdienst um die russische mathematische Literatur erworben. Demgemäss kann man seine Arbeit in zwei Teile einteilen, von denen der erste als eine Einleitung zu den selbständigen Untersuchungen des Verfassers betrachtet werden kann, und der zweite das eigentliche Hauptziel des Werkes, den Uebergang von den Integralen zu den θ-Functionen oder die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems, verfolgt.

Der erste Teil besteht aus drei Capiteln:

I. Die Reduction der hyperelliptischen Integrale auf drei Gattungen. Verschiedene Typen der Integrale.

Als Typus der Integrale erster Gattung wird die Weierstrass'sche Form genommen

$$\int \frac{P(x)}{x - a_{2\varrho+1}} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

wenn

$$R(x) = A_0 (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{2\varrho}),$$
$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3) \ldots (x - a_{2\varrho-1}).$$

II. Primfunctionen; Perioden.

Hier wird eine Identität abgeleitet, die zum Theorem der

Vertauschung des Parameters und des Arguments und zur Einführung der Weierstrass'schen Primfunctionen führt, deren Betrachtung in der Theorie der Integrale so wichtig ist. Sie giebt unter andern die Relationen zwischen den sogenannten Perioden.

III. Das Abel'sche Theorem.

Hier werden zwei Beweise des Abel'schen Theorems gegeben; der erste (aus den Weierstrass'schen Vorlesungen) stützt sich auf die Zerlegung der Function $F(x, \sqrt{R(x)})$ in Primfunctionen; der zweite ist der Beweis, welchen Abel selbst gegeben hat.

Schliesslich wird ein besonderer Fall des Abel'schen Theorems betrachtet, der sehr wichtig für die folgenden Untersuchungen ist.

Der zweite Teil des Werkes, in welchem die Untersuchungen des Verfassers über den Uebergang von den Integralen zu den θ-Functionen enthalten sind, besteht aus zwei Capiteln: IV. Das Jacobi'sche Problem, und V. Die θ-Functionen.

Im vierten Capitel sind die Differentialgleichungen des Jacobi'schen Problems in Weierstrass'scher Form dargestellt:

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{P(x_1)}{x_1-a_1}\,\dfrac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{P(x_2)}{x_2-a_1}\,\dfrac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+\cdots \\ \qquad\cdots+\dfrac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_1}\,\dfrac{dx_\varrho}{2\sqrt{R(x_\varrho)}}=du_1, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{P(x_1)}{x_1-a_{2\varrho-1}}\,\dfrac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{P(x_2)}{x_2-a_{2\varrho-1}}\,\dfrac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+\cdots \\ \qquad\cdots+\dfrac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_{2\varrho-1}}\,\dfrac{dx_\varrho}{2\sqrt{R(x_\varrho)}}=du_\varrho. \end{array}\right.$$

Die Rechnungen des Verfassers stützen sich auf die Einführung der Function

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\varrho).$$

Aus den Differentialgleichungen (I) erhält man successive Ausdrücke für

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_\beta},\quad \frac{\partial \log\sqrt{\varphi(a_{2\alpha-1})}}{\partial u_\beta},\quad \frac{\partial \log\sqrt{\varphi(a_{2\alpha-1})}}{\partial u_\beta}.$$

Die zwei letzten Ableitungen lassen sich mit Hülfe des erwähnten speciellen Falls des Abel'schen Theorems durch die Summen der Integrale zweiter Gattung ausdrücken. Wenn man nun den Ausdruck $d\log\varphi(a_{2\lambda-1})$ durch die Summe der Integrale zweiter Gattung integrirt und dann vom Logarithmus zur Zahl selbst übergeht, so erhält man eine neue Function, welche endlich und eindeutig für alle Wert-Systeme der Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ ist und als speciellen Fall die Function $\mathrm{Al}(u_1, \ldots, u_\varrho)$ Weierstrass's und die Function $\Theta(u_1, \ldots, u_\varrho)$ Jacobi's enthält. Aus ihrer Definition fliessen sehr leicht die 2ϱ Functionalgleichungen, denen sie genügt, und aus diesen Gleichungen erhält man die Grundeigenschaften der θ. Der Ableitung dieser Eigenschaften ist das fünfte Capitel gewidmet, welches das interessante Werk schliesst.

Wi.

P. Appell. Sur l'inversion des intégrales abéliennes.

Jordan J. (4) I 245-279.

Das Umkehrproblem der Abel'schen Integrale wird ausgedehnt auf den Fall, wo ein System von Gleichungen vorliegt, in welchen auf der linken Seite neben den Normalintegralen erster, zweiter und dritter Gattung auch noch die Ableitungen der Integrale zweiter Gattung in beliebiger Ordnung vorkommen. Es handelt sich also um ein System (1) von Gleichungen der Form:

$$u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \cdots + u^{(i)}(x_n, y_n) = u_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\underset{\xi_j, \xi'_j}{\overset{\xi_j, \xi'_j}{\Pi}}(x_1, y_1) + \underset{\xi_j, \xi'_j}{\overset{\xi_j, \xi'_j}{\Pi}}(x_2, y_2) + \cdots + \underset{\xi_j, \xi'_j}{\overset{\xi_j, \xi'_j}{\Pi}}(x_n, y_n) = u_{p+j}, \quad (j = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\begin{aligned} Z(x_1, y_1; a_k, b_k) + Z(x_2, y_2; a_k, b_k) + \cdots + Z(x_n, y_n; a_k, b_k) &= u_{k1}, \\ Z'(x_1, y_1; a_k, b_k) + Z'(x_2, y_2; a_k, b_k) + \cdots &= u_{k2}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ Z^{r_k-1}(x_1, y_1; a_k, b_k) + Z^{r_k-1}(x_2, y_2; a_k, b_k) + \cdots &= u_{k r_k} \end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r).$$

Hier sind durch $u^{(i)}(x, y)$ die p Normalintegrale erster Gattung, die sich auf die Curve $F(x, y) = 0$ vom Geschlechte p be-

bezeichnet; das Normalintegral dritter Gattung mit den beiden logarithmischen Unstetigkeitspunkten $\xi, \eta; \xi', \eta'$ ist durch $\overset{\xi\eta}{\underset{\xi'\eta'}{\Pi}}(x, y)$ bezeichnet und endlich durch $Z(x, y; \xi, \eta)$ das Normalintegral zweiter Gattung mit ξ, η als Pol. $Z', Z'', \dots$ bedeuten die Ableitungen von Z nach ξ. Dabei ist

$$p + q + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r = n.$$

Durch die n Gleichungen sind n Punkte

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

als Functionen der Grossen u auf der rechten Seite von (1) definirt. Es handelt sich darum zu zeigen, dass die Coordinaten dieser Punkte und allgemeiner die Werte einer rationalen Function $R(x, y)$, gebildet für dieselben, sich darstellen lassen als Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten eindeutige Functionen der Grössen u sind. Die Lösung geschieht durch die Aufstellung einer Curve $\Phi(x, y) = 0$, welche die gegebene $F(x, y) = 0$ in jenen n Punkten und ausserdem in bekannten Punkten schneidet.

Indem man beachtet, dass ein Integral über eine rationale Function von x und y stets in Normalintegrale erster, zweiter und dritter Gattung zerlegbar ist, lässt sich dem Satze auch die etwas allgemeinere Form geben:

Sind x, y durch die algebraische Relation $F(x, y) = 0$ vom Geschlechte p mit einander verbunden, bedeutet $\varphi_1(x, y)$ irgend eine rationale Function von x, y, so lassen sich zu dieser stets $(n-1)$ weitere Functionen

$$\varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$$

bestimmen, so dass das System der Differentialgleichungen

$$\varphi_i(x_1, y_1) dx_1 + \varphi_i(x_2, y_2) dx_2 + \cdots + \varphi_i(x_n, y_n) dx_n = du_i,$$
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

die n Punkte

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

so von $u_1, u_2, \dots, u_n$ abhängig definirt, dass die n Werte einer beliebigen rationalen Function $R(x, y)$, gebildet für diese Stellen,

sich aus einer algebraischen Gleichung, mit in den u_i eindeutigen Coefficienten ergeben. Die Untersuchung wird zunächst für $p = 0$ und 1, dann für den allgemeinen Fall durchgeführt.

Dk.

E. Wiltheiss. Ueber Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen zerfallen. Klein Ann. XXVI. 127-142.

Wenn bei einer Thetafunction eine principale Transformation (N) stattfindet, und man wendet auf sie eine beliebige Transformation (H) an, so findet auch für die so transformirte Function eine principale Transformation statt und zwar $(H)^{-1}(N)(H)$, wo $(H)^{-1}$ die zu (H) supplementäre Transformation bedeutet; ebenso gilt auch der umgekehrte Satz. Hiervon ausgehend beweist der Verfasser Folgendes: Transformirt man eine Thetafunction durch die Transformation (P), und zerfällt die transformirte Function in ein Product von mehreren Thetafunctionen, so existiren für die ursprüngliche Thetafunction die principalen Transformationen $(P)(H)(P)^{-1} = (K)$, und die auftretenden Multiplicatoren sind $p\eta_{\mu\mu} = \pm p$, wo p den Grad der Transformation (P) bedeutet.

(K) ist eine zu sich selbst supplementäre Transformation vom Grade p^2; ist aber p eine gerade Zahl, so kann man (K) wieder zerlegen in eine Multiplication mit 2 und eine Transformation (K') gleichen Charakters vom Grade $(\frac{1}{2}p)^2$. Wenn daher $p = 2$ ist, so existirt für eine solche Thetafunction eine principale lineare Transformation, deren Multiplicatoren $+1$ und -1 sind. Dies führt zu dem Satze: Die hyperelliptischen Integrale, bei denen die zugehörigen Thetafunctionen durch eine quadratische Transformation in ein Product von Thetafunctionen von weniger Variabeln übergeführt werden, können durch eine lineare gebrochene Substitution so umgewandelt werden, dass die Wurzelgrösse nur das Quadrat der Variabeln enthält.

Darauf wird der Satz bewiesen: Ist bei einer Thetafunction eine principale Transformation möglich, bei der die ... von g

Multiplicatoren gleich p, die übrigen $\varrho-g$ gleich $-p$, so existiren zwei Thetafunctionen vom Grade g und $\varrho-g$, deren Product sich rational durch jene Thetafunctionen ausdrücken lässt.

Herr Wiltheiss sucht nun eine zu den aus der zerfallenden Thetafunction durch lineare Transformationen hervorgehenden Thetafunctionen (die natürlich dieselben Eigenschaften behalten) gehörige, möglichst einfache principale Transformation (K), d. h. eine solche, in der möglichst viele Coefficienten Null sind, und gelangt so schliesslich, indem er sich auf den Fall, dass p eine ungerade Primzahl ist, beschränkt, zu dem Resultat: Wenn eine Thetafunction durch eine Transformation, deren Grad p eine ungerade Primzahl ist, in ein Product von zwei Thetafunctionen von g und $\varrho-g$ ($g > \varrho-g$) Variabeln zerfällt, so kann die ursprüngliche Thetafunction durch eine lineare Transformation so umgeändert werden, dass für dieselbe eine principale Transformation besteht, bei der $k_{\alpha\alpha} = -k_{\varrho+\alpha,\varrho+\alpha} = p$ oder $-p$ ist, je nachdem $\alpha \leqq g$ oder $\alpha > g$, und die übrigen Coefficienten Null sind, mit Ausnahme von $k_{\alpha+\varrho,\beta} = -k_{\beta+\varrho,\alpha}$ für $\alpha \leqq \beta+g$. Vergl. dazu Poincaré, Sur la réduction des intégrales abéliennes (S. M. F. Bull. XII., F. d. M. XVI. 1884. 426.) Hch.

O. Staude. Ueber die algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Thetafunctionen. Klein Ann. XXV. 363-418.

Unter algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Thetafunctionen erster Ordnung versteht der Herr Verfasser solche den sechzehn Thetafunctionen zu ihrer Unterscheidung von einander beigefügten Symbole, durch welche eine Vertheilungsart derselben auf die sechs Verzweigungspunkte einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht 2 zum Ausdrucke gebracht wird, und unterscheidet algebraische Charakteristiken erster Art, wobei jedem einzelnen Verzweigungspunkte und jeder Gruppirung der sechs Verzweigungspunkte in zwei Tripel je eine Thetafunction zugeordnet ist, und algebraische Charakteristiken zweiter Art, wobei fünfzehn Thetafunctionen den fünfzehn Paaren

zweier verschiedenen Verzweigungspunkte entsprechen, die sechzehnte Thetafunction aber zu allen sechs Verzweigungspunkten gehört.

Im ersten Capitel wird von den Charakteristiken erster Art gezeigt, dass sie die Verteilung der sechs Verzweigungspunkte auf die sechzehn algebraischen Ausdrücke, welchen bei der Rosenhain'schen Parameterdarstellung die sechzehn Thetafunctionen proportional gesetzt werden, zum Ausdrucke bringen (§ 1). Anknüpfend an diese Parameterdarstellung und unter Verwendung eines Jacobi'schen Satzes über die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung werden sodann die Beziehungen der Nullpunkte der sechzehn Thetafunctionen zu den Charakteristiken erster Art erörtert (§§ 2, 3), und es wird ferner gezeigt, welche Form man den Argumenten einer Thetafunction geben muss, damit dieselbe für zwei beliebig gegebene Stellen des hyperelliptischen Gebildes verschwindet (§ 4).

Im zweiten Capitel wird, nachdem hier zuvor der Zusammenhang der Nullpunkte der sechzehn Thetafunctionen mit den algebraischen Charakteristiken zweiter Art entwickelt ist (§ 5), gezeigt, dass den algebraischen Charakteristiken zweiter Art die bei der Prym'schen Parameterdarstellung auftretende Gruppirung der sechzehn Thetafunctionen zu 1 und 15 entspricht (§ 6).

Im Anschlusse an die Resultate der §§ 1-6 zeigt § 7, dass die Rosenhain'sche und die Prym'sche Parameterdarstellung der Thetafunctionen als Repräsentanten zweier Systeme von je sechzehn coordinirten Parameterdarstellungen zu betrachten sind.

Im dritten Capitel wird endlic[illegible]t, dass die in den Charakteristiken erster und zweiter [illegible]brachte doppelte Gruppirung der sechzehn [illegible] keine andere in dem allgemeinen Abel'sc[illegible] einer zweiblättrigen Riemann'schen [illegible] gungspunkten zugehörigen hyperellip[illegible] bildet ist.

G. Frobenius. Ueber die constanten Factoren der Thetareihen. Kronecker J. XCVIII. 241-263.

Im Falle $p = 1$ besteht die Jacobi'sche Gleichung:

$$\vartheta'_0 = \pi \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3.$$

Für diese Formel giebt der Herr Verfasser in § 1 zwei Beweise, welche beide auf Reihenentwickelung und Vergleichung der Coefficienten unter Zuhülfenahme der bekannten partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v)}{\partial v^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \tau} = 0$$

basiren. In den folgenden Paragraphen wird die nämliche Methode angewandt, um für den Fall $p = 2$ (§ 2), für den allgemeinen hyperelliptischen Fall (§ 3), für den Fall $p = 3$ (§§ 4, 5), und für den Fall $p = 4$ (§ 6) die analogen Formeln abzuleiten, die für $p = 2$ bereits von Rosenhain ohne Beweis mitgeteilt, für die hyperelliptischen Thetafunctionen aber von Herrn Thomae (Crelle J. LXXI.) von der Theorie der hyperelliptischen Integrale her gewonnen wurden.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet zunächst eine Formel (Formel (3) des § 2), welche ich als halbe Umkehrung der Riemann'schen Thetaformel, aus der sie unmittelbar folgt, zu bezeichnen pflege, und eine aus ihr sich ergebende Determinantengleichung (Formel (4) des § 2). Diese letztere liefert im Falle $p = 2$ sofort die für die sechs Charakteristiken A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2 irgend eines Fundamentalsystemes geltende Relation:

$$|\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta)| = \pm |\vartheta[B_\alpha](u, v_\beta)|, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2)$$

und aus dieser folgt dann unter der Voraussetzung, dass das Fundamentalsystem zwei ungerade Charakteristiken A_1, A_2 und vier gerade B_1, B_2, B_3, B_4 enthält, durch Reihenentwickelung und Vergleichung der Coefficienten unter Anwendung der Differentialgleichungen:

$$D_\alpha^2 \vartheta(v) - 4\pi i \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \tau_{\alpha\alpha}} = 0, \quad D_\alpha D_\beta \vartheta(v) - 2\pi i \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial \tau_{\alpha\beta}} = 0,$$

wobei $D_\gamma \vartheta(v)$ statt $\frac{\partial}{\partial v_\gamma}\vartheta(v)$ gesetzt ist, die Schlussgleichung:

$$[A_1, A_2] = |D_\beta \vartheta[A_\alpha]| = \varepsilon \pi^2 \Pi \vartheta[B_\gamma]$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2;\ \gamma = 1, 2, 3, 4;\ \varepsilon = \pm 1)$$

(Formel (7) des § 2).

In § 3 wird entsprechend für den allgemeinen hyperelliptischen Fall aus der halben Umkehrung der Riemann'schen Thetaformel zunächst die für die Charakteristiken $A_0, A_1, \dots, A_p$, $B_1, \dots, B_p$ irgend eines Fundamentalsystems geltende Determinantenrelation:

$$|\vartheta[A_\alpha](u, v_\beta)|^2 = \pm |\vartheta[B_\alpha](u, v_\beta)|^2, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, p)$$

und aus dieser dann unter der Voraussetzung, dass das Fundamentalsystem aus p ungeraden Charakteristiken $A_1, \dots, A_p$ und $p+2$ geraden $B_1, \dots, B_{p+2}$ besteht, auf die nämliche Weise wie vorher die Schlussgleichung:

$$[A_1, \dots, A_p] = |D_\beta \vartheta[A_\alpha]| = \varepsilon \pi^p \Pi \vartheta[B_\gamma]$$
$$(\alpha, \beta = 1, \dots, p;\ \gamma = 1, \dots, p+2;\ \varepsilon = \pm 1)$$

(Formel (4) des § 3) abgeleitet.

Die analoge Formel für den Fall $p = 3$:

$$[A_1, A_2, A_3] = |D_\beta \vartheta[A_\alpha]| = \varepsilon \pi^3 \Pi \vartheta[B_\gamma]$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3;\ \gamma = 1, \dots, 5;\ \varepsilon = \pm 1)$$

(Formel (2) des § 4 und (7) des § 5), in der A_1, A_2, A_3 die drei ungeraden, $B_1, \dots, B_5$ die fünf geraden Charakteristiken eines Fundamentalsystems bezeichnen, wird in § 4 mittels einer die Stelle der früheren Determinantenrelationen (Formeln (5) des § 2 und (2) des § 3) vertretenden Gleichung (Formel (1) des § 4), deren Richtigkeit selbst nach Hermite'schen Principien erschlossen wird, in § 5 aber von der früheren Formel (4) des § 2 ausgehend bewiesen.

In § 6 wird endlich auf Grund der halben Umkehrung der Riemann'schen Thetaformel gezeigt, dass im Falle $p = 4$ für ein Fundamentalsystem, welches vier ungerade Charakteristiken $A_1, \dots A_4$ und sechs gerade $B_1, \dots, B_6$ enthält, die Formel:

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = |D_\beta \vartheta[A_\alpha]| = \varepsilon \pi^4 (\Pi \vartheta[B_\gamma] - \Pi \vartheta[B_\gamma P])$$
$$(\alpha, \beta = 1, \dots, 4;\ \gamma = 1, \dots, 6)$$

besteht, wobei $P = \Sigma B_\iota \equiv \Sigma A_\alpha$ ist, ε aber einen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Kr.

E. Wiltheiss. Ueber die partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Parametern und nach den Argumenten. Kronecker J. 10. 236-257.

Im ersten Paragraphen giebt der Verfasser für die hyperelliptischen Functionen, wie sie Herr Weierstrass eingeführt hat, die zum Verständnis nötigen Formeln, indem er sie mit $\Theta(u_\alpha)_\iota$ bezeichnet (von Herrn Weierstrass, Crelle J. XLVII., sind sie mit $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\iota$ bezeichnet worden). Im zweiten Paragraphen werden daraus die Differentialquotienten der Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach den Argumenten a_ι (den Wurzeln der unter der Quadratwurzel vorkommenden Function $R(x)$), in der für die weitere Untersuchung geeigneten Form gegeben. Im dritten werden, von der im ersten Paragraphen gegebenen Darstellung des Integrals dritter Gattung durch die Function Θ ausgehend, die Normalintegrale zweiter Gattung durch die Ableitungen des $\log\Theta(u)$ nach den u_α und eine in den x und $\sqrt{R(x)}$ symmetrische Function ausgedrückt und einige andere notwendige Formeln entwickelt. Im vierten wird darauf durch Differentiation des im § 3 erwähnten Ausdruckes nach a_ι die gewünschte Differentialgleichung gefunden, zunächst für ganz specielle Formen der Normalintegrale und daraus für die allgemeinen. Dieselbe hat die Form:

$$4R'(a_\iota)\frac{\partial\Theta(u)}{\partial a_\iota} = \sum_{\alpha\beta} G(a_\iota)_\alpha G(a_\iota)_\beta u_\alpha u_\beta \Theta(u)$$

$$-2\sum_{\alpha\beta} H(a_\iota)_\alpha G(a_\iota)_\beta u_\beta \frac{\partial\Theta(u)}{\partial u_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} H(a_\iota)_\alpha H(a_\iota)_\beta \frac{\partial^2\Theta(u)}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}$$

$$+4R'(a_\iota)\left\{\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \Theta(u) - \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} u_\beta \frac{\partial\Theta(u)}{\partial u_\alpha} + C\Theta(u)\right\}.$$

Die darin vorkommenden Functionen H und G sind dadurch definirt, dass:

$$\int H(x)_\lambda \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \text{ und } \int G(x)_\lambda \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$$

die Normalintegrale erster und zweiter Gattung sind; durch sie sind auch die Constanten $h_{\kappa\lambda}$ und $g_{\kappa\lambda}$ gegeben.

Den Schluss bildet der Nachweis, dass die gefundene Differentialgleichung unverändert für alle übrigen Functionen $\Theta(u)_\lambda$ gilt. Hcb.

M. Krause. Ueber einige Differentialgleichungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen.

Klein Ann. XXVI. (Erste Mitteilung) 1-15, (zweite Mitteilung) 16-25.

Der Verfasser giebt zunächst für den bekannten Satz, dass sich für die Nullwerte der v_1, v_2 die Functionaldeterminante der ersten Ableitungen zweier ungeraden Theta durch das Product von vier geraden Theta und π^2 ausdrückt, zwei Beweise. Darauf stellt er im Anschluss an seine Arbeit in den Acta Math. III. (F. d. M. XVI. 1884. 437) an Stelle von einer Gleichung deren neun zwischen den Multiplicatoren, den ursprünglichen und den transformirten Moduln auf, und giebt diese Gleichungen in drei verschiedenen Formen.

In der zweiten Mitteilung stellt sich Herr Krause die Aufgabe, Differentialgleichungen aufzustellen, denen der Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen im Gebiete der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung genügen. Er giebt zunächst für die Theta, als Functionen von u_1 und u_2 aufgefasst und als solche mit f bezeichnet, drei Gleichun[illegible] n denen die zweiten Differentialquotienten nach den u aus[illegible] durch die ersten multiplicirt mit u_1 und u_2, wel[illegible] in $\varkappa$, λ, μ, den K und den Ableitungen der K n[illegible] haben, und durch die ersten Differentialquotienten [illegible] multiplicirt mit in $\varkappa$ λ, μ rationalen Coefficienten[illegible] nun die transformirten Thetafunctionen F eingeführt. [illegible] die analogen Gleichungen gelten; es werden für sie n[illegible] die Gleichungen nach den Ableitu[illegible] und $\varkappa$ [illegible]

leitet. Sie haben dieselbe Form, nur tritt zu den Coefficienten der Ableitungen nach $\varkappa$, λ, μ noch der Factor n, der den Transformationsgrad angiebt, während in denen der Ableitungen nach den u die Grössen M und die den K entsprechenden C vorkommen.

Es wird nun ein bestimmter Repräsentant genommen; für diesen sind die Gleichungen genau dieselben wie für die ursprüngliche Function, wenn man sich die zweite Ableitung durch n dividirt denkt.

Im zweiten Paragraphen werden statt F und f die Logarithmen derselben in die Formeln eingesetzt; dieselben bleiben dadurch fast ungeändert. Sodann stellt der Verfasser die entsprechende Gleichung für $W = F:f^n$ auf und leitet aus vier Theta, die ein Göpel'sches Quadrupel bilden, drei Thetaquotienten x_1, x_2, x_3 her; dann kann W als Function von $x_1, x_2, x_3, \varkappa, \lambda, \mu$ angesehen werden. Die x genügen wieder fast denselben Differentialgleichungen wie die f und F. Es ergeben sich als Resultat drei Differentialgleichungen für W, von denen eine hier angeführt werden soll, die beiden andern sind entsprechend gebildet:

$$\Sigma_r \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r^2}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)^2 + 2\Sigma \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial x_r \partial x_s}\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial x_s}{\partial u_1}\right)$$
$$+\Sigma_r \frac{\partial W_\alpha}{\partial x_r}(1-n)\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_1^2} + 2n \sum_{\varkappa,\lambda,\mu} \frac{\partial W_\alpha}{\partial \varkappa}\varkappa x_1'$$
$$+ n(1-n) W \frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial u_1^2} = 0.$$

Die Grössen $\left(\frac{\partial x_r}{\partial u_1}\right)$ u. s. w. sind ganze rationale Functionen der x_r, deren Darstellung bekannt ist. Es folgen noch einige kleine Umformungen der letzten drei Gleichungen. Hch.

H. Poincaré. Sur les fonctions abéliennes. C. R. C. 785-787.

Unter einer Θ-Function m^{ter} Ordnung eine ganze Function der p Variabeln $x_1, \ldots, x_p$ verstanden, welche für die p ersten Perioden ungeändert bleibt, für die p weiteren einen Exponentialfactor $e^{-m x_i + \beta_i}$ annimmt, lassen sich für p Θ-Functionen der

Ordnung $m_1, m_2, \ldots, m_p$ die Lösungen des Gleichungssystems:

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \cdots = \Theta_p = 0$$

discutiren; sie haben, wie dies aus einer früheren Arbeit (C. R. XCII. 958-960, S. M. F. Bull. XI. 25-53, s. F. d. M. XIII. 1881. 377, XV. 1883. 430) hervorgeht, $N = p!m_1 . m_2 \ldots m_p$ incongruente Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Hierin werden (und zwar speciell ausgeführt für $p = 2$) die Summen X_i je der N Werte x_i aus den Grössen m_i, d_i und den Perioden berechnet. Dk.

A. Cayley. Note in connexion with the hyperelliptic integrals of the first order. Kronecker J. XCVIII. 95-96.

Beweis der Gleichung

$$K_{11}K'_{21} - K_{21}K'_{11} + K_{12}K'_{22} - K_{22}K'_{12} = 0,$$

welche für $n = 2$ aus einer allgemeineren Gleichung (49) in der Abhandlung des Herrn Weierstrass: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen“, Crelle J. XLVII. 1854, 289-306 sich ergiebt und der Gleichung

$$w_0 v_3 - w_3 v_0 + w_1 v_2 - w_2 v_1 = 0$$

bei Hermite (Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes, C. R. XL. 1855) entspricht. Es wird gezeigt, wie diese Gleichung (49) sich aus den Gleichungen (43) der genannten Abhandlung herleiten lässt. M.

M. Krause. Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Kronecker J. XCVIII. 148-174.

Der Verfasser giebt in dieser Abhandlung die Ableitung der Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale und die Thetafunctionen zweier Veränderlichen für die Nullwerte derselben genügen, indem er vom Additionstheorem ausgeht.

Im § 1 werden zunächst mit Hülfe der bekannten Formeln der ersten Differentialquotienten der Thetaquotienten die Werte für

die ersten Ableitungen der ungeraden derselben nach v_1 und v_2 für die Nullwerte, also für $\vartheta'_\alpha(v_i)_0$ durch die vier $K_{\alpha\beta}$ und die Nullwerte ϑ_α rational ausgedrückt, und es wird gezeigt, dass, wenn man für $\vartheta_\alpha(v_1, v_2):\vartheta_5(v_1, v_2)$ das Weierstrass'sche $al_\alpha(u_1, u_2)$ einführt, sich die entsprechenden Grossen $al'_\alpha(u_i)_0$ durch die ϑ_α allein rational ausdrücken. Ebenso werden die Werte der zweiten Ableitungen der geraden hyperelliptischen Functionen der $al''_\alpha(u_1, u_2)_0$ durch die ϑ_α gegeben, und zwar so, dass $al''_\alpha(u_1, u_2)_0 : al_\alpha$ rational durch die bekannten drei Grössen $\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2$, die selbst wieder rational aus den Nullwerten der Thetaquotienten zusammengesetzt sind, ausgedrückt werden. Hieraus folgt, dass die höheren geraden Ableitungen der geraden und die ungeraden Ableitungen der ungeraden al_α, dividirt durch al_α, resp. durch $al'_\alpha(u_i)_0$, rational in $\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2$ sind.

Nachdem noch durch Anwendung einer linearen Transformation auf die grosse Reihe von Relationen hingewiesen ist, die zwischen den Differentialquotienten der verschiedenen hyperelliptischen Functionen bestehen, werden für die zweiten Differentialquotienten von $\log\vartheta_5(v_1, v_2)$ die entsprechenden Formeln abgeleitet und wird gezeigt, dass für die Nullwerte der Theta die geraden Differentialquotienten sich von der vierten Ordnung an rational durch $\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2$ ausdrücken lassen.

Im zweiten Paragraphen geht der Verfasser von den bekannten Relationen aus, dass die zweiten Ableitungen der Theta nach den v gleich der ersten Ableitung nach den τ multiplicirt mit $2\pi i$ oder $4\pi i$ sind; indem er nun wieder die Grossen u_1 und u_2 statt v_1 und v_2 und die Ableitungen der Theta nach den Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$ einführt, (für diese wird teilweise wieder ihr Ausdruck durch die ϑ_α benutzt) leitet er Differentialgleichungen für die Nullwerte der Theta ab, in denen diese nach den Grössen $\varkappa, \lambda, \mu$ differentiirt sind, und zwar drücken sich die zweiten Ableitungen jedes ϑ_α durch die ersten und dieses selbst und die $\varkappa, \lambda, \mu$ rational aus. Für ϑ_5 sind die Formeln vollständig aufgestellt, ebenso für die aus denselben abgeleiteten Differentialgleichungen für ω. Dieses ist gleich $K'_{11}K_{22} - K_{11}K'_{22}$ (vergl. die Abhandlung des Verfassers Kronecker J. XCV., F. d. M. XV. 1883. 422.).

Im dritten Paragraphen werden auf demselben Wege die Differentialgleichungen für eine Function $f_5(v_1, v_2)$, abgeleitet, wo $f_5(v_1, v_2) = \frac{\partial \vartheta_5(v_1, v_2)}{\partial v_1} : \vartheta_5(v_1, v_2)$; es treten in denselben die Grössen K, auf, für die sich dabei die von Herrn Königsberger in Clebsch Ann. I. (F. d. M. II. 1869. 253) gegebenen Beziehungen ergeben; die schliesslichen Gleichungen entsprechen genau denen für $\vartheta_5(v_1, v_2)$.

Im letzten Paragraphen erwähnt der Verfasser, dass man statt der $\varkappa, \lambda, \mu$ als unabhängige Grössen auch die Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} einführen könne, die Differentialgleichungen aber in diesem Fall eine um vieles complicirtere Gestalt annehmen würden.

Hch.

M. Krause. Zur Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Klein Ann. XXV. 319-322.

Die Note enthält vorläufige Andeutungen über eine allgemeinere Fassung des Transformationsproblems der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Während nämlich bisher verlangt wurde, für einen beliebigen Transformationsgrad die transformirten Thetafunctionen als ganze rationale Functionen der ursprünglichen auszudrücken, lautet das hier gestellte allgemeinere Problem: „Es sollen zwischen den sämtlichen transformirten Thetafunctionen und den ursprünglichen die möglichst allgemeinen Beziehungen hergestellt werden.“ Die weitere Ausführung, welche zu einer Fülle wichtiger, grösstenteils neuer Thetarelationen führt, soll einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben.

M.

M. Krause. Zur Transformation der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Klein Ann. XXV. 323-362.

Der Verfasser stellt sich in der Einleitung zu dieser Abhandlung folgende drei Aufgaben. 1) Die Differentialquotienten

der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung und gewisser einfacher Verbindungen derselben durch die Functionen selbst auszudrücken. Es wird

$$f_{2k,r}(v_1, v_2) = \vartheta_5^{2k}(v_1, v_2)\,\frac{\partial^{2k-1}\dfrac{\vartheta_r(v_1, v_2)}{\vartheta_5(v_1, v_2)}}{\partial v_1^{2k-r-1}\,\partial v_2^{r}}$$

$$= \Sigma c_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\vartheta_\alpha^{a}(v_1, v_2)\,\vartheta_\beta^{\beta}(v_1, v_2)\,\vartheta_\gamma(v_1, v_2)\,\vartheta_\delta^{\delta}(v_1, v_2)$$

gesetzt, wo die Theta ein Göpel'sches Quadrupel bilden und

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2k, \quad \gamma + \delta \equiv 0, \quad \beta + \delta \equiv 1 \,(\text{mod.}\,2), \quad \delta < 4;$$

dann werden die $2k^2$ Constanten $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dadurch bestimmt, dass man die Function $al_5(u_1, u_2)$ einführt, durch Vermehrung um halbe Perioden die entsprechenden Formeln aufstellt und in diesen $u_1 = u_2 = 0$ setzt. Eine zweite Form, in der die c ausgedrückt werden können, entsteht dadurch, dass man statt der $al_\alpha(u)$, wenn sie gerade sind, $al_\alpha(u) : al_\alpha$, wenn sie ungerade sind, $al_\alpha(u) : al'_\alpha(u_i)_0$ einführt und die Constanten nach bekannten Formeln in $\varkappa, \lambda, \mu$ ausdrückt. Ebenso werden die Functionen

$$f_{2k,r} \cdot f_{2k,s} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{2k-1} al_r(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k-r-1}\,\partial u_2^{r}}\cdot\frac{\partial^{2k-1} al_s(u_1, u_2)}{\partial u_1^{2k-s-1}\,\partial u_2^{s}}$$

behandelt und für $k = 1$ die Formeln in extenso gegeben. Dasselbe geschieht darauf für die geraden Differentialquotienten der erwähnten Functionen.

2) Die Potenzen und eine Reihe von Producten der hyperelliptischen Functionen durch die Functionen, gewisse einfache Verbindungen derselben und ihre Differentialquotienten linear auszudrücken. Herr Krause geht von dem Product

$$\vartheta_5^{\alpha}(u)\,\vartheta_2^{\beta}(u)\,\vartheta_{34}^{\gamma}(u)\,\vartheta_{12}^{\delta}(u)$$

aus und stellt die entsprechende Function der $al(u)$ durch zwei Summen der Differentialquotienten von $al_5(u)$ und $al_{34}(u) \cdot al_{12}(u)$ nach u_1 und u_2 dar, indem er einen ähnlichen Gedankengang wie im ersten Paragraphen verfolgt.

3) Das Transformationsproblem in einer allgemeinen Fassung zu behandeln und zwar so, dass die Beziehungen zwischen beliebig vielen transformirten und den ursprünglichen Functionen

gesucht werden. Herr Krause betrachtet zunächst den Fall, dass der Grad der Transformation n ungerade ist. Er geht von der bekannten Hermite'schen Darstellung eines Repräsentanten aus, führt dann einen zweiten ein, der denselben Gleichungen genügt, geht zu den Functionen $al(u_1, u_2)$ über, indem er

$$u_1' = M_0' u_1 + M_1' u_2, \quad u_2' = M_2' u_1 + M_3' u_2$$

u. s. w. setzt, so dass an Stelle der Gleichung zwischen den Thetafunctionen eine von der Form tritt:

$$al_\varepsilon(u_1', u_2') \frac{\vartheta_5(v_1', v_2')}{\vartheta_5^n(v_1, v_2)} = e_0 \, al_\varepsilon(u_1'', u_2'') \frac{\vartheta_5(v_1'', v_2'')}{\vartheta_5^n(v_1, v_2)}$$
$$+ \Sigma' e_{abcd} \, al_0^a(u_1, u_2) al_1^b(u_1, u_2) al_2^c(u_1, u_2) al_3^d(u_1, u_2),$$

wo die letzte Summe dieselben Verbindungen enthält wie die ursprünglichen mit Ausnahme einer. Solcher Gleichungen giebt es $\frac{1}{2}(n^2+1)$. Durch Vermehrung um halbe Perioden erhält man die entsprechenden Gleichungen für die andern 15 Theta und hat so $16(n^2+1)$ Gleichungen mit $\frac{1}{2}(n^2+1)^2$ Unbekannten. Denkt man sich beide Seiten der Gleichungen nach Potenzen von u_1, u_2 entwickelt, so bekommt man beliebig viele Beziehungen zwischen den Constanten e, den Grössen M und den Nullwerten der ursprünglichen und transformirten Theta, und lassen sich die ersten rational durch die andern ausdrücken. Statt zweier Repräsentanten kann man natürlich auch drei oder mehr einführen. Für $n = 3$ werden die Formeln ausführlich gegeben; es werden zunächst die Constanten e, indem man die Argumente v in den Theta Null setzt, direct durch diese bestimmt; darauf durch Differentiiren nach den u die Grössen M eingeführt und aus der Elimination derselben neue Relationen zwischen den e gewonnen.

Für die Transformation geraden Grades gestaltet sich die Untersuchung etwas complicirter, unterscheidet sich aber nicht im wesentlichen von der ungeraden Grades. Siehe auch das vorhergehende Referat. Hob.

A. Cayley. On the transformation of the double theta-functions. Quart. J. XXI. 142-178.

Die Arbeit ist, wie der Herr Verfasser selbst sagt, eine Reproduction der berühmten Abhandlung des Herrn Hermite „Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes" (C. R. XL. 1855). Ausser einigen dem Herrn Verfasser zweckmässig erschienenen Abänderungen in der Bezeichnung hat besonders die Anordnung des Stoffes eine wesentliche Aenderung erfahren.

Der erste Abschnitt des Herrn Cayley (Art. 1-21) reproducirt den auf die Definition und die Eigenschaften der H-Functionen bezüglichen Inhalt der Art. VII-XII des Herrn Hermite. Eine wesentliche Aenderung ist nicht getroffen, nur die Bestimmung der Anzahl der willkürlichen Constanten, welche der allgemeine Ausdruck einer H-Function enthält, ist von Herrn Cayley weiter ausgeführt worden.

Der zweite Abschnitt (Art. 22-44) enthält die Untersuchungen über die zwischen den sechzehn eine Transformation charakterisirenden ganzen Zahlen bestehenden Bedingungen (Hermite III, IV.), die Sätze über die Zusammensetzung der Transformationen (Hermite III.), den Beweis des von Herrn Hermite ohne Beweis mitgeteilten Satzes, dass bei ungeradem k die Congruenz

$$\mu' q' + \nu' r' \equiv \mu q + \nu r \pmod{2}$$

besteht, und endlich die Untersuchung über die Convergenz der transformirten Thetareihe (Hermite VIII.).

Im dritten Abschnitte (Art. 45-53) ist der Fundamentalsatz der Transformationstheorie aufgestellt und bewiesen, während endlich die Schlussartikel an die Untersuchungen der Art. XII. des Herrn Hermite anknüpfen. Kr.

F. Brioschi. Sulla trasformazione delle funzioni iperellittiche del primo ordine. Rom Acc L. Rend (4) I 315-318.

Eine neue Methode zur Ermittelung der Modulargleichungen für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Für die Litteratur des Gegenstandes verweisen wir auf das soeben erschienene Werk von M. Krause: Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung nebst Anwendungen (Leipzig 1886). Vi.

F. Brioschi. Le equazioni modulari nella trasformazione del terzo ordine delle funzioni iperellittiche a due variabili. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 769-771.

Die Transformation der hyperelliptischen Functionen von zwei Variabeln wurde 1855 begründet durch die Abhandlung des Herrn Hermite: „Sur la théorie de la transformation des fonctions Abeliennes“. Von den späteren Arbeiten seien genannt die drei Arbeiten von Herrn Königsberger: über die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung (Crelle J. LXIV, LXV, LXVII, 1864-1867) und Krause: „Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre“ (Acta Math. III. 153-180. F. d. M. XVI. 1884. 435). Die Untersuchungen des Herrn Krause führen auch in dem hier betrachteten Falle der Transformation dritter Ordnung auf eine grosse Zahl von Relationen, deren einige notwendigerweise eine Folge anderer sind, wenn man die Zahl der Unbekannten des Problems beschränkt. Wenn

$$\vartheta(v_1, v_2),\quad \vartheta_{34}(v_1, v_2),\quad \vartheta_1(v_1, v_2),\quad \vartheta_{03}(v_1, v_2)$$

vier Thetafunctionen sind: die beiden ersten gerade, die andern ungerade, und $\theta(v_1, v_2)$, $\theta_{34}(v_1, v_2)$ etc. die transformirten Functionen bezeichnen, so hat man

$$\theta = \varrho[\vartheta^3 + \vartheta(\lambda\vartheta_{34}^2 + \mu\vartheta_1^2 + \nu\vartheta_{03}^2) + \omega\vartheta_{34}\vartheta_1\vartheta_{03}],$$

wo $\varrho, \lambda, \mu, \nu, \omega$ die 5 unbestimmten Coefficienten sind. Sind t, u die Werte von $\vartheta(v_1, v_2)$, $\vartheta_{34}(v_1, v_2)$ für $v_1 = v_2 = 0$ und x, y, z, w die entsprechenden von $\vartheta_4, \vartheta_{12}, \vartheta_{03}, \vartheta_{23}$, so gilt der Satz: „Die Coefficienten λ, μ, ν der Formel für die Transformation dritter Ordnung genügen folgenden Gleichungen:

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 - 4a\lambda - 3 = 0,$$
$$\mu^4 + 6\mu^2 - 4b\mu - 3 = 0,$$
$$\nu^4 + 6\nu^2 - 4c\nu - 3 = 0,$$

wo

$$a = \frac{x^4 - y^4}{x^2y^2},\quad b = \frac{w^4 - z^4}{z^2w^2},\quad c = \frac{t^4 + u^4}{t^2u^2}.“$$

Sind λ_1, μ_1, ν_1 die Werte von λ, μ, ν für die supplementäre Transformation, so ist

$$\lambda\lambda_1 + 3 = 0, \quad \mu\mu_1 + 3 = 0, \quad \nu\nu_1 + 3 = 0.$$

Endlich giebt Herr Brioschi Relationen für die Quadrate der c_0, c_{01}, c_3, c_{12}, welche die Werte der andern 4 geraden Functionen $\vartheta_0(v_1, v_2)$, $\vartheta_{01}(v_1, v_2)$, $\vartheta_3(v_1, v_2)$, $\vartheta_{12}(v_1, v_2)$ für $v_1 = v_2 = 0$ bezeichnen:

$$c_0^2 = \frac{y^2w^2t^2 + x^2z^2u^2}{z^4 + w^4}, \quad c_{01}^2 = \frac{x^2w^2t^2 - y^2z^2u^2}{z^4 - w^4},$$

$$c_3^2 = \frac{x^2w^2u^2 - y^2z^2t^2}{z^4 + w^4}, \quad c_{12}^2 = \frac{y^2w^2u^2 + x^2z^2t^2}{z^4 + w^4},$$

und so kann man ω durch $x, y, \dots$ und die entsprechenden Werte der transformirten Functionen ausdrücken. M.

Domsch. Die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Functionen. Hoppe Arch. (2) I. 193-219; II. 225-264. Diss. Leipzig.

Diese in zwei Teilen veröffentlichte Abhandlung verfolgt den Zweck, die Theorie der hyperelliptischen Functionen in ähnlicher Weise für die Geometrie der im Titel genannten Flächen vierter Ordnung zu verwenden, wie dies in den bekannten Arbeiten von Klein, Borchardt, Weber, Rohn, Darboux, Staude u. a. für die Kummer'sche Fläche und das System confocaler Flächen zweiten Grades geschehen ist. Der Verfasser bemerkt vorab, dass er sich auf den Fall der Cykliden, d. h. derjenigen Flächen beschränkt, bei welchen der Doppelkegelschnitt mit dem Kugelkreis zusammenfällt, und dass diese Beschränkung nicht wesentlich ist, da sie durch eine Collineation aufgehoben werden kann. Auf zwei verschiedene Weisen lässt sich das Ziel, welches sich der Verfasser gesteckt hat, erreichen. Entweder man stellt die Coordinaten eines Punktes der Cyklide direct als hyperelliptische Functionen dar, wobei es zweckmässig ist, als Coordinaten eines Punktes seine fünf Potenzen in Bezug auf fünf ein Orthogonalsystem bildende Kugeln zu betrachten. Oder man benutzt den Umstand, dass durch einfache geometrische Transformationen Flächen zweiten Grades und Kummer'sche Flächen in Cykliden

übergeführt werden können, infolge dessen die bekannten Darstellungen der ersteren Flächen sich auf die Cyklide übertragen lassen. Der Verfasser wählt diesen letzteren Weg und verlegt dadurch den Schwerpunkt seiner Untersuchung auf das Gebiet der Geometrie.

Der erste Teil der Abhandlung enthält zunächst eine ausführliche Besprechung der Transformation, welche das System confocaler Flächen zweiten Grades in ein System confocaler Cykliden überführt. Es bedeute K eine fest angenommene Kugel, P einen beliebigen Punkt des Raumes. Man fasse die Polarebene π des Punktes P, genommen in Bezug auf K, als eine Kugel mit unendlich grossem Radius auf und bestimme in dem Büschel von Kugeln, welches durch K und π bestimmt ist, die beiden Kugeln vom Radius Null. Die Mittelpunkte P', P'' der letzteren lasse man nun dem Punkte P entsprechen. Diese einzweideutige Punktcorrespondenz ist es, welche dem ersten Teile der Abhandlung zu Grunde liegt. Mit ihrer Hülfe werden einerseits die gestaltlichen Verhältnisse der Cykliden und einiger auf ihnen liegenden Curven untersucht, andererseits die von Herrn Darboux gegebenen und von Herrn Staude weiter verfolgten Sätze, welche aus der Anwendung der hyperelliptischen Functionen auf das System confocaler Flächen zweiten Grades entspringen, auf die Cykliden übertragen. An die Stelle der gemeinsamen Tangenten zweier confocalen Flächen zweiten Grades treten dabei die gemeinsamen doppelt-berührenden Kreise zweier confocalen Cykliden.

Der zweite Teil der Abhandlung beginnt mit der Untersuchung der bekannten Lie'schen Transformation des Geraden-Raumes in den Kugel-Raum. Es handelt sich namentlich darum, die durch diese Transformation vermittelte Abbildung der Kummer'schen Fläche auf die Cyklide genau zu untersuchen. Nachdem dieses geschehen ist, vermag der Verfasser nicht nur die Verteilung hyperelliptischer Parameter von der Kummer'schen Fläche auf die Cyklide zu übertragen, sondern auch diejenigen Curven näher zu bestimmen, welche durch gewisse zwischen jenen Parametern festgesetzte Gleichungen definirt werden.

Dabei ist zu bemerken, dass der Verfasser den drei verschiedenen Parameter-Verteilungen entsprechend, welche für die Kummer'sche Fläche studirt worden sind, ebensoviele verschiedene Darstellungen der Cyklide erhält.

Um die Art der Sätze, welche der Verfasser ableitet, an einem Beispiel zu illustriren, führe ich folgenden Satz an:

„Setzt man die 16 ϑ-Functionen gleich Null, so werden hierdurch auf der Cyklide bestimmt: entweder 5 Curven 4[ter], eine Curve 8[ter] und 10 Curven 16[ter] Ordnung; oder 4 Curven 8[ter] und 12 Curven 4[ter] Ordnung oder endlich 16 Gerade, von denen jede einzelne den Kugelkreis trifft. Und zwar tritt der erste, zweite oder dritte Fall ein, je nachdem die erste, zweite oder dritte Art der Parameterverteilung gewählt worden ist."

In einem Schlusscapitel entwickelt der Verfasser einige auf die Kummer'sche Fläche bezüglichen Sätze, welche aus der Bemerkung entspringen, dass das System confocaler Flächen 2[ten] Grades in ein System von Kummer'schen Flächen übergeführt werden kann, indem man die Transformationen des ersten und zweiten Teiles der Abhandlung hinter einander anwendet. Besonders bemerkenswert erscheinen hier die Schliessungssätze, bei welchen an Stelle eines Polygons, also einer geschlossenen Reihe von Geradenstücken, eine geschlossene Reihe von Hyperboloid-Stücken tritt. Hz.

E. Picard. Sur les fonctions hyperabéliennes. Jordan J. (4) I. 87-128.

Unter den Functionen von zwei unabhängigen Variabeln mit einer Gruppe linearer Transformationen in sich hat Herr Picard in früheren Abhandlungen (Acta Math. I. II. IV.) eine erste Klasse, die „hyperfuchs'schen Functionen" studirt, welche eine discontinuirliche Gruppe von Substitutionen

$$\left(x, y; \frac{M x + P y + R}{M_2 x + P_2 y + R_2}, \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_2 x + P_2 y + R_2}\right)$$

zulassen. Es handelt sich hier um die Untersuchung von „hyper-

abelschen Functionen", denen eine Gruppe von Substitutionen der Form

$$(1a)\qquad \left(\xi, \eta;\ \frac{a\xi + b}{c\xi + d},\ \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right)$$

oder

$$(1b)\qquad \left(\xi, \eta;\ \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},\ \frac{\alpha'\xi + \beta'}{\gamma'\xi + \delta'}\right)$$

zukommt. Die Untersuchungen fassen eine Reihe kurzer Publicationen in den Comptes rendus (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 447-449) zusammen.

Bilden unter den obigen Substitutionen die Substitutionen der ξ und die der η je für sich eine discontinuirliche Gruppe, so wird man zu den schon von Poincaré studirten „Fuchs'schen Functionen" geführt. Im allgemeinen aber wird die einzelne Gruppe continuirlich sein können, nur so, dass die Vereinigung der beiden Gruppen (für die Substitutionen der ξ und der η) eine discontinuirliche Gruppe bildet.

Eine ausgedehnte Klasse dieser Gruppen ergiebt sich aus der Betrachtung gewisser indefiniter quaternärer quadratischer Formen f, die sich auf die Gestalt

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$$

reduciren lassen. Ihnen lässt sich eine definite quadratische Form

$$\varphi = (\eta - \eta_0)(\xi - \xi_0)(u_3^2 + u_4^2 - u_1^2 - u_2^2)$$
$$+ 2\,\mathrm{Norm}[(\eta - \xi)u_1 - (1 + \xi\eta)u_2 + (\xi + \eta)u_3 + (1 - \xi\eta)u_4]$$

associiren, in der ξ, η zwei complexe Parameter, ξ_0, η_0 die zu ξ, η conjugirten Grössen bedeuten und wobei $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$ positiv ist. Deutet man nun $\xi = \xi' + i\xi''$, $\eta = \eta' + i\eta''$, als Coordinaten in einem vierdimensionalen Raum, so lässt sich ein bestimmtes Gebiet von „Punkten (ξ, η)" definiren, für welches die Form φ und damit auch f „reducirt" ist. Dieses Gebiet bildet den Fundamentalraum einer Gruppe von Substitutionen der ξ, η, welche sich als von der obigen Form 1 erweisen. Dies Gebiet lässt sich teils analytisch, durch die Discussion der Begrenzungsflächen, teils im Sinne der Analysis situs studiren durch die Fixirung

die dort im Sinne der Analysis situs definirt erscheinen. Picard denkt auf diese wichtige Beziehung bei weiteren Untersuchungen zurückzukommen.

Zum Schlusse wird eine specielle hyperabelsche Gruppe betrachtet, welche sich aus einer schon von Hermite betrachteten Gruppe von Transformationen für gewisse Abel'sche Functionen vom Geschlechte 2 herleitet. Dk.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

J. Deruyts. Sur les fonctions X_n de Legendre. Liège Mém. (2) XI. 22 Seiten.

1) Entwickelung einiger speciellen Functionen nach den Legendre'schen Polynomen X_n. 2) Verschiedene Folgerungen aus einer Entwickelung:

$$X_n = C^n_{2n}\cos n\alpha + C^{n-1}_{2n-2}\,{}^1/_2\,C^1_2\cos(n-2)\alpha + \cdots,$$

wo $\cos\alpha = x$. 3) Ausdehnung des Parseval'schen Satzes auf die Functionen X_n. 4) Andere Eigenschaften. Mn. (Lp.)

H. A. Liebe. Ueber die Analogie der aus der Entwickelung von $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-k}$ entspringenden Functionen mit den Kugelfunctionen. I. Teil. Pr. Borna.

Alle wesentlichen in der vorliegenden Arbeit entwickelten Formeln sind bereits bekannt; sie finden sich, was der Verfasser nirgends erwähnt, teils bei Gauss, teils bei Jacobi (Crelle J. LVI.), sowie bei Heine (Kugelfunctionen, zweite Auflage, T. I. § 69). Eingehender sind die in Rede stehenden Functionen ferner von Koppe behandelt (F. d. M. IX. 1877. 373), dessen Darstellung in vieler Hinsicht (z. B. rücksichtlich der Erörterung über die Convergenz der vorkommenden Entwickelungen) der vorliegenden bei weitem vorzuziehen ist. Referent hält es daher für überflüssig, auf die Einzelheiten der Arbeit näher einzugehen. Wn.

A. W. LETNIKOFF. Ueber die hypersphärischen Functionen und über die Entwickelung einer willkürlichen Function in Reihen, die nach hypersphärischen Functionen fortschreiten. Mosk. Math. Samml. 205-283. (Russisch.)

Wenn man die Function $\frac{1}{(\alpha^2-2\alpha x+1)^l}$ in eine Reihe nach den Potenzen von α entwickelt, so hat man

$$\frac{1}{(\alpha^2-2\alpha x+1)^l} = \Sigma\alpha^n P_n(l,x),$$

wo $P_n(l,x)$ augenscheinlich eine Verallgemeinerung der Kugelfunction ist. Der Verfasser nennt diese Function $P_n(l,x)$ die hypersphärische Function erster Art. Für ganze n hat man

$$P_n(l,x) = \frac{(-1)^n(u^2-1)^{\frac{n}{2}+l}}{\Gamma(n+1)} D^n \frac{1}{(u^2-1)^l} \quad \left(\text{wo } u = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

oder

$$= (-1)^n \frac{(u_1^2+1)^{\frac{n}{2}+l}}{\Gamma(n+1)} D^n \frac{1}{(u_1^2+1)^l}, \quad \left(\text{wo } u_1 = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

je nachdem mod x grösser oder kleiner als Eins ist. Hiernach giebt der Verfasser eine solche Definition der hypersphärischen Function, welche für ein willkürliches n bestehen bleibt. Er zeigt nämlich, dass, wenn man

$$P_n(l,x) = \frac{(-1)^n(u^2-1)^{\frac{n}{2}+l}}{\Gamma(n+1)}\eta_1$$

setzt, η_1 eine particuläre Lösung der folgenden hypergeometrischen Gleichung:

$$(u^2-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(n+l+1)\frac{d\eta}{du} + (n+1)(n+2l\ldots$$

ist. Das giebt dem Verfasser die Möglichkeit, fü[r] ... [particulä]re Lösung η_1 die Ausdrücke in der Form von ... [Diff.-] quotienten (siehe des Verfassers „Untersuchungen über ... der Integrale von der Form $\int_a^x (x-u)^{p-1}f(u)du$", vgl. ... VI. 1874. 167) und von bestimmten Integralen zu geben ...

So bekommt man z. B. für ein willkürliches n zwei Formeln, welche schon früher für ein ganzes n von Heine erhalten wurden:

$$(1) \quad P_n(l,x) = \frac{2^{1-2l}\Gamma(n+2l)}{\Gamma(l).\Gamma(n+1)}\int_0^\pi (x-\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n.\sin^{2l-1}\varphi\, d\varphi,$$

$$(2) \quad P_n(l,x) = \frac{2^{1-2l}\Gamma(n+2l)}{\Gamma(l).\Gamma(n+1)}\int_0^\pi \frac{\sin^{2l-1}\varphi}{(x-\sqrt{x^2-1}.\cos\varphi)^{n+2l}}\cdot d\varphi.$$

Die Function $P_n(l,x)$ ist selbst diejenige particuläre Lösung der Gleichung

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+(2l+1)x\frac{dy}{dx}-n(n+2l)y=0,$$

welche bei $x=1$ endlich bleibt und die Grösse $\frac{\Gamma(n+2l)}{\Gamma(n+1).\Gamma(2l)}$ hat. Die Zusammenstellung dieses Resultates mit den allgemeinen Untersuchungen des Verfassers über die hypergeometrische Gleichung giebt ihm die neuen Ausdrücke für $P_n(l,x)$ in der Form von Differentialquotienten und bestimmten Integralen.

Aus der Definitionsgleichung für $P_n(l,x)$ bekommt man:

$$\frac{1}{(y-x)^l} = 2^l\sum_0^\infty \frac{1}{(y+\sqrt{y^2-1})^{n+l}}\,P_n(l,x)$$

und nach der Differentiation dieser Identität mit dem Index $1-l$ zwischen den Grenzen 0 und ∞ (siehe des Verfassers „Untersuchungen u. s. w.“) hat man

$$\frac{1}{(y-x)} = \sum_0^\infty (2n+2l)P_n(l,x)\,\frac{\Gamma(l).\Gamma(2n+2l)}{(-1)^{n+2l}2^n\Gamma(n+l)}\,[D(y^2-1)^{-n-l-1}]_x.$$

Der Factor von $(2n+2l)P_n(l,x)$ wird bei willkürlichem n als hypersphärische Function zweiter Art $Q_n(l,x)$ definirt. Die Anwendung der allgemeinen Formeln des Verfassers auf die Differentialgleichung, welcher die Function $Q_n(l,x)$ genügt, giebt dann die Ausdrücke dieser Function in der Form von Differentialquotienten und von bestimmten Integralen.

Um endlich die Entwickelung der willkürlichen Functionen in Reihen, die nach hypersphärischen Functionen erster Art

fortschreiten, zu bekommen, benutzt der Verfasser die Methode, welcher sich Herr C. Neumann bei der Entwickelung in Reihen von Kugel- und Bessel'schen Functionen bedient hatte. Diese Methode beruht auf der bekannten Formel von Cauchy:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(y)}{y-x}\, dy$$

und giebt dem Verfasser die folgende Entwickelung:

$$f(x) = \frac{1}{\pi i}\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+l)P_n(l,x)\int Q_n(l,y)f(y)dy,$$

wo die Coefficienten bei $P_n(l,x)$ geschlossene Integrale sind. Die Entwickelung findet statt für alle Werte der Veränderlichen, die den Punkten innerhalb einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 entsprechen, wenn die Function $f(x)$ selbst eindeutig, endlich und stetig innerhalb dieser Ellipse ist. Weiter zeigt der Verfasser, wie die geschlossenen Integrale durch reelle zwischen den Grenzen ± 1 ersetzt werden können, und erhält dann für die Entwickelung der Function $f(x)$ die Formel:

$$f(x) = \sum_{0}^{n=\infty} B_n P_n(l,x)\int_{-1}^{+1}(1-\beta^2)^{l-\frac{1}{2}} P_n(l,\beta)f(\beta)d\beta,$$

wo

$$B_n = (n+l)\frac{2^{2l-1}\Gamma^2(l).\Gamma(n+1)}{\pi.\Gamma(n+2l)}.$$

Diese allgemeine Methode enthält als specielle Fälle die bekannte Reihe von Laplace und die Fourier'schen Cosinus- und Sinus-Reihen. (Hinsichtlich der früheren Litteratur, die dem Verfasser nicht bekannt gewesen zu sein scheint, vergleiche die Bemerkungen im vorhergehenden Referat. Red.) Wi.

J. Lindskog. En rings rörelse i en vätska. Upsala Universitets Årsskrift 1885. 4), + 44 Seiten. Auch als Inauguraldissertat publicirt.

Die Abhandlung besteht aus drei Abteil[illegible] In der ersten Abteilung untersucht der Verfasser die v[illegible] sactions

of the Royal Society of London Vol. 172, part. III. 1881) sogenannten „zonal toroidal functions“ (F. d. M. XIV. 1882. 799-800), die bekanntlich als Kugelfunctionen mit der Ordnungszahl $n-\frac{1}{2}$ betrachtet werden können. Die zweite Abteilung enthält einige allgemeine Sätze der Hydrodynamik, die hauptsächlich aus Neumann's „Hydrodynamischen Untersuchungen“ (1883) entnommen sind. Die dritte Abteilung endlich behandelt die Bewegung eines Ringes („Torus“) in einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit; der Ring wird als längs seiner Axe beweglich angenommen. Die Bewegungsgleichung wird mittels Einführung dipolarer Coordinaten und mit Benutzung von „zonal toroidal functions“ erhalten. E.

K. A. Andreieff. Ueber die Entwickelung einer Function in eine Reihe nach Functionen, die den Legendre'schen ähnlich sind. St. Petersb. Abh. LI (Russisch.)

Wenn man das bestimmte Integral

$$\int_a^b \frac{\theta(z)}{x-z}\,dz \qquad (b < a),$$

wo $\theta(z)$ zwischen den Grenzen sein Zeichen nicht ändert, in einen Kettenbruch entwickelt, so bilden die aufeinander folgenden Nenner der Näherungsbrüche ψ_i eine Reihe von Functionen, die den Legendre'schen ähnlich sind. Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, den allgemeinen Ausdruck des Restes bei der Entwickelung jeder gegebenen Function $f(x)$ in eine Reihe nach den Functionen ψ zu finden, und erhält für diesen Rest R_n zwei Formeln:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\dfrac{d^n\psi_n}{dx^n}}\,\psi_n(x),$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,\frac{\int x^n\psi_n\theta\,dx}{\int \psi_n^2\theta\,dx}\,\psi_n(x).$$

wo ξ von x abhängt und bei $a < x < b$ auch $a < \xi < b$, bei $x < a < b$ dagegen $x < \xi < b$, bei $a < b < x$ endlich $a < \xi < x$ wird. Es wird dann die Anwendung des gefundenen Resultates zur Ableitung der Tschebyscheff'schen Formel gemacht, welche in der folgenden Weise sich darstellt:

$$\int_a^b f_1(x).f_2(x).\theta\,dx = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\int_a^b f_1\psi_\kappa\theta\,dx \int_a^b f_2\psi_\kappa\theta\,dx}{\int_a^b \psi_\kappa^2\theta\,dx} + R_n,$$

wo

$$R_n = \frac{f_1^{(n)}(\eta)f_2^{(n)}(\eta_1)\left(\int_a^b x^n\psi_n\theta\,dx\right)^2}{n!\int_a^b \psi_n^2\theta\,dx}$$

(siehe F. d. M. XV. 1883. 222, 228). Hier liegen η und η_1 zwischen den Grenzen a und b. Wi.

E. V. Coates. Bessel's functions of the second order. Quart. J. XXI. 183-192.

Für die Bessel'sche Function zweiter Art mit dem imaginären Argument ix findet der Verfasser das folgende Integral

$$(1) \qquad Y_n(ix) = (-i)^n \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,\varphi}\,\mathrm{ch}(n\varphi)\,d\varphi,$$

wo ch den hyperbolischen Cosinus bezeichnet. Das Resultat, das übrigens nicht neu ist (cf. Heine Kugelfunctionen, zweite Auflage, T. I 247, 248), folgt daraus, dass obiges Integral der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen genügt und für $x = 0$ unendlich wird. Aus dem Integral wird eine Anzahl von Recursionsformeln für $Y_n(ix)$ hergeleitet, die mit bekannten Eigenschaften der Bessel'schen Functionen erster Art genau übereinstimmen. Ein merkwürdiger Zusammenhang besteht zwischen der obigen Integraldarstellung $Y_n(ix)$ und einer anderen, die der Verfasser abgeleitet hat (F. d. M. XVI. 1884. 453, 454). Setzt man

$$(2) \qquad {}_1Y_n(ix) = \frac{(-1)^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\,x^{-n}\int_0^\infty \cos(x\,\mathrm{sh}\,\varphi)\,\mathrm{ch}^{-2n}\varphi\,d\varphi,$$

während zum Unterschiede das Integral (1) mit ${}_2Y_n(ix)$ bezeichnet wird, so ist

$${}_1Y_n(ix) - {}_2Y_n(ix) = J_n(ix)\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x}\, dx,$$

wo J_n die Bessel'sche Function erster Art ist.

Ferner wird gezeigt, wie aus dem Integral (1) folgt, dass $\frac{Y_r(ix)}{\log x}$ für $x = 0$ endlich ist. Schliesslich wird ein Beispiel einer Reihenentwickelung mitgeteilt, die nach den Functionen J_r mit den Argumenten $x, 2x, 3x, \dots$ fortschreitet. Wn.

E. Papperitz. Zur algebraischen Transformation der hypergeometrischen Functionen. Leipz. Ber. 60-69.

Die Note soll einen Beitrag zur Lösung des allgemeinen Problems geben, die algebraischen Integrale der Kummer'schen Differentialgleichung

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{(1-\mu^2)x^2 + (\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 - 1)x + (1-\lambda^2)}{2x^2(1-x)^2}\, x'^2$$
$$= \frac{(1-\mu'^2)y^2 + (\lambda'^2 + \mu'^2 - \nu'^2 - 1)y + (1-\lambda'^2)}{2y^2(1-y)^2},$$

von welcher die Transformation der hypergeometrischen Functionen abhängt, zu bestimmen. Die Frage nach den rationalen Integralen dieser Gleichung hat ihren Abschluss gefunden durch die Abhandlung des Herrn Goursat: „Sur les intégrales rationnelles de l'équation de Kummer", C. R. XCVIII, 419-422, 609-613 und Klein Ann. XXIV. 445-460 (F. d. M. XVI. 1884. 269). Der Herr Verfasser gelangt zu einer Verallgemeinerung des Resultates des Herrn Goursat. Die ausführliche Entwickelung soll in den Math. Annalen veröffentlicht werden. M.

N. Zinine. Die Function Gamma und die Function Omega. Warschau. 1884. (Russisch.)

Die Arbeit enthält eine klare und interessante Zusammenstellung der bekannten Resultate über die Gammafunction und über die Heine'sche Function $\Omega(x, a)$, welche als unendliches Product definirt ist:

$$\Omega(x, a) = c \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{2na}}{1 - e^{2(n+x)a}},$$

wo a einen reellen oder complexen Parameter bezeichnet.

Wi.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

G. Cantor. Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n. Acta Math. VII. 105-124.

Diese Arbeit bildet einen vorläufigen Abschluss der langen Reihe von Untersuchungen des Verfassers über Punktmengen, über welche in den früheren Bänden dieses Jahrbuchs berichtet worden ist. Zuerst (§ 1) wird eine Reihe von Definitionen und Sätzen über abgeschlossene Punktmengen wiederholt, welche teils vom Verfasser, teils von Bendixson und Phragmén schon früher aufgestellt worden sind. Diese Sätze werden dann (§ 2) auf beliebige, nicht abgeschlossene Punktmengen ausgedehnt. Hierbei ergiebt sich, dass bei einer solchen Punktmenge sich gewisse wesentlich verschiedene Bestandteile unterscheiden lassen, für die nun (§ 3) besondere Bezeichnungen und Namen eingeführt werden. Nachdem noch die neu erhaltenen Resultate wieder rückwärts für abgeschlossene Punktmengen specialisirt worden sind, giebt der Verfasser in einem Schlussworte Auskunft über diejenigen noch dunklen Punkte der mathematischen Physik, für deren Aufhellung die Untersuchungen über Punktmengen förderlich zu sein scheinen. Er erläutert namentlich seine Ansicht

über den Zusammenhang der Theorie der Punktmengen mit derjenigen der Körper- und Aether-Atome und stellt die Hypothese auf, dass die Körpermaterie von „erster“, die Aethermaterie von „zweiter Mächtigkeit“ sei. Es mag bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen werden, dass eine vollständige, auf denselben physikalischen Grundanschauungen, wie sie hier vom Verfasser adoptirt werden, beruhende atomistische Naturerklärung von Grassmann (Die Lebenslehre oder Biologie. Stettin 1881. Referat in Hoffmann Z. XIV. 537) durchgeführt worden ist.

Schg.

E. Phragmén. Ueber die Begrenzung von Continua. Acta Math. VII. 43-48.

Der Verfasser beweist den Satz: „Ist die Punktmenge P die vollständige Begrenzung eines Continuums (im Weierstrass'schen Sinne) A, und existiren in der Ebene Punkte, die ausserhalb A liegen, so muss irgend ein Teil von P zusammenhängend sein.“ Das zu diesem Zweck eingeschlagene Verfahren enthält gleichzeitig einen einfacheren Beweis für einen vom Verfasser bereits 1884 in der Stockh. Oefv. (F. d. M. XVI. 1884. 333) bewiesenen specielleren Satz. Zum Schluss wird der obige Satz auf den Raum von n Dimensionen ausgedehnt. Schg.

J. Bendixson. Sur la puissance des ensembles parfaits de points. Stockh. Vetensk. Bihang IX. 15 S.

Es wird bewiesen, dass alle perfecten Punktmengen, die in einem continuirlichen Raum von n Dimensionen liegen, dieselbe Mächtigkeit haben, und zwar die Mächtigkeit der Menge aller Zahlen zwischen 0 und 1. E.

J. Bendixson. Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles. Stockh. Vetensk. Bihang IX. 7 Seiten.

Das Theorem, das bewiesen wird, ist dieses: Wenn A ein von der Punktmenge P vollständig begrenztes Continuum im

Gebiete der Veränderlichen x ist und die Punktmenge P ihre Derivirte P' enthält, wenn ferner P_1 ein Teil von P ist, der auch seine Derivirte P'_1 enthält, so kann man immer vom Continuum A eine isolirte Punktmenge Q_1 absondern derart, dass $Q'_1 \equiv P_1$.

E.

A. Harnack. Ueber den Inhalt von Punktmengen. Klein Ann. XXV. 241-250.

Auf Grund der Definition einer discreten Punktmenge (Punktmenge vom Inhalte Null) werden eine Reihe von (zum Teil von Herrn G. Cantor herrührenden) Sätzen über die Beziehung des Inhaltes einer Punktmenge P zu dem einer Ableitung $P^{(\nu)}$ bewiesen. Weiter wird, und zwar gültig für Punktmengen von beliebiger Dimension, die Definition des Inhaltes und eine Methode zur Bestimmung desselben gegeben, wobei sich auch die Frage nach der Eindeutigkeit dieser Bestimmung für verschiedene zur Herleitung verwandte Grenzprocesse [eine Frage, auf welche zuerst Stolz (Klein Ann. XXIII., F. d. M. XVI. 1884. 333) aufmerksam gemacht hat] entscheidet. Eine Anmerkung bezeichnet die Stellung des Verfassers zu der von Cantor eingeführten Unterscheidung des „Uneigentlich-“ und des „Eigentlich-Unendlichen“.

Dk.

M. Lerch. Beitrag zur Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Prag. Ber. 1884. 176-178. (Böhmisch.)

Beschäftigt sich mit diesbezüglichen Sätzen von Weierstrass, Picard und Cantor.

Std.

O. Stolz. Das letzte Axiom der Geometrie. Ber. d. naturw. medic. Vereins in Innsbruck. XV. 25-31.

Der Verfasser empfiehlt die Axiome der Geometrie als gültig für einen hinreichend kleinen Raum aufzustellen, so dass sie die Grenzen der Erfahrung nicht überschreiten. Hiernach würde also der Satz, dass nur eine gerade Verbindung zweier Punkte

möglich ist, nicht ausschliessen, dass die verlängerte Gerade in sich selbst zurückläuft. Das Parallelenaxiom wird hier vertreten durch den Satz, dass ein Viereck von lauter rechten Winkeln existirt. Auf diesen folgt eine Reihe von 10 Sätzen als successive Folgerungen, welche in die euklidische Theorie überführen. Die Beweise sind im Anhang angedeutet. H.

A. Thue. Et bidrag til den absolute geometri. Lie Arch. X. 301-328.

Entwickelung geometrischer Sätze, die vom Parallelenaxiome unabhängig sind. L.

A. Thue. Om störrelsesbegreberne areal og volum. Lie Arch. X. 181-188.

Euklid setzt bekanntlich, wenn auch nicht explicite voraus, dass der Flächeninhalt einer ebenen Figur und das Volumen eines Körpers Grössen sind. Es wird versucht, die Richtigkeit dieser Axiome wirklich zu beweisen. L.

C. Ladd-Franklin. On the so-called d'Alembert-Carnot geometrical paradox. Mess XV. 36-37.

Auf die Erörterung zwischen den Herren Cayley und Sylvester (XIV. pag. 92 und 113; F. d. M. XVI. 1884. 462) Bezug nehmend, stellt die Verfasserin eine Betrachtung an, welche, wie sie meint, das Dunkel der Frage aufhellt. Glr. (Lp.)

A. Thue. Am en Dualisme i den absolute Geometri. Zeuthen T. (5) III. 129-147.

Da in der „absoluten" Geometrie zwei Gerade sich nicht immer schneiden, kann das Dualitätsprincip in dem gewöhnlichen Sinne hier nicht gelten. Da aber für zwei sich nicht schneidende Gerade immer eine gemeinschaftliche Normale existirt, so lässt sich dennoch ein solches Princip auch hier aufstellen.

Absolut bewiesene Sätze, welche Eigenschaften der Schnittgeraden oder Schnittpunkte mehrerer Ebenen aussprechen, werden im Falle, wo sie wegen der Sinnlosigkeit der erwähnten Begriffe illusorisch werden, doch bestehen bleiben, wofern man nur die Worte „Punkt in einer Ebene" mit „Normalebene auf einer Ebene" und „Gerade in einer Ebene" mit „Normalgerade auf einer Ebene" vertauscht. Gm.

W. Killing. Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig. Teubner. XII u. 264 Seiten.

Dieses Werk giebt unter Zugrundelegung einer einheitlichen Methode und in systematischer Anordnung eine zusammenhängende Darstellung alles dessen, was bisher vom Verfasser selbst und zahlreichen anderen Autoren auf dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie geleistet worden ist. Der erste der beiden Hauptteile ist der dreidimensionalen Geometrie gewidmet und behandelt die Geometrien der verschiedenen Raumformen in gemeinschaftlicher Darstellung. Dies wird namentlich ermöglicht durch principielle Verwendung der Weierstrass'schen Coordinaten

$$p = \cos\frac{r}{k}, \quad x = k.\sin\frac{r}{k}\cdot\sin\varphi, \quad y = k.\sin\frac{r}{k}\cdot\cos\varphi,$$

die für $k = \infty$ in die rechtwinkligen, resp. Polar-Coordinaten der euklidischen Geometrie übergehen, während positive und negative endliche Werte von k^2 der Riemann'schen, resp. Lobatschewsky'schen Raumform entsprechen. Im zweiten Teile werden die verschiedenen Raumformen des n-dimensionalen Raumes untersucht, nachdem eine geeignete Verallgemeinerung des Weierstrass'schen Coordinatensystems auch hierzu das nötige Werkzeug geschaffen hat. Metrische und projectivische Geometrie werden hier in gleichem Masse berücksichtigt. Ein umfangreicher Abschnitt musste wegen der Reichhaltigkeit der hier vorhandenen Litteratur der Krümmungstheorie gewidmet werden. Den Schluss bildet ein umfangreicher Litteratur-Nachweis. Aus-

führliches Referat siehe in Schloemilch Zeitschr. Jahrg. 1886. S. 220.

Schg.

P. Cassani. Geometria pura euclidea degli spazi superiori. Ven. Atti (6) I. 440-447. II. 121-135. 245-254.

Die Arbeit unterscheidet sich, wie der Verfasser selbst im Vorworte betont, von der ähnliche Zwecke verfolgenden Veronese'schen (Math. Ann. XIX., F. d. M. XIII. 1881. 485) durch die auf Begriffe und Lehren der Projectivität verzichtende, völlig elementare Darstellung, und behandelt demnach die Elemente der mehrdimensionalen Geometrie in ganz analoger Weise, wie es in den Lehrbüchern der ebenen und räumlichen Geometrie geschieht.

Hauptgebiet ist der ebene vierdimensionale Raum (M_4). Der erste, einleitende Abschnitt handelt von den gegenseitigen Beziehungen der (dreidimensionalen) Räume, Ebenen und Geraden. Ein Raum wird erzeugt durch Drehung einer Geraden um einen ihrer Punkte, wobei die Gerade beständig eine Ebene schneidet. Bei dieser Gelegenheit schlägt der Verfasser vor, die analoge Construction einer Ebene durch Drehung einer Geraden, die beständig eine andere Gerade schneidet, so abzuändern, dass statt der letzteren Geraden eine die erstere im Drehungspunkte berührende Kreislinie vorausgesetzt wird. Hierdurch wird allerdings das von Genocchi gegen die erste Construction erhobene Bedenken beseitigt, dass erst der Durchgang der ersten Geraden durch den unendlich fernen Punkt der zweiten den Zusammenhang zwischen den beiden symmetrisch entstehenden Teilen der Ebene herstelle, aber die Voraussetzung einer den Begriff der Ebene bereits involvirenden Kreislinie dürfte nach Ansicht des Referenten nicht minder bedenklich sein. Von den Sätzen, welche die gemeinsamen Elemente von Ebenen, Räumen und Geraden betreffen, sei hier nur der früher ernstlich angefochtene Satz erwähnt, dass zwei Ebenen in der M_4 nur einen Punkt gemeinsam zu haben brauchen. Vier durch einen Punkt gehende Räume begrenzen ein Winkelgebilde, dessen fundamentale Bedeutung hier dieselbe ist wie in der Stereometrie die des ana-

logen Gebildes der dreiseitigen Ecke. Die vier Räume schneiden sich paarweise in sechs Ebenen, deren räumliche Projectionen die Ebenen sind, welche man durch einen Punkt des Raumes und die Seiten und Diagonalen eines räumlichen Vierecks legt. Der Bemerkung in Nr. 13, dass diese beiden Ebenentripel 2.3 Schnittlinien in der Anordnung von Tetraederkanten haben, kann Referent nicht beipflichten, sondern kommt nach dem Ergebnis des Projectionsmodells zu dem Resultat, dass nur vier Schnittlinien existiren, in deren jeder sich drei der vier Ebenen schneiden. Den Schluss dieses ersten Abschnittes bilden die Bestimmungsweisen eines Raumes durch Punkt, Gerade und Ebene und die Bestimmung der Anzahl von Räumen, welche durch gegebene Elemente gehen.

Der zweite Abschnitt bringt die Begriffe des unendlich fernen Raumes einer R_4 und der parallelen Räume nebst den einfachsten Sätzen, in genauem Anschluss an die Sätze über parallele Ebenen; der dritte die Begriffe der senkrechten Gebilde. Der Fundamentalsatz lautet hier: Stehen zwei Ebenen α_1, α_2 auf einer Geraden a in einem Punkte A senkrecht, so steht jede durch A gehende Ebene des durch α_1 und α_2 bestimmten Raumes auf a senkrecht. Im vierten Abschnitt werden zuerst die beiden Seiten eines Raumes unterschieden. Sodann führt der Begriff der Drehung eines Halbkegels um seinen Axenschnitt auf das dreidimensionale Kegelgebilde, für welches auch noch andere Erzeugungsweisen gegeben werden. Es folgt das Kugelgebilde mit den Begriffen der grössten Kugel, der Tangentialräume u. a. m. Der kleinste Winkel zweier Ebenen wird von zwei Geraden gebildet, von denen jede die orthogonale Projection der anderen ist. Der Verfasser findet, dass zwei verschiedene derartige Minimalwinkel existiren, und beschreibt ihre Construction.

Während die vorangehenden Abschnitte im wesentlichen Verallgemeinerungen der euklidischen Geometrie enthielten, wendet sich der fünfte nach einigen Ergänzungen des Vorhergehenden (Bestimmung des Kugelgebildes durch 5 Bedingungen, Bestimmung des Mittelpunktes eines gegebenen Kugelgebildes) zu verschiedenen Lehren der neueren Geometrie. So werden besprochen

Potenzräume und Potenzebenen von 2 resp. 3 Kugelgebilden, das rechtwinklige vieraxige Coordinatensystem, die Umdrehungsgebilde zweiten Grades, die Kegelschnitte (Schnitte eines dreidimensionalen Kegels mit einem Raume). Aus der Dualität zwischen Ebenen und Geraden werden verschiedene Sätze abgeleitet, und die sechs Bedingungen, durch welche im vierdimensionalen Raume eine Gerade oder eine Ebene bestimmt sind, führen zu der Auffassung der vierdimensionalen Geometrie als einer sechsdimensionalen Linien- oder Ebenen-Geometrie. Auf dieser Grundlage entsteht naturgemäss der Uebergang zu Complexen und Congruenzen. Den vorläufigen Schluss der Arbeit bilden Untersuchungen über Perspectivität, Homologie, Correspondenz und Polarität. Schg.

P. Cassani. Geometria pura euclidiana ad *n* dimensioni. Batt. G. XXIII. 1-19.

Diese Note enthält den ersten, auf den Raum von vier Dimensionen bezüglichen Teil einer elementaren Arbeit über die euklidische Geometrie von *n* Dimensionen. Es werden in ihr sehr einfache bekannte oder unmittelbar aus bekannten Sätzen abzuleitende Lehrsätze dargelegt inbetreff der Parallelen, der Kugeln, der Umdrehungskegel, der Winkel, u. s. w. in diesem Raume. Die Methode besteht darin, dass man mit Hülfe der analogen Sätze des gewöhnlichen Raumes zu den obigen aufsteigt; sie wird indes nicht immer mit Strenge angewandt. (Manches der Ergebnisse ist sogar nicht zutreffend.)

Se. (Lp.)

R. Hoppe. Regelmässig linear begrenzter Winkel von vier Dimensionen. Hoppe Arch. (2) III. 111-112.

Nimmt man ein regelmässiges Polyeder zur Basis einer vierdehnigen Pyramide, deren Spitze auf dem, im Mittelpunkte auf dem Raume des Polyeders errichteten Lote liegt, so nennt man den vierdehnigen Winkel an der Spitze einen regelmässigen

Winkel. Die Grösse desselben bestimmt der Verfasser für jedes der fünf regulären Polyeder vermittelst eines Integrals.

Scht.

P. Cassani. Sugli angoli degli spazi lineari. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 46-47.

P. Cassani. Gli angoli degli spazi lineari. Rom. Acc. L. Rend. I. 133-135.

In der ersten Note wird als Winkel zweier linearen Räume von beliebigen Dimensionenzahlen der kleinste Winkel definirt, welchen zwei in beiden Räumen durch ihren gemeinsamen Punkt gezogene Geraden mit einander bilden können. In der zweiten wird gegenüber der von Jordan (Essai de géométrie à n dimensions. F. d. M. VII. 1875. 457) gegebenen analytischen Lösung desselben Problems auf den von Veronese befolgten rein geometrischen Weg aufmerksam gemacht, und der einschlägige Passus aus der Veronese'schen Abhandlung „Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen" (Math. Ann. XIX., F. d. M. XIII. 1881. 485.) mitgeteilt.

Schg.

Castelnuovo. Angoli di due spazi contenuti nello spazio a n dimensioni. Ven. Ist. Atti. (6) III. 1331-1348.

Die von Cassani gefundenen Eigenschaften der Winkel beliebiger Dimensionenzahl werden vom Verfasser auf einem anderen Wege abgeleitet, welcher gleichzeitig zur Aufstellung neuer Sätze und zur Lösung verschiedener Aufgaben führt, die denselben Gegenstand betreffen. Von den vier Abschnitten der Arbeit giebt der erste die Definition des Winkels zweier Räume R_m und R'_m in einem Raume von doppelt so grosser Dimensionenzahl R_{2m}. Die Anzahl solcher Winkel ist im allgemeinen gleich m. Auf diese Definition lässt sich dann auch der Fall zurückführen, dass im n-dimensionalen Raume die winkelbildenden Räume von verschiedener Dimensionenzahl (p, q) sind.

während alsdann die Anzahl dieser Winkel der kleinsten unter den Zahlen $p, q, n-p, n-q$ gleich ist. Im zweiten Abschnitt ist speciell von den beiden Winkeln zweier Ebenen im vierdimensionalen Raume die Rede. Es wird bewiesen, dass diese Winkel stets reell, und dass ihre Ebenen zu einander senkrecht sind. Hieran schliessen sich goniometrische Formeln und Sätze über Projectionen nebst Untersuchung specieller, die Lage der winkelbildenden Ebenen betreffender Fälle. Der dritte Abschnitt bringt Analoges über die Winkel zweier dreidimensionalen Räume im sechsdimensionalen, der letzte giebt Ausdehnungen der vorherigen Sätze auf das n dimensionale Gebiet.

Schg.

A. Porchiesi. Sopra una corrispondenza fra lo spazio non Euclideo ed il piano Euclideo. Bologna Mem. (4) V. 421-452.

In einer früheren Abhandlung (Sui sistemi di coniche che passano per due punti fissi, Mem. Ist. Bologna, Ser. IV, t. III) hatte der Verfasser eine eindeutige Verwandtschaft zwischen den Punkten des Raumes und den Kreisen der Ebene behandelt. In der vorliegenden Arbeit dehnt er diese Untersuchung auf den Fall aus, dass an die Stelle des euklidischen ein nichteuklidischer Raum tritt, in welchem die quadratische Fundamentalfläche alle Punkte enthält, deren zugeordnete Kreise in der euklidischen Ebene den Radius Null haben. Indem nun die Geometrie der ebenen Kreise ausführlich durchgenommen wird, ergeben sich durch Transformation zahlreiche Sätze der nichteuklidischen Geometrie und Trigonometrie, z. B. über die Abstände von Punkten und Winkeln von Geraden, über Kugeln und Kreise, letztere betrachtet als ebene Kugelschnitte, über geometrische Oerter, Dreiecke, die einem Kreise, und Tetraeder, die einer Kugel einbeschrieben sind, über die Potenz eines Punktes in Bezug auf eine Kugel, Aehnlichkeitspunkte u. s. w. Schg.

P. del Pezzo. Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni. Nap. Rend. XXIV. 212-216.

Nach der Untersuchung Veronese's kann, wenn $m < n$ ist, jede Curve vom Geschlecht p und von höchstens $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung im m-dimensionalen Raume als Projection einer „Normalcurve" vom Geschlecht p im n-dimensionalen Raume betrachtet werden. Der Verfasser beginnt nun in obiger Arbeit eine analoge Untersuchung über Oberflächen, indem er sich vorläufig auf diejenigen Flächen n^{ter} Ordnung beschränkt, die in keinem Raume mit weniger als $n+1$ Dimensionen enthalten sein können. Diese „Normalflächen" sind stets rationale Regelflächen, mit Ausnahme derjenigen Flächen vierter Ordnung des fünfdimensionalen Raumes, welche eine doppelt unendliche Anzahl von Kegelschnitten enthalten. Ueber diese auch von Veronese und Segre untersuchten Flächen und die in ihnen enthaltenen Normalcurven werden verschiedene Sätze mitgeteilt. Schg.

G. Loria. Su una generalizzazione delle proprietà involutorie del quadrangolo e del quadrilatero completi. Lomb. Rend. (2) XVIII. 491-494.

Beweis des Satzes: Die durch $n+2$ Punkte im n-dimensionalen Raum bestimmten $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ Geraden und $(n-1)$ dimensionalen Räume entsprechen einander paarweise so, dass jedes Paar sämtliche Punkte enthält. Die Schnittgebilde aller dieser Paare mit einem beliebigen $(n-1)$-dimensionalen Raume sind polar zu einander in Bezug auf ein im letzteren Raume liegendes bestimmtes quadratisches Gebilde. Für $n = 3$ erhält man einen bekannten Satz, der hier in einem neuen Zusammenhange erscheint. Schg.

C. Quensen. Der Cylinder in homogenen Räumen. Hoppe Arch. (2) III. 45-51.

Es werden die Durchschnittscurven eines im negativ gekrümmten Raume gegebenen Cylinders mit einer Ebene unter-

sucht, woran sich die Inhaltsbestimmung des Cylinders anschliesst, welche letztere der Verfasser auch schon in seiner Dissertation gegeben hatte. Schg.

J. Sachs. Zur Geometrie der reciproken Radien. Bad. Schulbl. II. 141-145, 157-160.

Davon ausgehend, dass Geometrie Invariantentheorie einer gegebenen Mannigfaltigkeit in Bezug auf eine in derselben gegebene Transformationsgruppe ist, und dass dann die verschiedenen Methoden der Geometrie sich nach der Art dieser gegebenen Transformationsgruppe und nach dem Umfange der Gebilde unterscheiden, auf die sie angewandt werden soll, gelangt der Verfasser zu dem imaginären Kugelkreise, der als festes Gebilde dient für den Uebergang aus der die Transformationen der projectiven Geometrie zugrunde legenden neueren Geometrie zu der die Hauptgruppe benutzenden euklidischen Geometrie. Setzt man an die Stelle der Hauptgruppe irgend eine erweiterte Gruppe räumlicher Umformungen, so erhält man die Grundlagen der verschiedenen geometrischen Richtungen. Und hier ist neben dem Uebergange von der elementaren Geometrie zur projectiven der erste Schritt derjenige von der elementaren Geometrie zur Geometrie der reciproken Radien, indem zu der Hauptgruppe noch eine Transformationsgruppe hinzugenommen wird, die als Gruppe der „Involution“ zu bezeichnen ist, und durch die Zuordnung der Raumelemente constanten Abstandsproductes von einem gegebenen gleichartigen definirt wird. Von diesen auch für den n dimensionalen Punktraum ausgesprochenen Gedanken gelangt der Verfasser zu dem von Felix Klein bewiesenen (Math. Ann. V.) Satze, dass die metrische Geometrie des R_{n-1} als stereographische Projection der Geometrie auf einer im R_n gelegenen M_{n-1} aufgefasst werden kann. Den Schlussstein der ersten Abhandlung bildet die Erkenntnis, dass die Transformation der reciproken Radien als Grundlage einer selbständigen Geometrie im Raume beliebig vieler Dimensionen gleichberechtigt in der Reihe der übrigen Methoden auftritt, obwohl bis jetzt nur

die elementare und die projective in methodischem Zusammenhang dargestellt seien. In der zweiten Abhandlung bespricht daher der Verfasser die Transformation der reciproken Radien ausführlicher, indem er mit dem historisch frühesten und zugleich elementarsten Beispiel einer solchen Transformation, nämlich der von Euklid herrührenden Theorie der Antiparallelen anhebt. Zum Schluss werden auch die Anwendungen dieses Transformations-Princips in der mathematischen Physik kurz besprochen.

Scht.

J. J. Sylvester. Note on certain elementary geometrical notions and determinations. Lond. M. S. Proc. XVI 201-215.

Eine ebene Curve lässt sich als Ort eines variabeln Punktes oder als Enveloppe einer variabeln Geraden auffassen. Von der letztern Betrachtung aus geht der Verfasser auf die der Curve analogen Gebilde von mehr Dimensionen, die Fläche als Enveloppe einer variabeln Ebene u. s. w., über. Die Gerade bestimmt er durch die Verhältnisse ihrer Normalabstände von den Ecken eines Fundamentaldreiecks, und die Ebene durch die Verhältnisse ihrer Normalabstände von den Ecken eines Fundamentaltetraeders. Das dem Dreieck und Tetraeder analoge n dimensionale $(n+1)$ Eck nennt er Plasma und gebraucht es ebenso als Fundamentalfigur. Mit Beschränkung auf 4 Dimensionen werden einige Formeln entwickelt.

H.

E. Study. Ueber die Massbestimmung extensiver Grössen. Wien. Ber. XCI. 100-137.

Wenn ein α-facher Punkt e aus den festen Punkten $e_1, e_2, \ldots, e_n$ mittels der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ abgeleitet ist, sodass

$$(1)\qquad \alpha e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

$$(2)\qquad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

ist, so definirt Grassmann als „numerischen Wert“ von e die

Grösse

$$= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}.$$

Da diese Definition sich nicht von vornherein als eine notwendige kennzeichnet und auch die Frage über ihren Zusammenhang mit den für Ausdehnungsgrössen höherer Stufen geltenden entsprechenden Definitionen offen lässt, so unternimmt es der Verfasser, dieselbe als speciellen Fall aus allgemeinen Voraussetzungen abzuleiten, indem er an Stelle der durch die Gleichung (2) definirten Function zunächst eine allgemeinere Function α (den „Masswert" der extensiven Grösse) setzt, und dieselbe durch die in den allgemeinen geometrischen Axiomen ausgedrückten Forderungen einschränkt. Hierbei stellt sich zunächst heraus, dass das Quadrat des Masswertes eine ganze Function der Ableitungszahlen sein muss. Die zweite Specialisirung wird getrennt für die Gebiete 2ter und 3ter Stufe durchgeführt, indem im ersten Falle die Lage der beiden Nullpunkte der den Masswert darstellenden quadratischen Form, im zweiten das Verhalten des den Ort dieser Nullpunkte darstellenden Kegelschnitts für die Einteilung der Fälle massgebend ist. Man erhält nämlich im Gebiet 2ter Stufe die nichteuklidische oder die euklidische Massbestimmung, jenachdem die Function α^2 sich auf eine Summe von 2 Quadraten oder auf ein Quadrat reduciren lässt, und im Gebiet 3ter Stufe die Kugelgeometrie, die euklidische oder eine dritte vom Verfasser noch näher untersuchte Form, jenachdem hier die analoge Reduction auf drei Quadrate, zwei oder eins führt.

Schg.

A. B. Kempe. A memoir introductory to a general theorem of mathematical form. Lond. R. S. Proc. XXXVII. 393-407.

Auszug aus einer in den Phil. Trans. 177. 1886 abgedruckten Abhandlung.

Cly. (Lp.)

Capitel 2.
Continuitätsbetrachtungen.

R. Baltzer. Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. Leipz. Ber. 1-6.

Aus dem schriftlichen Nachlasse von Möbius wird mit zugehörigem Beweise folgender Satz mitgeteilt, auf den dieser Geometer durch seinen Freund Weiske hingewiesen war: „Spatia confinia sind Felder, von denen je zwei sich in einer Linie (nicht bloss in einem Punkte) berühren. Fünf spatia confinia sind unmöglich in einer Fläche." Baltzer macht auf einige andere ähnliche Sätze der „Situationsgeometrie" aufmerksam (Topologie nach Listing). Am Schlusse wird auf Grund einer Bemerkung des Herrn F. Klein die Identität des Möbius'schen Satzes mit dem Vierfarben-Problem der geographischen Karten hervorgehoben, das durch Herrn Kempe 1879 im American Journal of Mathematics behandelt ist. Lp.

C. Reinhardt. Zu Möbius' Polyedertheorie. Leipz. Ber. 106-125.

In dieser von Herrn Felix Klein vorgelegten Abhandlung knüpft der Verfasser an die im Jahre 1858 von Möbius gemachte Entdeckung von Polyedern an, bei welchen man, auf der Oberfläche fortgehend, ohne auf diesem Wege irgend einmal die Fläche, auf welcher man geht, zu durchbrechen, auf die entgegengesetzte Seite der Fläche, von welcher man ausging, gelangen kann. Zur Erläuterung der Eigentümlichkeit der Structur solcher Polyeder, die Möbius als einseitige Polyeder bezeichnet, bediente er sich eines aus Dreiecken zusammengesetzten Dekaeders (Leipz. Ber. XVII. 38, Ges. Werke II. 483) und eines dazu polaren einseitigen Hexaeders. Möbius aber beschränkte sich darauf, solche einseitigen Polyeder durch die Angabe ihrer Flächen und Ecken auszudrücken, und überliess es dem Leser, sich ein Bild von

der genaueren Configuration der Ecken, Flächen und Kanten eines jeden Polyeders zu machen. Auch waren die von Möbius angegebenen Beispiele nicht gerade derart einfach, dass sich an ihnen besonders leicht die Eigentümlichkeit der Einseitigkeit erkennen liesse. Der Verfasser ergänzt daher die Möbius'schen Untersuchungen, indem er zwei von ihm selbst gefundene, sehr einfache, einseitige Polyeder beschreibt, aus denen sich das von Möbius beschriebene Dekaeder und Hexaeder durch Deformation herstellen lassen, indem er dann neue Beispiele von einseitigen Polyedern höherer Art anführt und indem er endlich auch die beiden ringförmigen Polyeder betrachtet, an denen Möbius seine Theorie dieser Körper erläuterte. Von dem einfachsten der beschriebenen einseitigen Polyeder kann man sich leicht auf folgende Weise eine Vorstellung machen. Die drei Paare von Gegenecken eines regulären Oktaeders mögen A und A', B und B', C und C' heissen, sodass ABC eine Fläche des Oktaeders ist. Dann denke man sich die vier Dreiecksflächen ABC, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ zusammen mit den drei quadratischen Diagonalflächen $AA'BB'$, $AA'CC'$, $BB'CC'$, so erhält man die 7 Flächen eines einseitigen Polyeders. Ein Modell desselben kann man sich dadurch leicht herstellen, dass man an die vier Seiten der quadratischen Fläche $ABA'B'$ die Netze der vier Tetraeder $ABCM$, $AB'C'M$, $A'B'CM$ und $A'BC'M$, wo M die Mitte des Oktaeders ist, anheftet und diese abwechselnd auf verschiedenen Seiten von $ABA'B'$ aufsetzt. Denkt man sich diese vier Tetraeder, aus denen unser einseitiges Polyeder besteht, aufgebläht, ohne deren Zusammenhang in den Doppelgeraden AA', BB', CC' zu lösen, so ergiebt sich hieraus eine Fläche von derselben Gestaltung, wie sie das bekannte Kummer'sche Modell der Steiner'schen Fläche besitzt, das von Herrn Klein als einfaches Beispiel einer einseitigen, ganz im Endlichen enthaltenen algebraischen Fläche angeführt zu werden pflegt (vergl. Klein in Clebsch Ann. VII. 549-557, IX. 476-482; F. d. M. VI. 1874. 307, VIII. 1876. 316). Diesen Zusammenhang verdankt der Verfasser einer Mitteilung des Herrn Klein. Die vom Verfasser angegebenen neuen einseitigen Polyeder können aus den Kugelteilungen abgeleitet

werden, welche durch das reguläre Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder in Verbindung mit ihren Symmetrie-Ebenen entstehen, wenn man diese Körper auf die ihnen umschriebenen Kugelflächen vom Mittelpunkt aus geradlinig projicirt. Die Kartonmodelle, welche der Verfasser von diesen Polyedern angefertigt hat, sind im Besitze des mathematischen Instituts der Universität Leipzig. Scht.

E. Hess. Ueber die regulären Polytope höherer Art. Marburg. Ber. 31-57.

In dieser Arbeit dehnt der Verfasser die hauptsächlichsten in seiner „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung" enthaltenen Untersuchungen und Resultate auf den vierdimensionalen Raum aus. Den sphärischen Dreiecken und Polygonen entsprechen hier sphärische Tetraeder und Polyeder, der sphärischen Trigonometrie eine Tetraedrometrie, von welcher einige Hauptsätze aufgestellt und bei der Untersuchung verwendet werden; und wie die regelmässigen Einteilungen der Kugelfläche durch Hauptkreise auf die regulären Polyeder führen, so auch analog die regelmässigen Einteilungen des sphärischen (Helmholtz'schen) Raumes durch Hauptkugeln auf die bekannten sechs regelmässigen Körper des vierdimensionalen Raumes. So entsprechen also den regelmässigen sphärischen Polygonnetzen der Kugelfläche die regelmässigen sphärischen Zellgewebe. Der genaueren Untersuchung dieser letzteren Gebilde, der Bestimmung ihrer Constanten (Winkel, Zahl der Hauptkugeln etc.) ist der erste Teil der Arbeit gewidmet. Der zweite beschäftigt sich mit den bisher überhaupt noch nicht untersuchten vierdimensionalen Gebilden, welche den Sternpolygonen der Ebene und den Sternpolyedern des Raumes entsprechen. Es sind dies die im Titel genannten Polytope höherer Art. Wie es sich bei jenen um eine mehrmalige Bedeckung der Kreislinie mit Bogen und der Kugelfläche mit sphärischen Figuren handelt, so bei den letzteren um eine mehrfache Ausfüllung des sphärischen Raumes mit sphärischen Körpern. Der Verfasser stellt zunächst zwei Bedingungen fest,

denen solche Gebilde genügen müssen. Die erste bezieht sich auf ihren Zusammenhang mit den regulären sphärischen Zellgeweben, die zweite ist eine Verallgemeinerung der Euler'schen Formel für Sternpolyeder. Nach Ausscheidung einer Anzahl diesen Bedingungen nicht genügender Gebilde bleiben zehn reguläre Polytope höherer Art übrig, deren Eigenschaften untersucht und schliesslich tabellarisch zusammengestellt werden.

Schg.

T. P. Kirkman. Solution of question 4038. Ed Times XLII 108-109.

1) Ein Dreieck kann auf 457 Arten in 13 Dreiecke zerlegt werden, wobei zwei Arten als übereinstimmend gerechnet sind, wenn ohne Rücksicht auf die Grösse eine Zerlegung das Spiegelbild der anderen ist. 2) Ein gleichseitiges Dreieck in 13 Dreiecke gleichen Inhaltes zu zerlegen. Die Anzahl der Zerlegungen ist dem Verfasser entschwunden.

Lp.

T. P. Kirkman. The enumeration, description, and construction of knots of fewer than ten crossings. Edinb. Trans XXXII. 281-309.

Bezieht sich auf die Theorie der Knoten; vier Tafeln mit zahlreichen Figuren.

Cly. (Lp.)

P. G. Tait. On knots. Edinb Trans XXXII. 327-339.

Fortsetzung früherer Untersuchungen; eine Tafel mit zahlreichen Figuren. Bezieht sich auf die vorangehende Abhandlung des Herrn Kirkman.

Cly. (Lp.)

T. P. Kirkman. The 364 unifilar knots of ten crossings enumerated and defined. Edinb. Trans. XXXII. 483-506.

T. P. Kirkman. Demonstrations of theorems A, B, C. Edinb. Proc XIII. 359-363.

T. P. Kirkman. On the twists of Listing and Tait. Edinb. Proc. XIII. 363-367.

T. P. Kirkman. On the linear section PR of a knot M, which passes thro' two crossings P and R, which meets no edge, and which cuts away a $(3 \cdot r)$-gonal mesh of M_n. Edinb. Proc. XIII. 514-522.

P. G. Tait. On knots. Edinb. Trans. XXXII. 493-506.

Die Noten 2), 3), 4) sind Zusätze zur Hauptabhandlung 1). No. 5) bildet die Fortsetzung früherer Untersuchungen und enthält drei Tafeln mit zahlreichen Figuren; bezieht sich auf die vorangehende Arbeit 1) von Herrn Kirkman.

Cly. (Lp.)

Crum Brown. On a case of interlacing surfaces. Edinb. Proc. XIII. 382-386.

Die einfachste Form sich durchschiebender Oberflächen, sobald sie sich über eine Ebene breiten, wird durch eine Figur erläutert. Es sind drei einander ähnliche Bogen Papier, jeder durch gleiche kreisförmige Löcher durchbohrt, so angeordnet, dass jede drei benachbarten Löcher in demselben Bogen ihre Mittelpunkte in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks haben. Das Gebilde aus den drei Bogen ist, wie aus der Figur erhellt, ein Fall dessen, was Herr Tait ein „locking" nennt. Keine zwei Bogen sind zusammen verkettet; wird ein Bogen vernichtet, so kommen die beiden anderen zur Trennung. Jeder Bogen liegt gänzlich oberhalb eines der beiden anderen und gänzlich unterhalb des anderen. Es möge bemerkt werden, dass das Gebilde nur construirt werden kann, indem man einen der drei Bogen zerschneidet und nachher die Stücke wieder verbindet. Das Gebilde findet auch auf andere Flächen als die Ebene Anwendung. Insbesondere werden der Cylinder und der Ankerring betrachtet.

Cly. (Lp.)

A. Thue. Et Theorem om netformige Figurer. Zeuthen T. (5) III. 162-165.

Verbindet man eine Anzahl beliebig gegebener Punkte durch Curven, so entsteht eine netzförmige Figur, in welcher die gegebenen Punkte die Knoten sind, während die Verbindungslinien die Zweige des Netzes bilden. Alsdann gilt das folgende merkwürdige Theorem. Gehen von n beliebigen Punkten des Netzes Ströme aus, welche sich allmählich durch alle Zweige verteilen, jedoch abbrechen, sobald zwei Ströme zusammentreffen, so ist die Anzahl s der Zusammenstösse der Ströme bestimmt durch

$$s = n + g - k,$$

wo g die Anzahl der Zweige, k die der Knoten bezeichnet.

Gm

W. Dyck. Beiträge zur Analysis situs. I. Mitteilung Leipz. Ber. 314-325.

Diese Beiträge schlingen ein neues Band um die Topologie von berandeten oder geschlossenen Flächen und die bezüglichen analytischen Bestimmungsstücke derselben. In ersterer Richtung stützen sie sich auf Ideen von Möbius, in letzterer auf Begriffe von Herrn Kronecker. Es handelt sich immer um die Aufstellung der Grundzahl einer irgendwie, anschaulich oder analytisch, gegebenen Fläche. Eine beiden Zwecken angepasste Definition der Grundzahl bezieht sich auf ein auf der Fläche verzeichnetes Curvensystem, so dass durch jeden Punkt eine und nur eine Curve des Systems hindurchgeht, und nur in einer endlichen Zahl von Punkten mehrere Curvenzweige einmünden.

Solcher Punkte im Innern, resp. auf dem Rande der Fläche, von denen je n Curvenzweige auslaufen, seien p'_n resp. p''_n vorhanden (wo n auch unendlich sein kann). Dann gilt für die Riemann-Neumann'sche Grundzahl G der Fläche die Formel:

$$2G-4 = \Sigma(n-2)p'_n + \Sigma(n-1)p''_n - 2p'_x.$$

Der Beweis wird zuvörderst an einem einfachsten Fall demon-

strirt, und dann durch successive Umformung der betreffenden Fläche auf die allgemeinste Fläche übertragen.

Ist nun $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche, und K die Kronecker'sche Charakteristik des Functionensystems

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

so resultirt die bedeutsame Relation:

$$G = -2K+2.$$

Das hierbei in Betracht kommende Curvensystem auf der Fläche ist etwa das durch die Ebenen $z =$ const. ausgeschnittene.

In ähnlicher Weise ergiebt sich für die Grundzahl des von einer ebenen Curve $f(x, y) = 0$ eingeschlossenen Raumes $(f < 0)$

$$G = -K+2,$$

wenn K die Charakteristik des Functionensystems

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

bezeichnet.

Von anderer Seite her ist auch Herr Poincaré auf Beziehungen der erwähnten Art gestossen. My.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

G. B. Halsted. The elements of geometry. Newyork. John Wiley & Sons. XVI u. 366 S. 8°.

Das Werk, dessen Ausstattung in jeder Beziehung geradezu musterhaft ist, behandelt die elementare Geometrie (Planimetrie und Stereometrie) in elf Büchern nach einer Methode, die im allgemeinen als eine modernisirte euklidische bezeichnet werden kann. Nicht auf eine grosse Ausdehnung des Stoffes, sondern auf eine möglichst logische Entwickelung ist das Hauptgewicht gelegt, damit diese Elemente der Geometrie als „Felsengrund

für weiter gehende Forschung" dienen können. Dabei ist es aber wunderbar, dass das Parallelenaxiom nicht ausgesprochen, sondern durch einen nicht bindenden Scheinschluss, die Umkehrung eines früheren Satzes, auf Seite 48 umgangen wird. Und dies geschieht, obschon der Verfasser in der Vorrede anführt, dass der Lehrer, welcher etwas von nichteuklidischer Geometrie weiss, die Begriffe „Richtung" und „Abstand" zunächst vermeiden müsse, so wie dies in seinem Werke geschehen ist. Hiervon abgesehen, haben wir es indessen mit einer höchst beachtenswerten Erscheinung unter den neueren Lehrbüchern zu thun. Daher möge Einzelnes hervorgehoben werden.

Das Buch V. behandelt in euklidischer Art, jedoch in gedrängterer, durch die modernen Anschauungen beeinflusster Darstellung das Verhältnis und die Proportion. „Continuirliche Grössen als commensurabel behandeln heisst das Normale auslassen und nur den Ausnahmefall geben. Dies macht die arithmetische Behandlung von Verhältnis und Proportion durchaus unvollständig und unangemessen für die Geometrie."

Den eigenartigsten Abschnitt bildet das Buch IX., die zweidimensionale Geometrie der Kugel. Hier werden nämlich, unabhängig von der im vorangehenden Buche enthaltenen Betrachtung der Kugelgeometrie nach der gewöhnlichen stereometrischen Methode, alle Begriffe so definirt, dass die Sphärik unter Hinzunahme ähnlicher Forderungssätze wie in der Planimetrie als ganz selbständige Geometrie entwickelt wird und dadurch die Analogie mit den Lehren der Planimetrie klar hervortritt. Nach der Vorrede hat Herr Halsted seit 1877 diese Manier bei seinem Unterrichte angewandt, und 1883 hat sein Schüler, Herr H. B. Fine, einen „Syllabus der sphärischen Geometrie" gemäss der Grundzügen dieses Unterrichtes ausgearbeitet; hiernach ist d[illegible] Buch IX. des vorliegenden Werkes entstanden.

234 Uebungsaufgaben sind zum Teil unter den Text gesetz[illegible] zum Teil in einem Anhange vereinigt.

Einige neue Benennungen sind zu erwähnen. „Perigon" (volle Umdrehung) heisst ein Winkel von vier Rechten; „Explement" ein Winkel, welcher einen gegebenen [illegible] ier Rechten

ergänzt; ein „reflexer" Winkel ist grösser als ein gestreckter, kleiner als vier Rechte. Die Verbindungslinie einer Dreiecks-Ecke mit der Mitte der Gegenseite wird „Mediale" genannt. „Collinear" heissen drei oder mehr Punkte, die auf einer Geraden liegen. „Raumwinkel" (space angle) wird für „n-seitige Ecke" gesetzt, „Steregon" heisst der Teil des Raumes innerhalb einer n-seitigen Ecke. Sowie „Radian" schon sonst für denjenigen Centriwinkel gebraucht wird, dessen Kreisbogen gleich dem Radius ist, so nennt der Verfasser „Steradian" den Raumwinkel, der, wenn sein Scheitel im Kugelmittelpunkt liegt, aus der Kugeloberfläche ein Stück gleich dem Quadrate des Kugelradius ausschneidet. Ein Kugelzweieck heisst „Mond" (lune), die Seite eines geraden Kegels seine „schiefe Höhe" (slant height). Ohne über die Zweckmässigkeit dieser Benennungen ein Urteil abzugeben, hielt Referent die Angabe derselben für nötig, weil die englisch schreibenden Geometer grosse Neigung zeigen, solche neu gebildeten Kunstausdrücke ohne weiteres zu gebrauchen.

Lp.

GAUSS. Die Hauptsätze der Elementar-Mathematik. Zwei Teile. Bunzlau. Kreuschmer.

Der erste Teil dieses Werkes enthält die Arithmetik und Planimetrie, der zweite etwas kürzere die Stereometrie und Trigonometrie. Ueber das Gymnasialpensum geht der Herr Verfasser im allgemeinen nicht hinaus; doch hat er die sphärische Trigonometrie mit aufgenommen. Der Vortrag ist zu Anfang ausführlicher, später dem vorgerückten Standpunkt des Lernenden entsprechend knapper; doch stets vollständig ausreichend. Die Ausstattung des Buches ist gut. Mz.

F. MEYER. Dritter Kursus der Planimetrie, zugleich als Vorbereitung auf die neuere Geometrie. Halle a. S. H. W. Schmidt.

Das Buch ist für die Prima der Realgymnasien und solche

ingen Mathematiker bestimmt, denen eine zweckmässige Vorbereitung auf das Studium der projectiven Geometrie erwünscht ist. Benutzt sind ausser Steiner's, Schröter's und Petersen's Werken auch die von Edler und Sturm gelieferten Beweise für Steiner's Hauptsätze über geometrische Maxima und Minima, welche bekanntlich nicht an dem Fehler leiden, dass die Existenz eines Maximums oder Minimums von vornherein vorausgesetzt wird. Der Verfasser entwickelt in klarer und eingehender Weise nacheinander die Transversalen, das anharmonische Verhältnis und die harmonische Teilung, die Aehnlichkeitspunkte, die Inversion, die Polaren-Theorie, die Chordalen und Potenzkreise, die Aehnlichkeitspolaren und im Zusammenhang damit das Tactionsproblem des Apollonius, endlich die Maxima und Minima der Inhalte und Umfänge ebener Figuren. In das letzte Capitel ist auch der hübsche, von Sturm gelieferte, elementare Beweis dafür aufgenommen, dass unter den ∞^{n-3} Polygonen aus n gegebenen Seiten das Kreispolygon den grössten Flächeninhalt besitzt.

Scht.

J. Hoch. Lehrbuch der ebenen Geometrie. II. Teil. Halle a. S. H. W. Schmidt.

Ueber den ersten Teil ist im vorigen Bande S. 477 referirt. Dieser zweite Teil beginnt mit der Theorie der Proportionen in rein arithmetischer Hinsicht und enthält dann eine ausführliche Darstellung der auf Proportionalität von Strecken und Aehnlichkeit der Figuren bezüglichen Wahrheiten. In der dann folgenden Transversalentheorie sind auch die Sätze von Ceva und Menelaos sowie die wichtigsten Sätze über Chordalen aufgenommen. Das zweite Drittel des Buches enthält die algebraische Geometrie, welche mit den Beziehungen zwischen den Umfängen der einem Kreise ein- und umbeschriebenen regulären n Ecke und $2n$ Ecke und mit der daraus hervorgehenden archimedischen Methode der Berechnung von π schliesst. Dann folgen Näherungs-Constructionen für die Rectification und Quadratur des Kreises. Hierbei wurde vom Referenten eine historische Bemerkung über

die zahllosen vergeblichen Bemühungen um die genaue constructive Quadratur und über den 1882 von Lindemann gelieferten Unmöglichkeitsbeweis um so mehr vermisst, als das Buch sonst vielfach mit historischen Bemerkungen, z. B. auch rücksichtlich der Geschichte der Berechnung von π, gewürzt ist. Das letzte Drittel des Buches enthält Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

Scht.

H. Gerlach. Lehrbuch der Mathematik. II. Teil. Elemente der Planimetrie. Fünfte Auflage. Dessau. Reissner.

Dieser zweite Teil der Gerlach'schen Mathematik enthält die Planimetrie im wesentlichen so, wie sie heute in den meisten Schulen getrieben wird. Ein abgesondertes Capitel giebt auch einige Wahrheiten der sogenannten „neueren Geometrie". Die Sätze über Pol und Polare werden nicht im Zusammenhang mit den Eigenschaften der aus 4 Punkten und den zugehörigen Tangenten eines Kreises bestehenden Figur, sondern metrisch mit Benutzung des Kreis-Centrums bewiesen. Neu war dem Referenten die in § 167 ausgesprochene Begründung, warum sich die Peripherie eines Kreises nicht als gerade Linie, der Kreis nicht als Quadrat darstellen lässt. Als Grund hierfür giebt nämlich Herr Gerlach an: „Da die Zahl π irrational ist." Demnach müsste der Verfasser es auch für unmöglich halten, aus der Seite eines Quadrats seine Diagonale mit Zirkel und Lineal zu construiren. Trotz dieses Lapsus ist aber das Buch besonders auch durch die in demselben enthaltenen 682 Uebungssätze und Aufgaben für Lehrer verwerthbar. Scht.

G. Recknagel. Ebene Geometrie für Schulen. Dritte Auflage. München. Ackermann.

Ueber die erste, im Jahre 1871 erschienene Auflage dieses Buches ist F. d. M. III. 1871. 237 referirt. Abgesehen von kleinen Verbesserungen, unterscheidet sich diese Auflage von den früheren dadurch, dass die im Anhang II. befindliche Sammlung von

algebraisch geometrischen Aufgaben um viele gut ausgewählte vermehrt ist. In der Vorrede bedauert der Verfasser selbst, dass der frühzeitige Druck der ersten Bogen des Buches ihn verhindert habe, den Bertrand'schen Beweis in der Parallelentheorie zu unterdrücken, und statt dessen das Axiom, dass es durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele gebe, als Grundlage aufzunehmen. Bei dem Apollonischen Tactionsproblem, von dem der Verfasser die auf die Verbindung der Theorie der Polaren mit der Theorie der Chordalen und Aehnlichkeitspunkte gegründete Lösung giebt, fiel dem Referenten die Bemerkung auf, dass es 8 „im allgemeinen“ mögliche Kreise geben soll, deren jeder die gestellte Aufgabe löst. Hierzu möchte der Referent bemerken, dass geometrisch die Fälle, wo es nur 6, 4, 2, 0 Kreise giebt, dieselbe Stufe der Allgemeinheit haben, wie der Fall, wo es 8 Kreise giebt. Liegt z. B. ein Kreis ganz in einem zweiten und dieser ganz in dem dritten, so ist das aus den Centren gebildete Dreieck und sind die Längen der drei Radien ebenso allgemein, wie in dem Falle, wo jeder Kreis ausserhalb der beiden anderen liegt. Denn die Figur der drei gegebenen Kreise hat in beiden Fällen die Bestimmungszahl 3 mal 2 plus 3, also 9. Wenn aber etwa die drei Centra in gerader Linie liegen, also die Bestimmungszahl der Figur auf 8 herabgedrückt wird, kann man sagen, dass man nicht mehr einen „allgemeinen“ Fall vor sich hat. Schb.

B. Wiese und W. Lichtblau. Sammlung geometrischer Constructionsaufgaben zum Gebrauch an Seminarien, sowie zum Selbstunterricht. Hannover. Carl Meyer.

Referent hat in dem Buche weder didaktisch noch inhaltlich irgend etwas Neues oder Eigenartiges gefunden. Die Aufgaben-Sammlung von Lieber und Lühmann scheint gut benutzt zu sein, weniger oder gar nicht dagegen das vorzügliche Werk von Petersen „Methoden und Theorien zur Lösung geometrischer Constructionsaufgaben.“ Schb.

A. Stegmann. Die Grundlehren der ebenen Geometrie. 3. Aufl. Herausgegeben von J. Lengauer. Kempten Kosel. VI u. 217 S.

R. Zehnder. Planimetrische Aufgaben in systematischer Anordnung (mit beigefügten Musterbeispielen). Pr. Realgymn. Hagen 12 S. 4°.

„Die Sammlung soll den Zwecken der eigenen Schule dienen. Sie soll eine hinreichend grosse Anzahl von Aufgaben darbieten aus den verschiedenen Capiteln des planimetrischen Unterrichts; doch sollen dieselben weniger nach den einzelnen Capiteln als nach der geringeren oder grösseren Schwierigkeit der Lösung gruppirt sein.“ Lp.

O. Schlömilch. Notiz über Ungleichheiten. Schlömilch Z XXX. 351-352.

Der Herr Verfasser bemerkt, dass in Lehrbüchern und Beispielsammlungen der Elementarmathematik selten Aufgaben über Ungleichheiten vorkommen, obschon diese besonders instructiv sind, weil sie meistens mehr Ueberlegung verlangen, als andere Aufgaben. Er giebt deshalb einige derartige Aufgaben und fügt die Lösungen bei. Die Aufgaben sind:

Die Bedingungen zu ermitteln, unter denen es möglich ist:

1) aus den Abständen des Umkreismittelpunktes von den Seiten,

2) aus den Abschnitten, welche die Berührungspunkte des Inkreises auf den Seiten bilden,

ein neues Dreieck zu construiren.

Am Schluss wird angedeutet, wie diese Aufgaben sich vermehren lassen. Mz.

V. Finamore. Saggi di Matematica (Postuma). Lanciano R Carabba

Dieses kleine Werk eines 1865 verstorbenen Professors der Philosophie über Geometrie ist durch die Brüder des Verfassers zum Drucke gebracht. Es enthält synthetische Beweise sehr einfacher bekannter oder unmittelbar aus bekannten Theoremen fliessender Sätze. Der erste Teil bezieht sich auf die elementare Geometrie, der zweite auf die Kegelschnitte. Der Druck hätte sorgfältiger sein können. Se. (Lp.)

Otto Meyer. Der geometrische Zeichenunterricht in Quinta. Pr. Progymn. Schwetz VI u 8 S 8°.

Kurze Darstellung des Lehrganges des propädeutischen Unterrichts. Lp.

K. F Hausmann. Beiträge zum Unterricht in der Raumlehre. Langensalza. Beyer & Söhne. 104 S.

S. Marks. On the uses of a line-divider. Phil. Mag. XIX. 280-285.

Eine Beschreibung des Instrumentes mit mehreren Beispielen für seinen Gebrauch; dieselbe zeigt die Vorzüge, die es vor einem gewöhnlichen Parallelen-Lineal voraus hat.

Gbs. (Lp.)

A. H. Anglin. On extensions of Euclid I. 47. Edinb Proc. XII. 703-707.

Es wird bemerkt, dass der Fall gleichseitiger Dreiecke einen leichten und unabhängigen Beweis zulässt, etwa wie den euklidischen für Quadrate, dass jedoch der Fall der Polygone von beliebig gegebener Seitenanzahl den Beweis für gleichschenklige Dreiecke erfordert, und für diesen Fall wird ein unabhängiger Beweis gegeben. Cly. (Lp.)

E. Cesaro. Remarques de géométrie élémentaire.
Mathesis V. 128-129.

Ist ein Dreieck einem ähnlichen Dreiecke einbeschrieben, so sind die Projectionen seiner Seiten auf die homologen Seiten des umbeschriebenen Dreiecks bez. gleich den Hälften dieser Seiten. Andere Sätze. Mn. (Lp.)

H. W. Z. Hime. Construction for the centre of gravity of three weights placed at the corners of a triangle, proportional to the fourth powers of the opposite sides.
Mess. XIV. 138-141.

Man bezeichne den gesuchten Punkt mit G_4, den entsprechenden Punkt für die zweite Potenz mit G_2; dann liegt bekanntlich G_2 auf den Linien, welche die Mitte einer Seite mit der Mitte der zugehörigen Höhe verbinden. Durch G_2 ziehe man zu einer Seite eine Parallele, diese schneide die zugehörige Höhe in B_2; die Linie, welche B_2 mit der Mitte der Seite verbindet, geht durch G_4. Der Artikel enthält auch einige analytische Untersuchungen über den Punkt G_4. Glr. (Lp.)

E. Cesaro, A. Geneix-Martin. Solution d'une question (1524).
Nouv. Ann. (3) IV. 482-483.

Der von Herrn Cesaro gegebene, von Herrn Geneix-Martin bewiesene Satz lautet: 1) Die Punkte, in denen die drei Kanten einer Tetraederfläche bez. von den Halbirungsebenen der Aussenwinkel an den Gegenkanten getroffen werden, liegen in einer Geraden. 2) Diese Gerade liegt in einer Ebene, welche durch die drei auf den letzteren Kanten befindlichen Punkte bestimmt ist, in welchen dieselben von den Halbirungsebenen der Winkel an ihren Gegenkanten getroffen werden. Mz.

C. M. Piuma. Dimostrazione di un teorema del sig. Cesaro.
Giornale di lettere e conversazioni scientifiche di Genova.

Gehen durch die Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten a, b, c und dessen Inhalt A, Linien, die von der Ecke bis zur Gegenseite gezählt resp. die Länge l, m, n haben, so bestimmen diese Linien l, m, n auf den Seiten des Dreiecks A 6 Abschnitte; und das Product von drei nicht anstossenden dieser Abschnitte vermindert um das Product der drei übrigen hat den Wert:

$$\frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{A_1^2}{A^2} \cdot lmn,$$

wo a_1, b_1, c_1 die Seiten, A_1 den Flächeninhalt des von den Linien l, m, n gebildeten Dreiecks bedeuten. Mz.

E. Hain. Ein Dreieckssatz. Hoppe Arch. (2) II. 435-437.

Durch einen beliebigen Punkt P in der Ebene eines Dreiecks ABC kann eine solche Gerade gelegt werden, dass ihr von den Dreiecksseiten AB, BC begrenzter Teil in P seine Mitte hat. Man findet für BC, CA und CA, AB ebenso noch zwei durch P gehende Gerade. Die drei in angegebener Weise durch den Punkt P construirten Geraden treffen die jedesmaligen Gegenseiten des Dreiecks in Punkten einer Geraden, und diese Gerade ist der Harmonicalen dieses Punktes parallel. (Der für die projectivische Figur geltende allgemeinere Satz ist eine unmittelbare Folge der einfachsten Sätze über harmonische Strahlen. Red.)

Mz.

E. Hain. Ueber complementäre Punkte. Hoppe Arch. (2) III. 214-217.

Einige Definitionen und Sätze über gegenseitige Beziehungen von Punkten in der Ebene eines Dreiecks. Mz.

N. Sluginow. Beweis des Hauptsatzes der anharmonischen Verhältnisse. Ermakow J. I. 233-235. (Russisch.)

E. Franke. Ueber gewisse Linien im Dreiecke. Kronecker J. IC. 161-164.

H. Schröter. Bemerkungen zu dem Aufsatz von Franke. Kronecker J. IC. 232-235.

Herr Schröter stellt fest, „dass Herr Franke einige Sätze über das ebene Dreieck durch analytische Rechnung bewiesen hat, welche bereits vor längerer Zeit nebst vielen andern dazu gehörigen Beziehungen in Borchardt J. LXVIII. 219ff. von ihm ausgesprochen und auf synthetischem Wege nachgewiesen worden sind." Ein allgemeiner Satz, von dem die Franke'schen nur besondere Fälle sind, und der in jener Arbeit Schröter's enthalten ist, wird hier noch einmal in einfacher Weise hergeleitet. Es handelt sich um die Pascal'schen Linien der Sechsecke aus den Seitenmitten und Höhenfusspunkten oder aus den Endpunkten je einer Seite und den nicht auf ihr liegenden Höhenfusspunkten und Seitenmitten. Lg.

J. Döttl. Neue merkwürdige Punkte des Dreiecks. 59 S. Wien. Pichler's Wittwe & Sohn.

F. Wrzal. Zur Construction des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels. Zeitschr. Realsch. X. 93-94.

Um die Grössenverhältnisse der drei Ausdrücke

$$M_a = \frac{p+q}{2}, \quad M_g = \sqrt{pq}, \quad M_h = \frac{2pq}{p+q}$$

anschaulich darzustellen, construirt der Verfasser eine Parabel und einen Kreis, dessen Centrum auf der Parabelachse liegt, und der zugleich die Parabel in deren Scheitel berührt. Verbindet man nun die beiden Durchschnittspunkte C, D von Kreis und Parabel durch eine Gerade und zieht eine Parallele zur Axe, welche CD, in E, die Scheiteltangente in F, den Kreis in G und die Parabel in H schneidet, so ist, wenn noch der Para-

meter $= \frac{p+q}{2}$ gesetzt wird,

$$EF = M_x, \quad EG = M_y, \quad EH = M_1.$$

Gr.

F. X. Pfeifer. Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst. Augsburg. Litter. Inst. v. Dr. M. Huttler. II u. 232.

Verfasser geht im Versuch, das Vorkommen des goldenen Schnittes in allen Gebieten der Natur und Kunst nachzuweisen, noch weiter als Zeising. Neben der uneingeschränkten Benutzung der Anfangsglieder der Lamé'schen Reihe

1, 2, 3, 5, 8 . . .

als Näherungswerte für die Glieder des goldenen Schnitt-Verhältnisses werden auch noch Ineinanderschachtelungen mehrerer solcher Reihen zugelassen. Z. B. wird (S. 159) die Zahlenreihe

$2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11

in Beziehung zum goldenen Schnitt gesetzt, insofern sie sich zerlegen lässt in die drei Reihen

$2\frac{1}{2}$, 5, 8; 3, 6, 9; 4, 7, 11;

von denen jede (genau oder näherungsweise) das Gesetz der Lamé'schen Reihe befolgt.

Mit diesen Mitteln ausgerüstet weist der Verfasser das Vorkommen des goldenen Schnittes im Planetensystem, im Pflanzenreiche, Tierreiche, in Architektur, in den perspectivischen Verkürzungen, in Musik, Plastik und Malerei nach. In der Perspective lässt sich mathematisch beweisen, dass die Sache trotz der vielen vom Verfasser ausgeführten Messungen auf Täuschung beruht. In den anderen Gebieten ist eine solche exacte Kontrolle nicht möglich. Doch legt der Ausfall der Probe bei der Perspective einen Schluss auf das Mass von Sicherheit, welches der empirischen Methode des Verfassers innewohnt, nahe. Am meisten ausgereift dürfte noch der botanische Abschnitt sein. — Was die mathematische Seite des Buches anlangt, so findet sich Verschiedenes (unhaltbare geometrische Beziehungen, Confundirungen von arithmetischer und geometrischer Progression u. dgl.) zu beanstanden. Verfasser

sagt übrigens selbst: „Wenn Verstösse gegen die Mathematik vorkommen sollten, lassen wir uns gern von Fachmännern zurechtweisen". Dagegen bietet der historische Abschnitt manches Interessante. Die Ausstattung des Buches verdient alle Anerkennung. Bk.

N. MAZON. Construction eines Dreiecks aus der Höhe und den Radien des um- und eingeschriebenen Kreises. Krmakow J. II. 62-65. (Russisch.)

TH. MUIR. Note on the equation connecting the mutual distances of four points in a plane. Edinb. M. S. Proc. III. 31-38.

M. D'OCAGNE. Sur une suite de polygones tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent. Brux. S. sc. IX. B. 231-238.

Einfache Bestimmung der Coordinaten der auf einander folgenden Ecken. Die Ecken der verschiedenen Polygone haben denselben Schwerpunkt. Letzerer ist die Grenze, der die Polygone zustreben. Mn. (Lp.)

L. CERTO. Sui poligoni piani semplici. Batt. G. XXIII. 366-367.

Einige Sätze über Correspondenzen von Punkten der Ebene, die sich auf die Aufgabe beziehen: Ein einfaches n-Eck zu construiren, wenn die Mitten seiner Seiten gegeben sind. Die Verschiedenheit der beiden Fälle, je nachdem n ungerade oder gerade, wird besonders hervorgehoben. Mz.

A. J. FRASER. On the number of conditions determining geometrical figures. Edinb. M. S. Proc. III. 22-29.

Die Abhandlung versucht, 1) aus den ersten Principien die

Anzahl der nötigen Bedingungen zur Bestimmung eines ebenen n-Ecks abzuleiten, 2) daraus die Zahlen für besondere Fälle zu folgern, 3) den Einfluss eines Ueberschusses oder eines Mangels in der Anzahl der Bedingungen zu erörtern. Gbs. (Lp.)

NIEMÖLLER. Ueber einen aus der Potentialtheorie hergeleiteten geometrischen Satz. Schlömilch Z. XXX. 251-252.

O. SCHLÖMILCH. Bemerkungen hierzu. Schlömilch Z. XXX. 252-253.

1. Wenn in einem Dreieck ABC von der Spitze C aus $n-1$ Gerade nach der Basis AB gezogen werden, so gilt für die Durchmesser $d_1, d_2, \dots, d_n$ der in die n Teildreiecke einbeschriebenen Kreise die Gleichung

$$(1)\qquad \left(1-\frac{d_1}{h}\right)\left(1-\frac{d_2}{h}\right)\cdots\left(1-\frac{d_n}{h}\right)=1-\frac{d}{h},$$

worin h die Höhe des Dreiecks ABC und d der Durchmesser des ihm einbeschriebenen Kreises ist. Bezeichnet man mit δ den Durchmesser desjenigen der drei dem Dreieck angeschriebenen Kreise, welcher die zu h senkrechte Seite berührt, so besteht bekanntlich die Relation

$$(2)\qquad h=\frac{d\delta}{\delta-d},$$

welcher auch die Form

$$\left(1-\frac{d}{h}\right)\left(1+\frac{\delta}{h}\right)=1$$

gegeben werden kann. Mit Hülfe der letzteren geht (1) über in

$$(3)\qquad \left(1+\frac{\delta_1}{h}\right)\left(1+\frac{\delta_2}{h}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta_n}{h}\right)=1+\frac{\delta}{h}.$$

2. Herr Schlömilch bemerkt, dass aus (2) auch

$$1-\frac{d}{h}=\frac{d}{\delta}$$

folgt, und demnach (1) in folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$\frac{d_1}{\delta_1} \cdot \frac{d_2}{\delta_2} \cdots \frac{d_n}{\delta_n} = \frac{d}{\delta},$$

eine Gleichung, die sich auch direct geometrisch beweisen lässt.

Rdt.

E. Lemoine. Exercices divers de mathématiques élémentaires. Extrait du journal de math élém Paris. Delagrave 7~ S

52 teils neue, teils schon bekannte und anderweitig veröffentlichte Aufgaben geometrischen Inhalts mit neuen Beweisen, zur Weiterbildung für Schüler bestimmt. Die gegebenen Lösungen sind recht anregend, wenn auch nicht immer die einfachsten. Behandelt werden hauptsächlich geometrische Oerter sowie Maxima und Minima, die bei einem Dreieck durch Transversalen erzeugt werden, aber auch Lehrsätze und Dreiecksconstructionen.

Lg.

M Jenkins. On some geometrical proofs of theorems connected with the inscription of a triangle of constant form in a given triangle. Quart. J. XXI. 84-89.

Bei der Aufgabe, das kleinste Dreieck von constanter Form einem andern Dreieck ABC einzuzeichnen, ergeben sich 2 Punkte s und s', deren Projectionen l, h, k resp. l', h', k' auf BC, CA, AB derartige Dreiecke sind. Diese 6 Punkte liegen auf einem Kreise. Die Geraden $s\alpha, s'\alpha'$; $s\beta, s'\beta'$; $s\gamma, s'\gamma'$, welche mit den Seiten von ABC denselben Winkel ϑ bilden, schneiden sich paarweise in u, v, w so, dass s, s', u, v, w auch auf einem Kreise liegen. s und s' können mit dem Höhenpunkt resp. Umkreiscentrum zusammenfallen, dann ist $lhk\,l'h'k'$ der Feuerbach'sche Kreis; oder mit den Brocard'schen Punkten, dann ist $lhk\,l'h'k'$ der Tucker'sche und $ss'uvw$ der Brocard'sche Kreis.

Lg.

W. J. C. Miller, T. C. Simmons. Solution of question 8012. Ed. Times XLIII. 96-100.

Von einem Punkte P der Basis BC eines Dreiecks ABC sind durch 2 feste Punkte D und E Linien gezogen, welche AB in R und AC in Q schneiden. Eine Parallele von D zu AB trifft BC in H, und HE schneidet AC in S; eine Parallele von E zu AC trifft BC in K, und KD schneidet AB in T. Mit Hülfe dieser Figur werden folgende interessante Sätze bewiesen: Das Dreieck AQR hat ein Maximum und ein Minimum; die ihnen entsprechenden Lagen von QR sind parallel zu ST und gleich weit entfernt von ST. Sind P_m und p_m die zugehörigen Punkte P, so ist $HP_m K p_m$ eine harmonische Punktgruppe. Für jede andere Lage von P ist das Product $SQ.PR$ constant. Es wird eine leichte Construction des Punktes P gegeben, welcher AQR zum Maximum macht, das Verhältnis zweier Dreiecke AQR durch die entsprechenden Lagen von P ausgedrückt etc. Zum Beweise werden aus der synthetischen Geometrie einige Sätze über projectivische und involutorische Punktreihen herangezogen.

Lg.

Chrystal. Sur le problème de la construction du cercle minimum renfermant n points donnés d'un plan. S. M. F. Bull. XIII. 198-200. (Uebersetzung aus dem Englischen.)

Es wird folgende Lösung gegeben: Man construire aus m von den Punkten ein convexes Polygon, welches alle andern Punkte einschliesst, wähle eine Seite desselben zur Grundlinie und diejenige Ecke, von welcher aus diese Seite unter dem kleinsten Winkel erscheint, als Spitze eines Dreiecks. Ist dann der Winkel an der Spitze stumpf oder 90°, so hat der gesuchte kleinste Kreis die Grundlinie zum Durchmesser; ist das Dreieck spitzwinklig, so ist der demselben umgeschriebene Kreis der gesuchte; ist aber ein Basiswinkel stumpf, so nehme man die ihm gegenüberliegende Seite zur Grundlinie und diejenige Ecke, von welcher aus sie am kleinsten erscheint, als Spitze eines neuen Dreiecks etc. Durch höchstens $\frac{1}{2}m(m-1)$ Operationen gelangt man dann zum Ziele.

Lg.

Chrystal. On the problem to construct the minimum circle enclosing n given points in a plane. Edinb. M. S. Proc. III. 30-33.

Vergl. das vorhergehende Referat. Gbs.

J. Lange. Eine Gruppe planimetrischer Maxima und Minima. Hoppe Arch. (2) II. 430-435.

Bei einem Dreieck bezeichne a eine Seite, α deren Gegenwinkel, ϱ_a den Radius des ihr anbeschriebenen Kreises, h_a die zu ihr senkrechte Höhe, $2s$ den Umfang des Dreiecks, ϱ den Radius des einbeschriebenen Kreises, J den Inhalt. Nimmt man von diesen Stücken je zwei als constant an, so ergiebt sich für die ∞^1 diese Stücke enthaltenden Dreiecke eine Reihe von Sätzen über Maxima und Minima, welche vom Verfasser abgeleitet werden. Der Culminationspunkt tritt dabei immer in dem Falle ein, wo das Dreieck gleichschenklig wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wo der ein- und der anbeschriebene Kreis sich berühren. Bei der Determination der Dreiecks-Constructionen aus obengenannten Stücken dürften die Betrachtungen des Verfassers manchen Lehrern dienlich sein. Scht.

D. Mirimonow. Bestimmung des Minimums des Umfanges eines Dreiecks, das in ein gegebenes Dreieck eingeschrieben ist. Ermakow J. I. 353-355. (Russisch.)

P. Nikulzew. Die Maxima der Inhalte und der Umfänge von Kreisvielecken. Ermakow J. I. 291-296. (Russisch.)

N. Ssobolewski. Bestimmung der Form der Dreiecke vom grössten Inhalte. Ermakow J. II. 133-139. (Russisch.)

A. Cayley. On Mascheroni's Geometry of the compass. Mess. XIV. 179-181.

Wiedergabe der in Buch VIII. von Mascheroni's Geometrie des Zirkels enthaltenen Lehrsätze. Dieselben betreffen die Durchschnitte von geraden Linien mit Kreisbogen und unter einander.

Glr. (Lp.)

A. Schneider. Lösung geometrischer Aufgaben mittels des Lineals und einer bestimmten Zirkelöffnung. Ermakow J. II. 5-7. (Russisch.)

R. Hoppe. Archimedische Kreisquadratur. Hoppe Arch. (2) II. 447-448.

Um das Verhältnis der Seite x eines einem Kreise nahezu flächengleichen Quadrats zu dessen Radius r durch zwei Strecken darzustellen, benutzt der Verfasser die archimedische Annäherung $x = r\sqrt{\frac{22}{7}}$, geht dabei aber nicht von r aus, sondern von einer Strecke a, aus der $r = \sqrt{(4a)^2-(3a)^2} = a\sqrt{7}$ construirt wird. Hieraus ergiebt sich $a\sqrt{11}$ als $\sqrt{(2a)^2+(a\sqrt{7})^2}$, und hieraus endlich $x = a\sqrt{22}$ als $\sqrt{(a\sqrt{11})^2+(a\sqrt{11})^2}$.

Scht.

A. H. Anglin. Approximate circle quadratures. Mess. XIV. 185-189.

Fünf geometrische Constructionen für die Seite eines Quadrates, das dem Flächeninhalte eines gegebenen Kreises sehr nahe kommt. Nimmt man den Halbmesser des Kreises zur Längeneinheit, so unterscheiden sich die gefundenen Linien vom wahren Werte der Quadratseite um 1) 0,0055, 2) 0,0096, 3) 0,0038, 4) 0,0023, 5) 0,0005.

Glr. (Lp.)

C. Busch. Die Quadratur und Rectification des Kreises auf elementar geometrischem Wege. Ohrdruf. Bornebusch.

N. Tatschalow. Berechnung des Verhältnisses des Kreisumfangs zum Durchmesser. Ermakow J. I. 358-363. (Russisch.)

F. Girbu. Quadratura circuli demonstrata. Würzburg und Wien. Leo Woerl. IV u. 24 S. 8° mit 8 lith. Tafeln.

Der deutsch schreibende Verfasser hat unter dem Motto: „Ad honorem Dei et utilitatem hominum", nachdem er sich in der Vorrede als Dilettant der Mathematik bekannt hat, der die Frucht einer Arbeit von einer ziemlichen Anzahl von Jahren, ja fast einigen Jahrzehnten bietet, eine Construction geliefert, welche π gleich 3,132 ergeben würde. Der sogenannte Beweis ist ein Zirkelschluss. Lp.

J. Lošták. Beitrag zur Trisection eines Winkels. Časop. XIV. 38. (Böhmisch.)

Löst die bekannte Aufgabe mit Hülfe eines zu diesem Behufe speciell construirten Lineals. Std.

J. Schumacher. Das Sehnen-Tangentenviereck. Hoppe Arch. (2) II. 383-406.

Zu den bereits bekannten Eigenschaften des Vierecks, das sowohl einem Kreise um- wie auch einem Kreise einbeschrieben ist, fügt der Verfasser eine Menge von neuen Eigenschaften hinzu, deren Mitteilung hier zu weitläufig sein würde. Die erkannten neuen Wahrheiten werden zur Lösung von Constructions-Aufgaben für diese Vierecksart verwertet. Scht.

R. Lachlan. On the properties of a triangle formed by coplanar circles. Quart. J. XXI. 1-59.

Der Herr Verfasser will zeigen, dass ein von Kreisbogen in der Ebene gebildetes Dreieck Eigenschaften hat, die denen eines gewöhnlichen Dreiecks analog sind.

Zuerst wird die Aufgabe discutirt, einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet. Im allgemeinen sind zwei solche Kreise vorhanden, von denen einer der inverse des anderen in Bezug auf den Kreis ist, welcher die drei gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet.

Hierauf werden verschiedene Theoreme über Kreise bewiesen, indem diese Kreise durch die Winkel definirt werden, unter denen sie die Seiten eines gegebenen (aus Kreisbogen gebildeten) Dreiecks schneiden. Ferner: wenn vier Kreise von einem fünften unter gegebenem Winkel geschnitten werden sollen, so müssen sie eine gewisse Bedingung erfüllen, und wenn sie dieser genügen, so ist die Lage des fünften Kreises mitbestimmt, u. s. w. Verschiedene Lehrsätze, die die Berührungskreise, den Neunpunktekreise und den Umkreis eines gewöhnlichen Dreiecks betreffen, werden auf die entsprechenden Kreise für ein aus Kreisbogen gebildetes Dreieck ausgedehnt. Zuletzt wird gezeigt, wie die Eigenschaften der mit einem sphärischen Dreieck in Beziehung stehenden Kreise aus den gegebenen Sätzen abgeleitet werden können. Mz.

É. Chretien. Solution d'une question (1362). Nouv. Ann. (3) IV. 519-520.

Befinden sich in der Ebene ein Punkt o, eine Kreislinie, auf welcher a und b die Endpunkte eines Durchmessers sind; und ist noch ein anderer Durchmesser D gegeben, so soll man auf dem Kreise einen solchen Punkt m finden, dass die Geraden ma, mb auf D ein Segment bestimmen, welches von o aus unter einem rechten Winkel gesehen wird. Die synthetische Auflösung dieser Aufgabe zeigt, wie auf D projectivische Punktreihen entstehen, deren Doppelpunkte zu bestimmen sind.

Mz.

J. Allison. The so-called Simson-line. Edinb. M S Proc III. 77-93

Dieser Artikel stellt in geordneter Weise viele die Simson'sche Linie betreffenden Sätze zusammen. Notizen über die Simson'sche Linie werden in demselben Bande auch durch die Herren Muir und Mackay gegeben. Gbs (Lp)

W. Ermakow. Die harmonischen Eigenschaften des Kreises. Ermakow J II 180-181 (Russisch)

Morgan Jenkins. Solution of question 7583. Ed Times XLII 45

Beweis für die Gergonne'sche Construction eines Kreises, der drei gegebene Kreise berührt, ohne dass beim Beweise zwei sich berührende Kreise benutzt werden. Lp.

J. Sachs. Ueber die Aufgabe des Malfatti, ihre Erweiterungen und Lösungen. Pr Freiburg i Br.

Nach sehr ausführlichen, historisch-bibliographischen Tabellen folgt eine analytisch-geometrische Behandlung des berühmten, von Malfatti 1803 aufgestellten Problems, aus welcher sich 128 Lösungen ergeben. Der Verfasser stellt es sich dann zur Aufgabe, diese Lösungen zu sichten. Zunächst giebt es vier Fälle hinsichtlich der Art und Weise, wie sich drei Kreise gegenseitig berühren, d. h. jeder die beiden andern. Erstens nämlich, die drei Kreise schliessen einander sämtlich aus; zweitens zwei Kreise schliessen einander aus, während der dritte den einen einschliessend, den andern ausschliessend berührt; drittens, zwei einander ausschliessende Kreise werden vom dritten gleichzeitig eingeschlossen; viertens, alle drei Kreise sind in einander gelegen, also der mittlere wird vom grössten umschlossen, und schliesst selbst den kleinsten ein. Hierzu kommen aber noch zwei für

die kritische Beleuchtung der 128 Lösungen wichtige Specialfälle; nämlich fünftens, zwei Kreise decken sich vollständig und werden vom dritten berührt; endlich sechstens, alle drei Kreise fallen in einen einzigen zusammen. Fall IV liefert dann 4 Lösungen, nämlich jeden der 4 dreifach gedachten Berührungskreise des Dreiecks. Fall V giebt jeden dieser Berührungskreise, doppelt gedacht, und ihm zugesellt einen der beiden Kreise, die in einem seiner Berührungspunkte die zugehörige Dreiecksseite und eine der beiden andern Seiten berühren, im ganzen also 4.3.2 = 24 Lösungen. Der nächste Fortschritt zur Allgemeinheit der Lösung ist dann der unter II zu rechnende Fall, dass einer der Berührungskreise, einfach gezählt, als zweiten und dritten Kreis diejenigen beiden zugeordnet erhält, welche im gleichen Berührungspunkte gleichzeitig noch je eine der beiden andern Seiten berühren. Dies liefert 12 erweiterte Lösungen. Dann discutirt der Verfasser Fall III und erhält dafür 12 Lösungen. Da II und IV ausser durch schon gezählte Specialfälle nicht erfüllbar sind, so bleiben 76 Lösungen übrig, die Fall I zugehören. Von diesen ist nur eine so, dass das Dreieck alle 3 Kreise umschliesst. Die Discussion der übrigen 75 Fälle, welche also Figuren geben, in denen die Kreise sämtlich oder teilweise aus dem Dreieck heraustreten, verlangt viel Mühe und Sorgfalt. Viele Figuren erleichtern dem Leser das Studium der mühevollen Arbeit des Verfassers. Referent hätte noch gern eine Beleuchtung der Frage hinzugefügt gesehen, wie sich die 128 Lösungen bei der berühmten Steiner'schen Construction ergeben, wenn man bei letzterer die Halbirungslinien der Aussenwinkel mit berücksichtigt. Scht.

Nakoneczny. Die verschiedenen Auflösungsmethoden des Malfatti'schen Problems und kritische Bemerkungen darüber. Pr. Stanislawow. (Polnisch.)

Die Schrift enthält eine historische Einleitung und eine ausführliche Darstellung mehrerer bekannter Auflösungsarten.

Dn.

Th. Muir. Theorems connected with three mutually tangent circles. Edinb. M. S. Proc. III. 119-122.

Gbs.

M. Baker. A group of circles related to Feuerbach's circle. Wash. Bull. VIII. 45-52.

Der Verfasser reproducirt die bekannten Eigenschaften der Figur des Feuerbach'schen Kreises mit einigen vereinfachten Beweisen.

Scht.

M. Jenkins, J. Mc Dowell. Solution of question 7760. Ed. Times XLIII. 29-30.

Der geometrische Ort des Punktes, dessen Tangenten an 2 feste Kreise *A* und *B* in einem gegebenen Verhältnis stehen, ist ein Kreis des durch *A* und *B* bestimmten Büschels. Legt man nämlich durch einen beliebigen Punkt *P* des Ortes einen *A* und *B* rechtwinklig schneidenden Kreis und an diesen in *P* die Tangente, welche die Centrale *AB* in *O* schneidet, so ist *O* ein fester Punkt auf *AB* und *OP* constant. Der Beweis ist aber nur für den Fall geführt, dass *A* und *B* sich nicht schneiden.

Lg.

W. J. Greenstreet, A. H. Curtis, T. Brill. Solution of question 7730. Ed. Times XLII. 37-38.

Die Polaren eines festen Punktes in Bezug auf die Kreise eines Büschels schneiden sich in einem andern festen Punkt. Dies wird elementar bewiesen. Der zweite Teil des Satzes: „Die beiden festen Punkte erscheinen von den Grenzpunkten des Büschels aus unter rechten Winkeln“ gilt natürlich nur für den Fall, dass Grenzpunkte vorhanden sind, d. h. dass die Kreise des Büschels sich nicht schneiden.

Lg.

H. Fortey. Solution of question 7682. Ed. Times XLII. 55-58.

Drei Ecktransversalen, welche sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit und im selben Sinne um die Ecken eines Dreiecks *ABC* drehen, bestimmen ein veränderliches Dreieck. Der Ort für das Umkreiscentrum dieses Dreiecks besteht aus zwei gleichen Kreisen, der eine entspricht den Anfangslagen *AB*, *BC*, *CA*, der andere den Anfangslagen *AC*, *CB*, *BA* der Ecktransversalen. Diese Kreise berühren sich im Mittelpunkt des Umkreises von *ABC* und ihre Centrale berührt den Brocard'schen Kreis. Der Beweis dieser Sätze wird analytisch geführt und der Radius der gleichen Ortskreise durch die Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks ausgedrückt. Lg.

E. Lemoine. Sur une généralisation des propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine. Nouv. Ann. (3) IV. 201-223.

E. Lemoine. Propriétés relatives à deux points ω, ω' du plan d'un triangle *ABC* qui se déduisent d'un *K* quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine. Franç. Ass. (Grenoble) 1885.

Herr Lemoine hat den Punkt *K*, dessen Abstände von den Seiten a, b, c des Dreiecks *ABC* sich wie $a:b:c$ verhalten, zum Gegenstande von Specialuntersuchungen gemacht, auf Grund deren die in deutschen Arbeiten übliche Bezeichnung „Grebe'scher Punkt" in Frankreich durch die andere „Lemoine'scher Punkt" verdrängt wird. Sind α, β, γ die Fusspunkte der Ecktransversalen *AK*, *BK*, *CK* und zieht man $\alpha\mu'$, $\beta\nu'$, $\gamma\lambda'$ parallel zu *AB*, *BC*, *CA* und $\alpha\nu$, $\beta\lambda$, $\gamma\mu$ parallel zu *CA*, *AB*, *BC*, wo λ und λ' auf *BC*, μ und μ' auf *CA*, und endlich ν und ν' auf *AB* liegen, so schneiden sich $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ einerseits und $A\lambda'$, $B\mu'$, $C\nu'$ andrerseits in den Brocard'schen Punkten ω und ω' (siehe F. d. M. XV. 1883. 482). In den beiden vorliegenden Abhandlungen sind diese Sätze erweitert und dadurch verallgemeinert, dass für *K*

ein beliebiger Punkt der Ebene genommen wird. Am Schlusse der zweiten Abhandlung findet sich ein historischer Abriss mit ausführlichen Literaturangaben über den Gegenstand.

Lg.

E. Lemoine. Propriétés diverses du cercle et de la droite de Brocard. Mathesis V. 103-108.

Es seien Ω, Ω' die Brocard'schen Punkte des Dreiecks ABC, K der Grebe-Lemoine'sche Punkt, G der Schwerpunkt, H der Höhenschnitt, O der Mittelpunkt des Umkreises, I, I_a, I_b, I_c die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise. Folgendes sind die Hauptergebnisse, zu denen Herr Lemoine gelangt:

1. Bedingung dafür, dass die Gerade $\Omega\Omega'$ (Brocard'sche Gerade) sei: senkrecht zu CK oder zu $CO: a = b$; parallel zu $CK: 2c^2 = a^2 + b^2$; parallel zu $CG: 2c^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$; parallel zu $CO: c^2(a^2+b^2-2c^2) = (a^2-b^2)^2$; senkrecht zu $CG: ab + c^2\cos C = 0$; senkrecht zu $BC: b^4 + c^4 = a^2(b^2+c^2)$. Im letzten Falle ist der Brocard'sche Winkel gleich $90^\circ - A$; Ω liegt auf BH und Ω' auf CH; CG und BH, BG und CH schneiden sich auf AK; die Mitte von OK liegt auf AG

2. Der Brocard'sche Winkel kann nicht gleich einem Winkel von ABC sein; er ist gleich $\frac{1}{2}A$, wenn

$$b^2c^2(b^2+c^2) = a^6 - 2a^2b^2c^2.$$

3. Es seien x, y, z und x', y', z' die Abstände der Punkte Ω, Ω' von den Seiten a, b, c. Man hat $xyz = x'y'z'$, aber nicht $x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2$, ausser wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist. Bedingungen dafür, dass AB symmetrisch zu $A\Omega$ oder zu $A\Omega'$ ist: $b^4 = a^2(b^2+c^2)$, $b^2 = a^2 + c^2 - a^2c^2(a^2+c^2)^{-1}$.

4. Der Mittelpunkt des Brocard'schen Kreises liegt nie auf I_bI_c; er liegt auf AI_a, wenn $b = c$; er liegt weder auf AK noch auf AH, es sei denn, dass AK und AH zusammenfallen (gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck). Der Brocard'sche Kreis berührt nie CG oder CI; er berührt CK in K, wenn $2c^2 = a^2+b^2$; BC im Schnitt der Winkelhalbirenden AI, wenn $a^2 = 2bc$; I_bI_c, wenn $2(c^2+ab)\,ab = a^4+b^4$.

5. Wenn $c^2 = ab$, so sagt Herr Lemoine, das Dreieck ABC sei in C ein mittleres. Ein solches Dreieck besitzt ziemlich merkwürdige Eigenschaften: Ω und Ω' liegen auf der Winkelhalbirenden CI und fallen mit den Ecken A_1, B_1 des ersten Brocard'schen Dreiecks zusammen; der Brocard'sche Kreis berührt $A\Omega$ in Ω, $B\Omega'$ in Ω'; AG und BK, AK und BG schneiden sich auf CI.

6. Die Punkte A, B, C, Ω, Ω' liegen auf einer Hyperbel, welche nie durch einen der Punkte H, G, I, I_a gehen kann. Ist $c^2 = ab$, so zerfällt diese Hyperbel in zwei Gerade, nämlich BC und AI. Mn (Lp.)

J. Neuberg. Sur le quadrilatère harmonique. Mathesis V 202-204, 217-221, 241-248, 265-269.

Das „harmonische Viereck" ist ein Viereck $ABCD$, das einem Kreise O eingeschrieben ist, und in welchem die Producte der Gegenseiten $AB.CD$, $AD.BC$ gleich sind. Die Strahlen, welche A, B, C, D mit einem beliebigen fünften Punkte der Peripherie von O verbinden, bilden einen harmonischen Büschel; fällt dieser fünfte Punkt mit einer Ecke des Vierecks zusammen, so erkennt man, dass AC Symmediane der Dreiecke ABD, CBD und BD Symmediane der Dreiecke BAC, DAC ist. Die Gleichheit

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = -1,$$

nach den Principien des Richtungs-Calcüls (der Aequipollenzen) gedeutet, genügt zur Definition des harmonischen Vierecks.

1. Der Schnittpunkt E der Diagonalen AC, BD heisst „Lemoine'scher Punkt" von $ABCD$. Die Gerade, welche die Schnittpunkte E' von AB und CD, E'' von BC und AD mit einander verbindet, wird in B', B'' von den Geraden BD, AC harmonisch geteilt; B' ist der Pol von AC, B'' von BD; die Gerade $E'E''$, Polare von E, ist die „Lemoine'sche Gerade" des Vierecks.

Man setze $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; ferner seien $EX = x$, $EY = y$, $EZ = z$, $EU = u$ die von E auf a, b, c, d gefällten Lote. Ist Q der Inhalt von $ABCD$ und

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

so hat man:

$$(1)\qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} = \frac{Q}{2m^2}.$$

Jedes der Verhältnisse in (1) kann mit $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega$ bezeichnet werden; dann ist ω ein Hülfswinkel, der den Namen „Brocard'scher Winkel" erhalten hat. Herr Tucker hat die Formel gegeben:

$$\operatorname{cosec}^2\omega = \operatorname{cosec}^2 DAB + \operatorname{cosec}^2 ABC.$$

Sind F und G die Mitten von AC, BD, so sind die Winkel $E'FE''$, $E'GE''$ gleich 2ω oder $\pi - 2\omega$.

E ist der Punkt, für den die Summe der Abstände von den Seiten von $ABCD$ ein Minimum ist.

2. Das Viereck $XYZU$ hat zum Centrum der mittleren Entfernungen den Punkt E, und es ist einem Kreise mit dem Mittelpunkte E umgeschrieben; seine Seiten sind senkrecht und proportional zu BF, CG, DF, AG; die Gegenseiten schneiden sich auf AC und BD. Die Medianen BF, CG, DF, AG haben dieselbe Entfernung $2R\cos DAB\cos ABC$ vom Centrum O des Umkreises von $ABCD$.

3. Transformirt man durch reciproke Radien die Ecken A, B, C, D eines harmonischen Vierecks, so erhält man die Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 eines neuen harmonischen Vierecks. Liegt der Inversionspol P auf dem Kreise O, so erhält man vier harmonische Punkte in einer Geraden. Wenn dieser Punkt P beliebig ist, so kann man für A_1, B_1, C_1, D_1 die zweiten Schnittpunkte der Geraden AP, BP, CP, DP mit dem Kreise O nehmen. Man kann dann zwei solche Lagen für P finden, dass $A_1B_1C_1D_1$ ein Quadrat wird. Diese Punkte sind die Schnittpunkte der Geraden OE mit derjenigen Kreislinie, die als Mittelpunkt die Projection von E auf seine Polare $E'E''$ hat und den Kreis O rechtwinklig schneidet.

Man kann dem Kreise O eine Schar harmonischer Vierecke einbeschreiben, die denselben Lemoine'schen Punkt haben. Es genügt hierzu, dass man als Diagonalen AC, BD zwei in Bezug auf den Kreis conjugirte Geraden wählt. Diese Geradenpaare

bestimmen auf der Polare von E eine derartige Involution, dass die Segmente zwischen zwei zugeordneten Punkten von denjenigen beiden Punkten aus unter rechten Winkeln erscheinen, die als Inversionspole gewählt zur Umwandlung aller dieser harmonischen Vierecke in Quadrate dienen.

4. Der über EO als Durchmesser beschriebene Kreis erhält den Namen „Brocard'scher Kreis“; er trifft die in den Mitten von a, b, c, d errichteten Lote in Punkten M, N, P, Q, welche die Spitzen ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke über a, b, c, d sind. Der Winkel an der Basis dieser Dreiecke ist ω. Die Geraden AM, BN, CP, DQ laufen in einen Punkt Ω des Brocard'schen Kreises zusammen; die Geraden BM, CN, DP, AQ gehen durch einen zweiten Punkt Ω' dieses Kreises. Die Punkte Ω, Ω', „Brocard'sche Punkte“ genannt, sind die Brennpunkte einer Ellipse, der „Brocard'schen Ellipse“, die allen harmonischen Vierecken einbeschrieben ist, die denselben Lemoine'schen Punkt E haben und dem Kreise O einbeschrieben sind.

5. Man bezeichne mit f_a, f_b, f_c, f_d vier direct ähnliche Figuren, die über a, b, c, d als homologen Linien construirt sind. Der Brocard'sche Kreis trifft die Diagonalen AC, BD in ihren Mitten F, G; F ist der Doppelpunkt von f_a und f_d, f_b und f_c; G ist der Doppelpunkt von f_a und f_b, f_c und f_d. Der Brocard'sche Kreis trifft auch die Geraden EE', EE'' in Punkten H, I, die bezw. die Doppelpunkte von f_a und f_c, f_b und f_d sind. Das Viereck $MNPQ$ heisst „erstes Brocard'sches Viereck“; die Geraden MP, NQ sind parallel zu FG; $FGHI$ ist das „zweite Brocard'sche Viereck“. Vier homologe Gerade von f_a, f_b, f_c, f_d bilden ein Viereck $A_1B_1C_1D_1$, das $ABCD$ ähnlich ist und dessen Diagonalen A_1C_1, B_1D_1 bezw. durch F, G gehen und sich in einem Punkte E_1 des Brocard'schen Kreises von $ABCD$ schneiden. Der Aehnlichkeitspunkt der Vierecke $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ gehört ebenfalls diesem Kreise an. Vier Punkte M', N', P', Q', welche a, b, c, d nach demselben Verhältnisse teilen, besitzen die Eigenschaft, dass die Geraden $M'M$, $N'N$, $P'P$, $Q'Q$ in einen Punkt L des Brocard'schen Kreises zusammenlaufen; L gehört auch den Umkreisen von $BM'N'$, $CN'P'$, $DP'Q'$, $AQ'M'$ an. Auf dem in der

Mitte von FG errichteten Lote kann man vier homologe Punkte von f_a, f_b, f_c, f_d finden.

6. Dreht man den Büschel (Ω, $ABCD$) um einen gewissen Winkel um Ω, und den Büschel (Ω', $BCDA$) um denselben Winkel, aber in entgegengesetztem Sinne um Ω', so treffen die Strahlen dieser Büschel die Seiten a, b, c, d des Vierecks $ABCD$ in acht Punkten (α, β, γ, δ), (β', γ', δ', α'), welche einem und demselben Kreise angehören („Tucker'scher Kreis"). Die Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sind einander congruent und $ABCD$ ähnlich.

Die Tucker'schen Kreise haben ihre Mittelpunkte auf der Geraden EO und umhüllen die Brocard'sche Ellipse. Die Geraden $\alpha\delta'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\beta'$ $\delta\alpha'$ sind die Seiten eines Vierecks $A'B'C'D'$, das in Bezug auf E zu $ABCD$ collinear ist; die Gegenseiten, z. B. AB und $C'D'$, der beiden Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ schneiden sich auf einer und derselben Geraden. Ein besonderer Fall des Vierecks $A'B'C'D'$ ist derjenige, wo es sich auf den Punkt E reducirt, d. h. wo die Punkte α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' durch Parallele bestimmt werden, die durch E zu a, b, c, d gelegt sind; der Umkreis von $\alpha\beta\gamma\delta$ erhält dann den Namen „erster Lemoine'scher Kreis."

Die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ sind die Seiten eines Vierecks, das in Bezug auf E collinear ist mit den durch die Tangenten in A, B, C, D am Kreise O gebildeten Tangenten. Diese Geraden können alle durch E gehen, was einen merkwürdigen besonderen Fall der Tucker'schen Kreise giebt, den „zweiten Lemoine'schen Kreis". Mn. (Lp.)

J. Neuberg. Sur les figures semblablement variables. Lond. M. S. Proc. XVI. 185-188. Extrait: Mathesis V. Suppl. IV.

Herr H. M. Taylor hat die Beziehungen zwischen den Schnittpunkten eines Kreises und der Seiten eines Dreiecks ergründet. (Lond. M. S. Proc. XV. 122-139. F. d. M. XVI. 1884. 493.) Herr Neuberg erforscht diese Beziehungen genauer und vervollständigt sie, indem er sie mit der Theorie der ähnlich-veränder-

lichen Figuren und mit derjenigen der schiefen Isogonalen aus dem Brennpunkte eines Kegelschnittes verknüpft.

1. Es sei $\alpha\beta\gamma$ ein veränderliches Dreieck, das der Bedingung unterworfen ist, von constanter Form zu bleiben und einem festen Dreieck ABC einbeschrieben zu sein. Die Kreise $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ schneiden sich in einem festen Punkte F, der fortwährend ein Aehnlichkeitspunkt der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ ist. Von diesem Punkte aus sieht man die Seiten von $\alpha\beta\gamma$ unter den Winkeln $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ und die Seiten von ABC unter den Winkeln $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$.

2. Es seien M, N, P die Projectionen von F auf BC, CA, AB; MNP ist das Minimum des veränderlichen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$. Die Geraden $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ hüllen drei Parabeln ein, welche F als gemeinsamen Brennpunkt besitzen und MN, NP, PM zu Scheiteltangenten haben. Jeder Punkt des veränderlichen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ (Höhenschnitt, Mittelpunkt des Umkreises u. s. w.) beschreibt eine Gerade; jede Gerade dieses Dreiecks (Mediane, Winkelhalbirende u. s. w.) umhüllt eine Parabel mit dem Brennpunkte F.

3. Der Kreis $\alpha\beta\gamma$ trifft BC, CA, AB in drei anderen Punkten α', β', γ', den Ecken eines Dreiecks von constanter Form, das fortwährend als Aehnlichkeitspunkt den in Bezug auf ABC zu F inversen Punkt F' hat. Die Hüllcurve des Kreises $\alpha\beta\gamma$ ist ein Kegelschnitt, der ABC einbeschrieben ist und als Brennpunkte F und F' hat; der Kreis MNP ist der über der Focalaxe als Durchmesser beschriebene.

4. Die bemerkenswertesten Fälle entsprechen den Annahmen: I. $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = C$; II. $\alpha = B$, $\beta = C$, $\gamma = A$. In dem ersten Falle ist F der Mittelpunkt des Umkreises von ABC und der Höhenschnitt von $\alpha\beta\gamma$; F' ist der Höhenschnitt von ABC und der Mittelpunkt des Inkreises von $\alpha'\beta'\gamma'$. Im zweiten Falle sind F und F' die Brocard'schen Punkte von ABC; F ist auch ein Brocard'scher Punkt von $\alpha\beta\gamma$, F' einer von $\alpha'\beta'\gamma'$.

5. Die Geraden $\alpha\beta'$, $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$ bilden ein Dreieck $A'B'C'$, die Geraden $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$ ein anderes Dreieck $A''B''C''$. Die Richtungen dieser Geraden bleiben constant, und die Ecken der Dreiecke $A'B'C'$, $A''B''C''$ gleiten auf drei festen Geraden NA,

NB, *NC*. Hieraus folgen zwei andere Mittel zur Bestimmung der Kreisreihe $\alpha\beta\gamma$. Mn. (Lp.)

J. Neuberg. Sur les cercles de Tucker. Ed Times XLIII. 84-85.

Eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten Eigenschaften mit Angabe der Entdecker und der Schriften, wo die erste Veröffentlichung erfolgte. Lp.

R. Tucker. The symmedian-point axis of a system of triangles. Ed Times XLII. 25-26.

R. Tucker. Question 7766. Ed. Times XLII. 96.

R. Tucker. Graphical construction for cubing a number. Ed Times XLIII. 53.

J. Neuberg. Note thereon. Ed. Times XLIII. 53.

Lp.

R. Tucker. Questions 7614, 7717, 7789, 7819, 7900, 7938. Ed. Times XLIII. 32-33, 31-32, 38, 64-65, 57-58, 103-105.

Dreieckssätze und Aufgaben, welche sich auf den Brocard'schen und Tucker'schen Kreis beziehen und von Herrn R Tucker herrühren. Die Lösungen sind von B. H. Rau, E. Rutter, J. O'Regan, D. Thomas, T. C. Simmons, Ch. A. Scott eingesandt. Lp.

K. Ebmer. Die analogen Kreise von Feuerbach und Spieker. Wien. Pichler's Wwe. & Sohn. (27 S.)

M. d'Ocagne. Notes sur la symédiane. Nouv Ann (3) IV 360-366.

Der Herr Verfasser erwähnt zuerst die folgenden von Neuberg

gegebenen Definitionen: Ist ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks gegeben, und verbindet man ihn mit den Ecken desselben, so kann man zu jeder solchen Verbindungslinie die symmetrische in Bezug auf die Winkelhalbirende des Dreiecks (in derselben Ecke) construiren; diese drei symmetrischen Linien treffen sich in demselben Punkte, welcher der isogonal entsprechende des ersten heisst. Sucht man in dieser Weise den isogonal entsprechenden Punkt zum Schwerpunkt des Dreiecks, so gelangt man zu einem Punkt, welcher Centrum der Symmedianen heisst; jede der Geraden, die von einer Dreiecksecke nach diesem Centrum gehen, heisst eine Symmediane des Dreiecks. Die Beziehung unter zwei einander isogonal entsprechenden Punkten ist eine reciproke.

Dieser Definition von isogonal entsprechenden Punkten steht nun eine andere gegenüber: Verbindet man wieder einen Punkt, der in der Ebene eines Dreiecks beliebig gegeben ist, mit den Ecken desselben, bestimmt dann die Durchschnittspunkte dieser Verbindungslinien mit den Gegenseiten und sucht zu diesen die in Bezug auf die entsprechenden Seitenmitten symmetrisch gelegenen, verbindet hierauf letztere mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks, so treffen diese drei Geraden sich in einem Punkte, welcher der isotomisch entsprechende des ersten heisst. Auch diese Beziehung ist reciprok.

Im Anschluss an diese Definitionen folgen nun verschiedene Sätze, so z. B.

Der isotomisch entsprechende Punkt des Höhenschnitts eines Dreiecks ist das Centrum der Symmedianen desjenigen Dreiecks, dessen Seiten durch die Ecken des ersten und zwar parallel zu deren Gegenseiten gehen.

In dieser Weise folgen noch mehrere andere Sätze.

Mz.

W. S. McCay. On three circles related to a triangle. Dublin Trans. XXVIII. 453-470.

Dieser Artikel giebt eine recht vollständi[illegible] der

Eigenschaften dreier alineirten „entsprechenden" Punkte, analog denjenigen, die von Herrn Brocard für drei sich in einem Punkte treffende „entsprechende" Geraden nachgewiesen sind, wenn die Seiten eines Dreiecks die Erzeugenden dreier direct ähnlicher Systeme von Punkten und Linien sind. Gbs. (Lp.)

J. S. Mackay. The shoemaker's knife. Edinb. M. S. Proc. III. 2-11.

Die Notiz stellt die Haupteigenschaften der Figur (des griechischen ἄρβηλος) zusammen und beweist sie nach einheitlicher Methode. Gbs. (Lp.)

Th. Spieker. Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Potsdam. Aug. Stein.

Jedem deutschen Lehrer der Mathematik dürfte das jetzt schon in 18[ter] Auflage erschienene Spieker'sche Lehrbuch der ebenen Geometrie bekannt sein. Dasselbe pädagogische Geschick, dieselbe Rücksichtnahme auf die Einübung des Lehrstoffs durch anregende Aufgaben, welche wir in diesem Lehrbuche finden, tritt uns auch in der vorliegenden, von demselben Verfasser zusammengestellten Trigonometrie entgegen. Dem Referenten sind besonders drei Dinge aufgefallen, welche das Spieker'sche Trigonometriebuch vor andern Trigonometriebüchern auszeichnen. Zuerst die eingehende Behandlung der in der Praxis des Feld- und Höhenmessens auftretenden Aufgaben. Zweitens die eleganten Formelgruppen, welche die dem Schüler von Dreiecksconstructionen her geläufigen Winkel und Strecken (Transversalen, Höhen, Radien, u. s. w.) am Dreieck mit einander verbinden. Endlich die Lehre von der trigonometrischen Analysis der Dreiecksconstructions-Aufgaben. In der sphärischen Trigonometrie ist auch einerseits auf die Anwendung in der mathematischen Geographie, andrerseits auf die Radien des einem sphärischen Dreieck ein- oder umbeschriebenen Kreises Rücksicht genommen. Scht.

J. PETERSEN. Die ebene Trigonometrie und die sphärischen Grundformeln. Deutsch von Fischer-Benzon in Kiel. Kopenhagen Host u. Sohn.

Der Name des Verfassers der „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben" bürgt für die Güte des Buches, das kein Lehrer der Mathematik aus der Hand legen wird, ohne in irgendwelcher Richtung eine neue Anregung erhalten zu haben. Das Capitel der im Titel genannten sphärischen Grundformeln umfasst kaum vier Seiten und enthält ausser dem Sinussatze nur die einfachsten unlogarithmischen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks. Referent kann daher den Zweck dieses kurzen Capitels nicht verstehen, das überdies weder Uebungsaufgaben noch Anwendungen bietet. Scht.

GROSSE-BOHLE. Ebene Trigonometrie zum Gebrauche an Landwirtschaftsschulen, höheren Bürgerschulen und ähnlich organisirten Anstalten. Freiburg i. Br. Herder'sche Verlagshandlung.

Dieses Buch enthält die Grundlehren der ebenen Trigonometrie, soweit sie bei der Berechnung von Dreiecken, die durch 3 Stücke (Seiten oder Winkel) gegeben sind, Anwendung finden. Die Dreiecksaufgaben selbst sind ausführlich behandelt; und am Schlusse finden sich einige praktische Aufgaben, nämlich Abstandsbestimmungen von Punkten auf dem Felde und Höhenmessungen. Endlich sind noch die dem Gedächtnisse einzuprägenden Sätze und Formeln zusammengestellt.

Das Streben des Herrn Verfassers, das Vorgetragene möglichst deutlich und leicht fasslich zur Anschauung zu bringen, ist anzuerkennen. Mz.

FRANKENBACH. Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Dritter Teil. Die ebene Trigonometrie. Liegnitz. Krumbhaar.

Dieses Buch enthält die Goniometrie und die zur trigonometrischen Berechnung von Dreiecken nötigen Sätze. Vorangeht eine Uebersicht der hauptsächlich in Betracht kommenden planimetrischen Sätze; am Schlusse finden sich zahlreiche durchgeführte Beispiele. Hierbei sind die Winkelgrade nicht weiter in Minuten und Secunden geteilt, sondern mit Decimalstellen versehen. Eine klare und bündige Darstellung der Sache, sowie eine gute Ausstattung des Buches gereichen demselben zur Empfehlung. Mz.

K. Judt. Aufgaben aus der Stereometrie und Trigonometrie. 3. Aufl. Ansbach. Seybold.

Diese hier bereits in dritter vermehrter Auflage erschienene Aufgabensammlung bietet den Schülern eines Gymnasiums oder einer Realschule in gedrängter Kürze, aber doch in ausreichendem Masse Material zur Selbstübung in der Stereometrie und Trigonometrie. Das Buch enthält auf 56 Seiten 233 Aufgaben aus der Stereometrie und 172 Aufgaben aus der Trigonometrie, dazu auch die Angabe der Resultate. Die Aufgaben, die sich auch vielfach auf praktische Fragen, auf mathematische Geographie und auf einfache physikalische Grundsätze beziehen, sind recht gut gewählt. Zu Anfang finden sich Constructionsaufgaben aus der Stereometrie, die beim Unterricht in der descriptiven Geometrie Anwendung finden können. Mz.

Genese, B. Reynolds, A. M. Nash. Solution of question 7146. Ed. Times XLII. 99.

Für spitze Winkel ist $\vartheta - \sin\vartheta < \tan\vartheta - \vartheta$. Dies wird mit Hülfe des Satzes bewiesen, dass die Verbindungslinie der Mitten zweier Tangenten von einem Punkt an einen Kreis diesen nicht schneidet. Lg

A. H. ANGLIN. Trigonometrische Sätze. Hoppe Arch. (2) II 407-412.

Der Verfasser beweist, ohne Anwendung des Moivre'schen Theorems die bekannte Formel:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) = \frac{c_1-c_3+c_5-c_7+\cdots}{1-c_2+c_4-c_6+\cdots},$$

wo c_r die Summe aller möglichen Producte von je r von den Zahlen $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\ldots$, $\operatorname{tg}\alpha_n$ bedeutet. Scht.

CH. HERMITE. Sur une identité trigonométrique. Nouv. Ann. (3) IV. 57-59.

Die von Glaisher aufgestellte Identität:

$$\frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\sin(a-h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\sin(b-h)}{\sin(b-a)\sin(b-c)} + \frac{\sin(c-f)\sin(c-g)\sin(c-h)}{\sin(c-a)\sin(c-b)} + \frac{\sin(f-a)\sin(f-b)\sin(f-c)}{\sin(f-g)\sin(f-h)} + \frac{\sin(g-a)\sin(g-b)\sin(g-c)}{\sin(g-f)\sin(g-h)} + \frac{\sin(h-a)\sin(h-b)\sin(h-c)}{\sin(h-f)\sin(h-g)} = 0$$

wird von Hermite verallgemeinert; und diese verallgemeinerte Gleichung mit Anwendung des Residuencalcüls bewiesen.

Mz.

SPORER. Einige Sätze, die sich auf reguläre Polygone beziehen, und daraus sich ergebende trigonometrische Relationen. Hoppe Arch. (2) III. 217-222.

Der Herr Verfasser gelangt zunächst nach einigen einleitenden Betrachtungen zu dem Satze: Jede (algebraische) Curve, die mehr Symmetrieaxen zulässt, als ihre Ordnung oder Klasse

beträgt, besteht notwendig aus einem oder mehreren concentrischen Kreisen. In Folge dieses Satzes kann man bei ganzen Gruppen geometrischer Oerter, die sich auf reguläre Polygone beziehen, im voraus behaupten, dass diese Oerter aus Kreisen bestehen. Da sich nämlich diese Oerter auf alle Seiten des Polygons gleichartig beziehen, so besitzen sie so viele Symmetrieaxen, als das Polygon Ecken oder Seiten hat. Wenn also andererseits die Gradzahl des Ortes die Zahl der Symmetrieaxen nicht erreicht, so zerfällt der Ort in concentrische Kreise. Hierzu werden mehrere Beispiele und Sätze gegeben.

Nachher wird eine Anwendung dieser Betrachtungen auf die Aufstellung goniometrischer Relationen gemacht und am Schlusse noch angedeutet, wie sich mittels dieser Relationen eine ganze Reihe transcendenter Gleichungen lösen lässt.

Mz.

O. Schlömilch. Ueber gewisse Scharen von Dreieckskreisen. Schlömilch Z. XXX. 301-302.

Ist ϱ der Radius des Inkreises für das Dreieck ABC, r der Radius desjenigen Kreises, der AB und die Verlängerungen von CA, CB berührt, R der Radius des Umkreises zu ABC, so ist:

$$\frac{\varrho + r}{2R} = (a+b)\frac{c^2-(a-b)^2}{2abc},$$

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Es werden nun auf AB beliebig die Punkte P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1} angenommen, dann auf AC der Punkt Q_1, auf P_2Q_1 der Punkt Q_2 etc., endlich sei D der Durchschnitt von $P_{n-1}Q_{n-1}$ mit BC; dann ergeben sich gewisse Sätze an dieser Figur durch Anwendung der beiden vorstehenden Gleichungen. Mz.

M. d'Ocagne, Parisien. Solution d'une question (1520.) Nouv. Ann. (3) IV. 389.

Wenn von einem Punkte O die Seite BC des Dreiecks ABC unter dem Winkel $A+90^\circ$ erscheint, so hat man für die Seiten a, b, c des Dreiecks und für die Abstände α, β, γ des Punktes O von den Ecken A, B, C die Gleichung $a^2\alpha^2 = b^2\beta^2+c^2\gamma^2$.

Mz.

R. Tucker, T. C. Simmons. Solution of question 3733. Ed Times XLIII. 60.

Es seien P der Höhenschnitt, Q der Mittelpunkt des Inkreises, O der Mittelpunkt und r der Radius des Umkreises eines Dreiecks ABC, so ist der Inhalt des Dreiecks OPQ gleich $=2r^2\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}(C-A)$. Lp.

W. J. C. Miller, T. C. Simmons, E. Skrimshire, T. Galliers. Solutions of questions 7932, 7972. Ed. Times XLIII. 115-116.

1) $ABCD$ sei ein Quadrat, P ein Punkt im Innern, jedoch nicht auf einer Diagonale,

$$\angle\, APB=\alpha,\quad BPC=\beta,\quad CPD=\gamma,\quad DPA=\delta;$$

dann ist

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)^{-1}+(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\delta)^{-1} = (\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\gamma)^{-1}+(\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\delta)^{-1}=1.$$

2) Setzt man $\angle\, PAD=\alpha$, $PDA=\beta$, $PBC=\gamma$, $PCB=\delta$, so ist

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)^{-1}+(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\delta)^{-1} = (\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta)^{-1}+(\operatorname{cotg}\gamma+\operatorname{cotg}\delta)^{-1}=1.$$

Lp.

H. W. L. Tanner. Note on the ambiguous case in spherical trigonometry. Mess XIV. 153-154.

M. Jenkins. Note on Prof. Tanner's paper on the ambiguous case in spherical trigonometry. Mess. XIV. 155.

Beide Noten betreffen den doppeldeutigen Fall, bei welchem a, b, A gegeben, B, C, c gesucht sind. Die zur Existenz wenigstens eines Dreiecks erforderlichen Bedingungen und die Anzahlen der in den verschiedenen Fällen existirenden Dreiecke werden in bündiger und einfacher Form hingestellt, ausserdem werden mehrere Beweise der verschiedenen Ergebnisse erbracht.

Glr. (Lp.)

L. Tanner, E. Perrin. Solution of question 8001.
Ed. Times XLIII. 70.

Sind bei einem sphärischen Dreiecke 1) 3 Seiten spitz, so sind 2 Winkel spitz; 2) 1 Seite spitz und 1 Seite nicht spitz, so sind 1 Winkel stumpf und 2 spitz; 3) 2 Seiten stumpf und 1 spitz, so ist 1 Winkel stumpf; 4) 2 Seiten stumpf und 1 nicht spitz, so sind alle Winkel stumpf.

Lp.

J. Wolstenholme, W. J. C. Sharp. Solution of question 7509. Ed. Times XLIII 39-40

Bei einem Tetraeder $ABCD$ bezeichne man mit s_1, s_2, s_3, s_4 die Summen aus den Längen der bezw. in A, B, C, D zusammenstossenden Kanten, mit S_1, S_2, S_3, S_4 die Summen der Flächenwinkel an denselben Eckpunkten. Ist $s_1 > s_2 > s_3 > s_4$, so ist $S_4 > S_3 > S_2 > S_1$. Für die Summen der Kantenwinkel an den nämlichen Ecken hat Herr Wolstenholme aus 150 Beispielen kein ausnahmsloses Gesetz ableiten können.

Lp.

J. Petersen. Lehrbuch der Stereometrie. Deutsch von Fischer-Benzon. Kopenhagen. Höst u. Sohn.

Der Verfasser geht im ersten Capitel von dem geometrischen Orte für alle Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernung haben, aus und entwickelt dann möglichst kurz die auf die Lage von geraden Linien, Ebenen und Kugeln bezüglichen Wahrheiten. Dann folgt die Behandlung der Polyeder, Cylinder,

Kegel und Kugeln, welche letzteren drei Körper der Verfasser „rund" nennt. Hiergegen möchte der Referent den Wunsch aussprechen, dass man den Ausdruck krumm und rund für Linien aufspare, und nicht-ebene Flächen „gewölbt" nenne. Das dritte Capitel behandelt die Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit, das vierte die Inhaltsberechnung der Oberflächen, das fünfte die Berechnung der Volumina und endlich das sechste Capitel die Kegelschnitte, deren Eigenschaften aus der bekannten Figur abgeleitet werden, welche aus einem schief geschnittenen Kegel und zwei Kugeln besteht, deren jede den Mantel des Kegels und die Schnittebene berührt. Scht.

C. Gusserow. Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie mit den Elementen der Projectionslehre. Berlin. J. Springer.

Dieses Buch enthält in sehr kurzer Darstellung die Grundlehren der Stereometrie nebst der Einführung und Verwendung der Projectionslehre. Für die Inhaltsermittelung der Körper ist der Cavalieri'sche Satz benutzt, von welchem ein Beweis gegeben wird; ausserdem ist in einem Anhange das Pyramidenproblem in neuer Fassung und Lösung dargestellt. Die Körperberechnung ist reichhaltig; es ist auch eine ausführliche Behandlung des Schwerpunktes und der Guldin'schen Regel gegeben. Ein begabter und fleissiger Schüler wird jedenfalls viel Nutzen aus diesem Buche ziehen; aber für die grosse Mehrzahl dürfte es etwas schwierig sein. Eine gute Ausstattung dient dem Buche zur Empfehlung. M

Wrobel. Leitfaden der Stereometrie nebst 134 Ueb aufgaben. Rostock. Wilh. Werther.

Das vorliegende Buch behandelt die Stereometrie in gedrä Kürze und doch vollständig genug, so den Bedürfn eines Gymnasiums und einer Realschule ragen v

Das Buch ist sowohl wegen seines Inhaltes, als auch wegen seiner Ausstattung zu empfehlen. Mz.

F. Reidt. Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2. T. Stereometrie. 3. Aufl. Leipzig. Teubner.

de Tilly. Sur les constructions dans le plan et dans l'espace avec la droite seule. Mathesis V. 124-127

Der Verfasser nimmt an, man könne eine Gerade durch zwei Punkte legen und auf einer gegebenen Geraden eine gegebene Strecke abtragen. Danach löst er folgende Grundaufgaben: Durch einen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen; einen Winkel zu hälften; zu einer Geraden durch einen Punkt ausserhalb derselben oder auf ihr die Senkrechte zu ziehen (in einer Ebene, die durch die Gerade und einen Punkt ausser ihr bestimmt ist). Eine Strecke in Teile zu zerlegen, die gegebenen Längen proportional sind. In einer gegebenen Lage eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen Figur congruent oder ähnlich ist. Von einem Punkte auf eine durch eine Gerade und einen Punkt bestimmte Ebene die Senkrechte zu fällen. Schnitt einer Geraden oder einer Ebene mit einer anderen Ebene

Mn. (Lp.)

Gellenthin. Ueber einige Eigenschaften des Tetraeders. Hoppe Arch. (2) III. 52-74

Der Herr Verfasser behandelt in diesem Aufsatz die Fragen, die sich bei der Untersuchung der Höhen eines Tetraeders, sowie der kürzesten Linien zwischen ihren Gegenkanten ergeben. Er erinnert an die bekannten von Steiner über die Tetraederhöhen gegebenen Sätze und giebt einen ausführlichen Beweis derselben. Nachher werden die kürzesten Linien zwischen je 2 Gegenkanten (Zwischenlote genannt) genauer betrachtet. Wenn sich nun die

4 Tetraederhöhen in demselben Punkte schneiden, so gehen durch diesen Punkt auch die drei Zwischenlote. Es entsteht aber die Frage, ob die drei Zwischenlote auch in anderen Fällen durch denselben Punkt gehen oder nicht; und dies wird nach analytischer Methode untersucht. Nennt man die Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenkanten Mittellinien, so hat man folgende drei Fälle, in denen die Zwischenlote durch denselben Punkt gehen:

1) Die Winkel zwischen je 2 Mittellinien sind rechte, die Längen der letzteren sind beliebig.

2) 2 Mittellinien sind gleich lang, ihr Winkel beliebig, die dritte beliebig lang und auf beiden senkrecht.

3) Alle drei Mittellinien sind gleich lang, die Winkel zwischen ihnen beliebig. In diesem Falle gehen auch die Tetraederhöhen durch ebendenselben Punkt, wie die Zwischenlote.

Es folgen dann noch einige hierher gehörende Sätze.

Mz.

J. Neuberg. Mémoire sur le tétraèdre. Mathesis V. Suppl. I. 1-72.

Diese Arbeit ist als Sonderabdruck 1884 erschienen; als Supplement zur Mathesis ist sie im Februar 1885 beigegeben; endlich macht sie einen Teil vom Bande XXXVII der Belg. Mém. in 8° aus. Der Verfasser hatte sich zuerst vorgenommen, die Eigenschaften der Lemoine'schen und Brocard'schen Punkte und Kreise auf das Tetraeder auszudehnen. Diese Forschung hat ihn dann zur Vertiefung gewisser wenig verbreiteter Begriffe geführt und ihm eine grosse Zahl mehr oder w[illegible] merkwürdiger Lehrsätze verschafft.

Nach Vorausschickung einiger allgemeiner Ent[illegible] über die „conjugirten isogonalen" oder „conjugirten [illegible] Punkte hinsichtlich eines Bezugsdreiecks oder Tetraed[illegible] paare, deren normale oder baryeentrische Coordinaten [illegible] Form $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ [illegible] ermittelt Hr. N[illegible]

den Punkt L, für den die Summe der Quadrate der Abstände von den Flächen des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ ein Minimum ist. Diese Abstände sind den Inhalten der bezüglichen Flächen proportional; die durch eine Kante und den Punkt L gelegte Ebene teilt die Gegenkante in zwei Segmente, welche den Quadraten der durch die erstere Kante gehenden Seitenflächen proportional sind; der Punkt L und der Schwerpunkt G des Tetraeders sind die Brennpunkte eines Umdrehungsellipsoids, das dem Tetraeder einbeschrieben ist; die Projectionen L_1, L_2, L_3, L_4 und G_1, G_2, G_3, G_4 von L und G auf die Flächen liegen auf ein und derselben Kugel, die Ebene $L_1L_2L_3$ ist senkrecht zur Geraden A_4G_4; L ist das Centrum der mittleren Entfernungen der Punkte L_1, L_2, L_3, L_4. Diese Eigenschaft bleibt auch für den Punkt kleinster Summe der Quadrate der Abstände von n gegebenen Ebenen bestehen. Dieser Punkt L besitzt also einen Teil der Eigenschaften des Lemoine'schen oder Grebe'schen Punktes.

Als das Analogon des Ceva'schen Satzes kann man den folgenden ansehen: Es seien Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 vier Punkte in den Seitenflächen eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ und q_1, q_2, q_3 die Schnittpunkte der Geraden A_4Q_1, A_4Q_2, A_4Q_3 mit den Kanten A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Wenn die Geraden $A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4$ hyperboloidisch sind (vier Erzeugende derselben Schar eines Hyperboloids), so treffen sich die Geraden A_1q_1, A_2q_2, A_3q_3 in demselben Punkte und es ist:

$$\frac{q_1A_2}{q_1A_3}\cdot\frac{q_2A_3}{q_2A_1}\cdot\frac{q_3A_1}{q_3A_2} = -1,$$

und eine ähnliche Beziehung findet in jeder der andern Ecken des Tetraeders statt. Die Umkehrung ist ebenfalls richtig. Vermittelst dieses Theorems findet man unmittelbar die folgenden hyperboloidischen Quadrupel: die Höhen, die Verbindungslinien der Ecken $A_1, A_2, \ldots$ mit den Mittelpunkten der Inkreise der Gegendreiecke, oder mit den Lemoine'schen Punkten dieser Dreiecke, oder mit den Berührungspunkten der Gegenflächen und der In- oder Ankugel. Die Berührungspunkte einer Fläche mit den acht eingeschriebenen Kugeln sind paarweise conj isogonal bezüglich dieser Fläche. Ein Steiner'scher Satz

wie folgt verallgemeinert werden: Wenn die von den Ecken eines Tetraeders T auf die homologen Flächen eines Tetraeders T' gefällten Lote hyperboloidisch sind, so besitzen die von den Ecken von T' auf die entsprechenden Flächen von T gefällten Lote dieselbe Eigenschaft.

Die hyperboloidischen Quadrupel verwandeln sich in vier zusammenlaufende Gerade, wenn zwischen den Elementen des Tetraeders gewisse Beziehungen bestehen. Herr Neuberg hat Veranlassung genommen, zwei besondere Tetraeder zu untersuchen, die er bezw. „isodynamisch" und „isogon" nennt.

Man setze $A_2A_3 = a_1$, $A_3A_1 = a_2$, $A_1A_2 = a_3$, $A_4A_1 = a_4$, $A_4A_2 = a_5$, $A_4A_3 = a_6$ und gebrauche dieselben Buchstaben für die entsprechenden Flächenwinkel. Ferner seien O der Mittelpunkt der Umkugel des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, I der Mittelpunkt der Inkugel mit den Berührungspunkten I_1, I_2, I_3, I_4; $B_1B_2B_3B_4$ das durch die Berührungsebenen der Kugel O in A_1, A_2, A_3, A_4 gebildete Tetraeder. Endlich mögen „antiparallele Schnitte" von $A_1A_2A_3A_4$ die Schnitte einer dreiseitigen Ecke dieses Körpers durch eine zur entsprechenden Ebene von $B_1B_2B_3B_4$ parallel gelegte Ebene heissen. Das durch die Beziehungen:

$$a_1a_4 = a_2a_5 = a_3a_6 \quad \text{oder} \quad \sin\alpha_1\sin\alpha_4 = \sin\alpha_2\sin\alpha_5 = \sin\alpha_3\sin\alpha_6$$

definirte isodynamische Tetraeder hat zahlreiche Eigenschaften: 1) Die antiparallelen Schnitte sind gleichseitige Dreiecke. 2) Die Geraden, welche eine Ecke mit dem Mittelpunkte des Inkreises der Gegenfläche verbinden, gehen durch einen und denselben Punkt. 3) Die Geraden $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ gehen durch die Centra der entsprechenden antiparallelen Schnitte, durch die Lemoine'schen Punkte der Seitenfläc[illegible] [illegible]eiden sich in einem und denselben Punkte K (dem Le[illegible] [illegible] Punkte des Tetraeders). 4) Die Normal-Coordinaten [illegible] [illegible]ten der Umkreise der Seitenflächen propo[illegible] [illegible] ein in Bezug auf K mit $A_1A_2A_3A_4$ co[illegible] [illegible] die Kanten jedes dieser Tetraede[illegible] [illegible] in zwölf Punkten [illegible] [illegible] Kugel einbesch[illegible] [illegible]selbe[illegible]

ein in Bezug auf K mit $B_1 B_2 B_3 B_4$ collineares Tetraeder, so schneiden die Flächen dieses Tetraeders die dreiseitigen Ecken von $A_1 A_2 A_3 A_4$ in vier gleichseitigen Dreiecken, die einer und derselben Kugel einbeschrieben sind. 7) Es giebt zwei Punkte (isodynamische Centra des Tetraeders), die, als Inversionspole gewählt, dazu dienen, das isodynamische Tetraeder in ein regelmässiges zu verwandeln, und jeder dieser Punkte ist die Ecke eines isodynamischen Tetraeders über je einer der Flächen von $A_1 A_2 A_3 A_4$.

Ein isogones Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ ist dasjenige, in welchem die Verbindungsgeraden einer Ecke mit dem Berührungspunkte zwischen der Gegenfläche und der Inkugel durch einen und denselben Punkt gehen. Bei einem solchen Tetraeder hat man:

$$\cos\tfrac{1}{2}a_1 \cos\tfrac{1}{2}a_4 = \cos\tfrac{1}{2}a_2 \cos\tfrac{1}{2}a_5 = \cos\tfrac{1}{2}a_3 \cos\tfrac{1}{2}a_6,$$

$$I\,A_1 A_2 . I\,A_3 A_4 = I\,A_1 A_3 . I\,A_2 A_4 = I\,A_1 A_4 . I\,A_2 A_3,$$

$$I_4 A_1 A_2 . I_1 A_3 A_4 = I_4 A_1 A_3 . I_1 A_2 A_4 = I_4 A_1 A_4 . I_1 A_2 A_3,$$

und die Winkel $A_1 I_4 A_2$, $A_2 I_4 A_3$, $A_3 I_4 A_1$, ... sind je 120°. Wenn die Basis $A_1 A_2 A_3$ fest ist, so bewegt sich der Punkt A_4 auf einer Hyperbel.

Die Verallgemeinerung gewisser Eigenschaften des isodynamischen Tetraeders führt zum „involutorischen" Tetraeder, das durch die Beziehung charakterisirt wird:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1^2 + a_4^2 & a_1^2 a_4^2 \\ 1 & a_2^2 + a_5^2 & a_2^2 a_5^2 \\ 1 & a_3^2 + a_6^2 & a_3^2 a_6^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die in den Mitten der Kanten des involutorischen Tetraeders errichteten Perpendicularebenen treffen die Gegenkanten $a_1, a_2, \ldots$ in sechs Punkten $v_1, v_2, \ldots$, die in ein und derselben Ebene liegen (der Involutionsebene). Die Kugeln mit den Mittelpunkten $v_1, v_2, \ldots$, welche durch die Endpunkte der Gegenkanten $a_4, a_5, \ldots$ gehen, schneiden sich in zwei Punkten A_5, A_5' (den Involutionscentren), die auf dem vom Punkte O auf die Involutionsebene gefällten Lote liegen. Das durch die Höhen von $A_1 A_2 A_3 A_4$ bestimmte Hyperboloid geht durch O. Wenn die Basis $A_1 A_2 A_3$ fest ist, beschreibt die Ecke A_4 des involutorischen Tetraeders eine merkwürdige Fläche dritter Ordnung. Das ebene involutorische, durch die Gleichung

(1) charakterisirte Viereck besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, dass die Verbindungsgeraden je einer Ecke mit dem Mittelpunkte des Umkreises für die anderen drei Punkte durch einen und denselben Punkt gehen.

Berichtigungen. Der Verfasser bittet uns um die Aufnahme einiger von der Eile der Abfassung herrührender Versehen. S. 7 Zeile 15 zu lesen: G est le centre de projection pour $E_1 E_2 E_3$ et $F_1 F_2 F_3$. S. 13, Zeile 15 und 16 zu lesen:

$$A(\delta_4\delta_1 \pm \delta_2\delta_3) + B(\delta_4\delta_2 \pm \delta_3\delta_1) + \cdots .$$

Cette surface passe par les points I_1, I_2, I_3, I_4 ou par I et les centres des sphères exinscrites. S. 13, Zeile 24 zu lesen: $\delta_4\delta_1 \pm \delta_2\delta_3$, u. s. w. S. 15, Zeile 5 zu lesen: $A(\mu_4\mu_1 \pm \mu_2\mu_3) + \cdots$. S. 50, § 44 das dritte Alinea zu streichen und im zweiten Alinea die Worte „division harmonique" zu ersetzen durch „division suivant le rapport anharmonique 3" und die Worte „milieu de la hauteur" durch „tiers de la hauteur". Mn. (Lp.)

J. Neuberg. Sur les tétraèdres de Möbius. Liège Mém. (2) XI. 14 S.

In Mathesis IV. 1884. p. 221-222 besprochen. Zwei Möbius'sche Tetraeder sind solche, dass jedes zugleich dem anderen ein- und umbeschrieben ist. Der Verfasser stellt synthetisch die Grundeigenschaften dieser Tetraeder auf und löst insbesondere die Aufgabe: Auf vier gegebenen Geraden die Ecken zweier Möbius'schen Tetraeder zu finden. Mn. (Lp.)

Halsted. Volume d'un prismatoïd[illegible]

Sehr einfacher Beweis des auch [illegible] Satzes (Werke II. 312-320): Das Volumen [illegible] als Basisflächen zwei parallele Polygone B [illegible] schnitt β hat, als Höhe h, [illegible]

Lucke. Ueber Heinze's Behandlungsweise der geschlossenen stereometrischen Gebilde. Hoffmann Z. XVI. 1-16.

In diesem Vortrag, welchen der Herr Verfasser in der Section für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der Schulmännerversammlung zu Dessau im October 1884 gehalten hat, wird die Art, in welcher Heinze die Stereometrie behandelte, in ihren Grundzügen dargelegt. Hiernach werden sämtliche elementar-geometrischen Körper aus einem allgemeinen (Centralkörper) abgeleitet, und nach ein und derselben Formel, der Simpson'schen, berechnet.

Ein anderes wesentliches Moment von Heinze's Behandlungsweise ist die Einführung der Drehung einer Grundfläche. Dadurch werden die bisher starren Körper in Bewegung gesetzt, neue interessante Körper erzeugt, welche für jeden beliebigen Drehungswinkel nach demselben Gesetz discutirt werden können. Der vorerwähnte Centralkörper hat zwei parallele ebene Grundflächen; jeder Eckpunkt der einen Grundfläche ist entweder nur mit dem correspondirenden Eckpunkt der andern oder mit dem correspondirenden und mit einem, etwa dem rechts benachbarten, verbunden. Die Seitenflächen entstehen dadurch, dass sich an je 2 benachbarten Seitenkanten Gerade parallel den Grundflächen fortbewegen. Dabei sind die Seitenkanten entweder gerade Linien oder Kegelschnitte, insbesondere Kreisbogen; auch können Fälle eintreten, dass die Grundflächen verschwindend klein und zwar entweder gerade Linien oder Punkte werden. Mz.

R. Heger. Der Doppelpunkt symmetrischer räumlicher Systeme. Schlömilch Z. XXX. 215-248.

Für den schon von Magnus und Baltzer abgeleiteten Satz, dass der Schnittpunkt der normalhalbirenden Ebenen der Strecken, welche entsprechende Ecken zweier in verschiedenen Ebenen liegenden congruenten Dreiecke verbinden, mit diesen Dreiecken zwei Tetraeder bestimmt, die im allgemeinen symmetrisch, nicht congruent sind, wird ein neuer Beweis beigebracht, für den der

Herr Verfasser eine besondere Einfachheit des Gedankengangs in Anspruch nimmt. Rdt.

E. Hénard. Sur les seize réseaux des plans de l'icosaèdre régulier convexe. C. R. CI. 232-235.

E. Barbier. Observations à propos de la Note récente de M. E. Hénard sur les seize résaux des plans de l'icosaèdre régulier convexe. C. R. CI. 394.

Schon Cauchy hatte in seiner Schrift über die regulären Polyeder (Journal de l'École Polyt., tome XI) gezeigt, dass man durch Verlängerung der Kanten und Flächen eines regulären Polyeders zu regulären Polyedern höherer Art gelangen kann. Dann hatte Herr Barbier (C. R. XV.) auf solche Weise aus dem regulären Dodekaeder die drei Poinsot'schen Stern-Dodekaeder erhalten und darauf hingewiesen, dass man sieben aufeinanderfolgende Netze aus dem regulären Ikosaeder erhalten kann. In der vorliegenden Abhandlung gewinnt der Verfasser deren acht und illustrirt dieselben durch anschauliche Zeichnungen. Herr Barbier bemerkt dazu, dass ihm diese Gebilde bekannt seien, und fügt einige Eigenschaften derselben hinzu. Scht.

E. Barbier. Tableau des principaux éléments des dix figures polyédriques régulières. C. R. CI. 562-565.

Der Verfasser giebt einen orientirenden Ueberblick über die Begriffe, den Zusammenhang und die Eigenschaften der zehn polyedrischen Figuren. Zu diesen gehören die Oberflächen-Netze erstens der fünf regulären (platonischen) Körper und zweitens von fünf Stern-Polyedern mit zwölf oder dreissig Kanten. Scht.

C. Crone. Om Euler's Sätning om Pol[illegible]
Zeuthen T. [illegible] III. 44-47.

Bezeichnet man für ein Polyeder die Anzahl der Flächen, Ecken und Kanten bzhw. durch f, h und k, ferner durch s und t die Anzahl der Querschnitte, welche erforderlich sind, um bzhw. die mehrfach zusammenhängenden Seitenflächen und die ganze Oberfläche in einfach zusammenhängende zu verwandeln, so ist ganz allgemein:

$$f+h-k = 2+s-t.$$

Für $s = t = 0$ hat man den bekannten Polyedersatz von Euler.

Gm.

R. E. Allardice. Radical axes in spherical geometry. Edinb. M. S. Proc. III. 59-61.

Diese Notiz erörtert die Ableitung einer Figur aus einer anderen durch eine Ausdehnung der Methode der Ableitung des Polardreiecks aus einem gegebenen. Gbs. (Lp.)

Dallas. Note on projection applied to problems and to solid geometry. Quart. J. XXI. 89-91.

Der Herr Verfasser giebt einige Projectionsmethoden an, durch welche ein Kreis in einen Kegelschnitt, und analog im Raum eine Kugel in eine andere Fläche zweiten Grades transformirt wird, und zeigt dann, wie gewisse Sätze, deren Richtigkeit beim Kreise und auch bei der Kugel sofort einleuchtet, sich auf sehr einfache Weise auf die transformirten Figuren übertragen lassen. Bei der einen Projectionsart gehen von den Punkten eines Kreises parallele Gerade (irgend einer Richtung) bis zu einer festen Geraden hin, und werden diese Parallelen in demselben Verhältnis geteilt; bei der andern gehen von den Punkten eines Kreises Linien nach einer festen Geraden, die alle durch denselben Punkt P gehen, und wird auf allen diesen Linien dasselbe anharmonische Verhältnis abgetragen. Analog ist es im Raum. Mz.

UTH. Die Ellipse als orthogonale Projection des Kreises. Pr Realgymn. Wiesbaden 29 S. 4°.

Zusammenstellung der aus dieser Betrachtung unmittelbar folgenden Sätze, ohne Bezugnahme auf die allgemeinere Verwandtschaft der Affinität. Lp.

ANONYME. Composition mathématique. Nouv. Ann. (3) IV. 345-350.

In diesem Aufsatz werden einige Aufgaben, welche die Ellipse betreffen, auf geometrische Weise gelöst.

Durch die beiden Brennpunkte einer Ellipse sei eine veränderliche Kreislinie gelegt, dann wird gefragt:

I. Welcher Bedingung muss die Ellipse genügen, damit der Kreis sie in vier reellen Punkten trifft, und welche Punkte der kleinen Axe können Mittelpunkte solcher Kreise sein?

Lösung: $b < c$, ferner hat das Stück der kleinen Axe, welches die Kreismittelpunkte enthält, die Länge: $\frac{c^2-b^2}{b}$.

II. In jedem der vier Durchschnitte von Kreis und Ellipse zieht man an letztere die Tangenten; diese bilden ein Viereck. Welches ist der Ort der Scheitel dieses Vierecks, wenn der Kreis sich ändert?

Lösung: Eine Hyperbel.

III. Welches ist der Ort des Durchschnitts der Seiten dieses Vierecks mit denen eines andern Vierecks, das zum ersten symmetrisch in Bezug auf das Ellipsencentrum liegt?

Lösung: Ein Kreis.

IV. Man betrachtet die dem variabeln Kreise und der Ellipse gemeinsamen Tangenten. Welches ist der Ort ihrer Berührungspunkte mit dem Kreise?

Lösung: Zwei gerade Linien; nämlich die Tangenten in den Endpunkten der kleinen Axe. Mz.

Anonyme. Note de Géométrie. Nouv. Ann. (3) IV. 105-108.

Der Herr Verfasser beweist einen von Chasles im Jahre 1851 aufgestellten Satz, nämlich:

Sind *O* und *o* zwei Kreise, die sich nicht berühren, also entweder sich reell oder imaginär schneiden, und zieht man von jedem Punkte *M* des Kreises *O* Linien nach den Aehnlichkeitspunkten der beiden Kreise, so treffen diese beiden Linien den Kreis *o* in vier Punkten, von welchen zwei auf einem Durchmesser des Kreises *o*, und die beiden andern auf einer Geraden liegen, die einen festen Punkt enthält, welches auch der auf *O* angenommene Punkt *M* sei.

Die letztere Behauptung weist der Herr Verfasser mit Hülfe einer räumlichen Betrachtung nach, wo an die Stelle der Kreise *O* und *o* zwei Kreise, die auf derselben Kugel sind, und an die Stelle der Aehnlichkeitspunkte die Spitzen der beiden Kegel treten, die man durch diese Kreise legen kann.

Dies giebt Anlass zu einer eigentümlichen Behandlung der Aufgabe, einen Kreis zu construiren, der drei gegebene berührt; es wird nämlich zuerst die gleiche Aufgabe für drei auf einer und derselben Kugel liegende Kreise gelöst; und dann diese Lösung auf die Ebene übertragen.

Zum Schluss wird noch die Aufgabe behandelt, eine Kugel zu finden, welche vier gegebene berührt. Mz.

A. Perroni. Di un problema relativo alla sfera. Giornale della società di letture e conversazioni scientifiche di Genova 1° sem. 94-97.

Die Anzahl der materiellen congruenten Kugeln zu bestimmen, die man mit einer den vorigen gleichen Kugel zur Berührung bringen kann. La. (Lp.)

E. Holst. Sätninger om Cirkler i et Plan med Anvendelse paa den Dupinske Cyklide. Christiania Forh. 1885. No 15, p 1-1.

Sind A, B, C, D vier Punkte eines Kreises, so besteht nach dem Ptolemäischen Satze die Relation

$$AB.CD \pm BC.AD \pm CA.BD = 0$$

Sind nun $(A), (B), (C), (D)$ vier Kreise, welche den vorgelegten in den Punkten A, B, C und D berühren, so lassen sich, indem etwa mit $A(B)$ die Länge der Tangente vom Punkte A zum Kreise (B), ferner mit $(A)(B)$ die Länge der gemeinsamen Tangente der Kreise (A) und (B) bezeichnet werden, eine Reihe analoger Sätze aufstellen. Unter ihnen mögen hier nur die beiden folgenden Platz finden:

$$(A)B.CD \pm BC.(A)D \pm C(A).BD = 0,$$
$$(A)(B).(C)(D) \pm (B)(C).(A)(D) \pm (C)(A).(B)(D) = 0.$$

Sind $(A), (B), (C)$ drei Kugeln und P ein variabler Punkt, so bestimmt die Gleichung

$$(A)(B).(C)P \pm (B)(C).(A)P \pm (C)(A).(B)P = 0$$

vier Dupin'sche Cykliden. L.

A. Jeřábek. Ueber den Satz von Lehmus. Čas. XIV. 20. (Böhmisch.)

Enthält eine Discussion und fünf Beweise unter Bezugnahme auf Hauber's Satz, welche namentlich in formaler Beziehung erschöpfend sind. Std.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

W. Fiedler. Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Dritte erweiterte Aufl. II. Teil. Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. Leipzig. Teubner. XXX u. 560 Seiten.

Der vorliegende II. Teil des ausgezeichneten Handbuches, dessen Anlage jedem Fachmann bekannt sein dürfte, hat zahlreiche und ausgedehnte Erweiterungen erfahren. Die Seitenzahl ist von 283 auf 544 gestiegen. Die Textfiguren sind um 32, die Tafeln um 4 vermehrt worden. Als wichtigste und wertvollste Neuerungen mögen folgende hervorgehoben werden:

Im ersten Abschnitt (Curven und entwickelbare Flächen) werden zunächst die regelmässigen Singularitäten der Raumcurven eingehender behandelt und zu den Singularitäten ihrer Projectionen in Beziehung gesetzt. Hierauf werden die Operationen der Abwickelung, der Construction des Richtungskegels und der Rectification in ihrer dualistischen Natur klargelegt. Die Darstellung der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung ist constructiv vervollständigt. Namentlich aber hat die Behandlung der Durchdringung zweier Kegelflächen zweiter Ordnung mit ihrer wichtigen Bedeutung für die Curven vierter und dritter Ordnung wertvolle Erweiterungen in theoretischer wie constructiver Beziehung erfahren.

Im zweiten Abschnitt (krumme Flächen, insbesondere Flächen zweiten Grades) ist zunächst den allgemeinen Erörterungen eine Betrachtung der topographischen Flächen ($z = f(x, y)$) zugefügt worden. Bei den Flächen zweiter Ordnung haben die Netzhyperboloide Aufnahme gefunden mit ihren schönen cyklographischen Anwendungen auf die Theorie der Kegelschnitte, wie sie aus des Verfassers Abhandlung in den Acta Math. V. (s. F. d. M. XVI. 1884. 521) bekannt sind. Im Anschluss hieran wurde weiter eingefügt die Theorie der linearen Kugelsysteme, der Transformation durch reciproke Radien, der sphärischen Geometrie in Verbindung mit der stereographischen Projection. Die Betrachtung der Durchdringung und der gemeinsamen Developpablen zweier Flächen zweiter Ordnung hat mehrfache Bereicherungen erfahren, u. a. durch die Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten.

Im dritten Abschnitt (Familien der technisch wichtigsten Flächen) ist bei den windschiefen Regelflächen das orthogonale Cylindroid hinzugefügt. Die Betrachtung der Rotationsflächen ist mit derjenigen der Schraubungsflächen verbunden und mehrfach

erweitert worden. In einer Schlussbetrachtung wird die Schraubung als allgemeinste Bewegung vorgeführt, und die Bedeutung der Transformation durch reciproke Radien ins Licht gesetzt, wobei noch die Dupin'sche Cyklide zur Besprechung gelangt.

Vorstehend sind nur die wichtigsten Erweiterungen hervorgehoben. Betreffs der übrigen Bereicherungen sei namentlich auf die bedeutend vermehrten Uebungsbeispiele hingewiesen, in welche vielfach wertvolle theoretische Erörterungen eingeflochten sind.

Hk.

G. A. v. Peschka. Darstellende und projective Geometrie. IV. Band. Mit einem Atlas von 30 Tafeln. Wien. Carl Gerold's Sohn. XIV u. 666 S.

Der IV. und letzte Band dieses hervorragenden Werkes behandelt die höheren windschiefen Flächen, die Rotationsflächen, die Umhüllungsflächen und die Schraubenflächen, und schliesst mit einem Anhang ab, welcher die Schatten- und Beleuchtungsconstructionen enthält.

In dem Abschnitt über windschiefe Flächen werden nach Darlegung der allgemeinen, auf die windschiefen Flächenelemente bezüglichen Eigenschaften näher betrachtet: die Regelflächen dritter Ordnung, die Conoide, die Normalenflächen und die technisch wichtigsten Formen von Regelflächen vierter Ordnung. Dabei enthalten namentlich die Capitel über die Normalenflächen, von welchen diejenigen der Flächen zweiter Ordnung längs ebenen Schnitten eine specielle Betrachtung erfahren, vieles Eigenartige. Auch in den andern Capiteln dieses Abschnittes hat Referent manches ihm Neue gefunden.

Die den Rotationsflächen und den Umhüllungsflächen gewidmeten Abschnitte führen die theoretischen und constructiven Betrachtungen unter Zugrundelegung einer allgemeinen Form der Erzeugenden durch. Eine anregende Specialbehandlung erfährt die Ringfläche, aufgefasst als Rotationsfläche, Umhüllungsfläche und Cyklide.

Im vierten Abschnitt wird zunächst die Schraubenlinie vorgeführt, an welche sich die Betrachtung der allgemeinen Schraubenflächen anschliesst. Von diesen finden dann eine eingehendere Besprechung die entwickelbare, die axiale schiefwinklige und die axiale rechtwinklige Schraubenfläche.

Der der Schattenlehre und Beleuchtungslehre gewidmete Anhang beginnt mit einer allgemeinen Erörterung der Voraussetzungen, welche dieser Lehre in der Regel zu Grunde gelegt werden, und behandelt sodann die Bestimmung der Selbst- und Schlagschatten von ebenflächig begrenzten Objecten und von den den wichtigsten Flächenfamilien angehörigen krummen Flächen, mit Ausführung an einer grossen Anzahl von Beispielen in Grund- und Aufriss, Parallelperspective und Centralperspective. Den Schluss bildet die Ausmittelung der Beleuchtungsintensitäten von ebenflächigen Objecten und die Construction der Isophoten für die wichtigsten Flächen in Parallelprojection, unter Zugrundelegung des einfachen Cosinus-Gesetzes ohne Glanzpunkte.

In äusserer Beziehung zeigt die Darstellung, Anordnung und Ausstattung des Buches die schon aus den vorangehenden drei Bänden bekannten Vorzüge (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 513).

Es ist bei einem Werke von der Ausdehnung wie das mit dem vorliegenden Bande zum Abschluss gelangte wohl kaum denkbar, dass sich nicht da und dort in Text oder Figur kleine Versehen eingeschlichen haben, oder dass unter der grossen Zahl von lithographischen Figurentafeln sich nicht auch einzelne minder gelungene Figuren finden sollten. Ferner ist es wohl selbstverständlich, dass in einer Wissenschaft, die in so lebendig fortschreitender Entwickelung begriffen ist, wie es zur Zeit bei der Darstellenden Geometrie der Fall ist, wo sich die verschiedenartigsten Strömungen und Auffassungen auf die mannigfachste Weise durchkreuzen, es kaum möglich ist, betreffs der Auswahl und Anordnung des Stoffes jedem Standpunkt gerecht zu werden. Verfasser spricht sich hierüber in der Vorrede aus. Die Erreichung des von ihm angestrebten Zieles, durch sein Werk „seiner Wissenschaft zu nützen, das Interesse für dieselbe zu wecken und zu fördern, ihr den wünschenswerten Eingang in

weitere Kreise zu ermöglichen und zu weiterem intensiven Forschen und Schaffen anzuregen", dürfte ihm nach Ansicht des Referenten in ausgezeichneter Weise gelungen sein.

Hk.

N. S. Dino. Elementi di geometria projettiva. Napoli. Marano. XVI u. 269 S.

Dies Buch ist für die Studirenden aus den ersten Semestern an den italienischen Facultäten bestimmt, d. h. für solche, welche hauptsächlich die Theorie der neueren Geometrie zum Verständnisse der darstellenden Geometrie und der graphischen Statik brauchen. Demgemäss hat der Verfasser der Reihe nach alle Methoden angewandt, die von Nutzen sein dürften, und hat alle schwierigen Fragen fern gehalten, die nach seiner Ansicht nur für diejenigen Interesse haben, welche die Wissenschaft ihrer selbst wegen zu treiben beabsichtigen, selbst bei den Principienfragen, die er nicht hat vermeiden können (z. B. Einführung der Elemente im Unendlichen und der imaginären Elemente), hat er sich auf die Darlegung dessen beschränkt, was gewöhnlich für unumgänglich notwendig betrachtet wird. Dagegen hat er sich ausgebreitet über die projectivischen und metrischen Eigenschaften der projectivischen Verwandtschaften, der Kegelschnitte und der einfachsten Syteme, welche diese Curven bilden, und setzt dadurch den Leser in die Lage, das Studium der Oberflächen zweiten Grades zu unternehmen, denen er schon eine besondere Arbeit gewidmet hatte (s. F. d. M. XVI. 1884. 573).

Es ist hier nicht der Ort zu einer Erörterung darüber, ob es nützlicher für die Studirenden ist, so viele Lehrsätze zu lernen, so viele Aufgaben zu lösen, oder aber sich zu bemühen, eine gründliche Kenntnis gewisser schwieriger Begriffe zu erwerben, die zu gewichtigen Erörterungen Anlass gegeben haben. Demnach wollen wir uns auf die Versicherung beschränken, dass Herr Dino unter Benutzung der klassischen Werke über den Stoff (Chasles, Steiner, Cremona, Reye) sein gestecktes Ziel erreicht hat. Seine Darstellung ist klar und im allgemeinen zweck-

mässig, und wenn manches nicht völlig einwandsfrei ist, so muss man oft die Schuld in den Büchern suchen, bei denen der Verfasser sich Rat geholt hat.

Ich will z. B. bemerken, dass man nicht als strengen „Beweis" für die Existenz der Geraden im Unendlichen die Bemerkung ansehen kann, jede Gerade habe einen Punkt im Unendlichen (p. 2); dass die Relationen zwischen den Winkeln eines Büschels nicht Gleichheiten, sondern Congruenzen sind (p. 17); dass die Unterscheidung zwischen congruenten Strahlenbüscheln von gleichem und entgegengesetztem Sinne nur dann von Bedeutung ist, wenn beide Büschel einer und derselben Ebene angehören; endlich dass die rein synthetische Theorie der Projectivität von v. Staudt und nicht von Reye herrührt.

Von dem Theoreme: „Wenn bei zwei projectivischen Punktreihen zwei Punkte sich zweifach entsprechen, so ist dies bei allen andern der Fall", hat der Verfasser einen sehr langen Beweis gegeben, der sich auf die Betrachtungen der Doppelpunkte der Verwandtschaft stützt (p. 59-61). Wir vermögen nicht die Vorzüge desselben über den v. Staudt'schen einzusehen, den man in vier Zeilen abmachen kann (vgl. Geometrie der Lage p. 119).

Ferner will ich auch bemerken, dass es ausser den Collineationen, die besondere metrische Eigenschaften haben, noch eine besondere giebt vom projectivischen Gesichtspunkte aus, nämlich diejenige, deren Centrum auf der Axe liegt. Nach dem gewöhnlichen Gebrauche spricht der Verfasser nicht von ihr; dennoch scheint sie uns der Beachtung wert, weil in diesem Fall die von Chasles gegebene metrische Definition nicht mehr brauchbar ist, während man sich der von Poncelet gegebenen noch bedienen kann.

Manche Leser könnten Herrn Dino die Bemerkung machen, er habe etwas zu sehr die Geometrie des Raumes vernachlässigt; dafür kann man jedoch eine Entschuldigung darin finden, dass auf unseren Universitäten dieser Teil der projectiven Geometrie sehr oft in den Vorlesungen über die darstellende Geometrie vorgetragen wird, und dieser Disciplin wird

der Verfasser vielleicht (vergl. p. 241) ein besonderes Buch widmen. La. (Lp.)

L. Delaistre. Cours complet de dessin linéaire, gradué et progressif, contenant la géométrie pratique, élémentaire et descriptive etc. Paris. Gauthier-Villars

---

M. Breithof. Guide pratique du dessinateur. Graphique linéaire. Principe du lavis. Principe du dessin technique. Paris. Gauthier-Villars.

V. Murer. Primi elementi di geometria projettiva e descrittiva ad uso degl' istituti tecnici del regno. Torino. Paravia.

M. Borgatti e B. Zanotti. Trattato elementare di geometria descrittiva. Torino. Bruno.

S. Vecchi. La teoria geometrica attuale delle restituzioni prospettive riveduta e corretta: Memoria sulle impressioni che producono le Prospettive ed i Bassorilievi quando venga a cambiare la posizione del punto da cui si guardano. Parma. 63 S. 4°.

R. J. Dallas. Notes of the method of ort[illegible] jection. Edinb. M. S. Proc. III. 115-118.

Diese Note soll die Aufmerksamkeit auf ge[illegible] gemeinerungen dieser Methode lenken, die nicht al[illegible] kannt zu sein scheinen. Gbs

M. d'Ocagne. Note sur les raccordements paraboliques. Mathesis V. 26-27

Zwei neue praktische Lösungen, die eine vermittelst des Brennpunktes, zum Zwecke eines fortlaufenden Zuges. Mn. (Lp.)

Barchanek. Construction der Linien zweiter Ordnung aus umschriebenen Vierecken. – Die darstellende Geometrie als Unterrichtsgegenstand an Realschulen. Wien. A. Pichler's Wwe. u. Sohn. Hk.

J. de Tilly. Sur une lacune qui semble exister au début de l'enseignement de la géométrie descriptive. Brux. S. sc. IX. B. 95-104, Mathesis V. Suppl. III 21-30

Entwickelung einer früheren Note (F. d. M. X. 1878. 409, 416). Man kann die Daten eines räumlichen Gegenstandes auf die Zeichenebene mittels folgender Principien übertragen: 1) Ein beliebiger Punkt einer Figur *O* projicirt sich auf eine durch drei Punkte *A*, *B*, *C* dieser Figur bestimmte Ebene im Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Sehnen dreier Kreise, die bez. *A*, *B*, *C* zu Mittelpunkten, *AO*, *BO*, *CO* zu Radien haben. Man kann ferner *O* auf eine zweite Ebene *ABD* projiciren, wo *D* auf der körperlichen Figur liegt; *D* auf *ABC* projiciren, und vermittelst des durch *D* und seine Projectionen auf *ABC* und auf *AB* gebildeten Dreiecks den räumlichen Winkel *CABD* finden. 2) Man kann auf einer räumlichen Figur so viel Punkte, wie man will, finden, die ein und derselben Ebene angehören, indem man aus zwei Punkten als Centren zwei sphärische Curven von gleichem Halbmesser mehrere Male beschreibt.

Der Verfasser löst verschiedene Fragen im Raume mit Zirkel und Lineal. Beispiele: 1) Auf einer Cylinder- oder Kegelfläche zweiten Grades durch einen gegebenen Punkt eine Erzeugende zu legen. 2) Die Axen und Scheitel eines Umdrehungs-Ellipsoids zu finden. Durch weitere Anwendung von Rechnung kann man die Axen und Scheitel eines beliebigen Ellipsoids finden.

Mn. (Lp.)

GRABERG. Die Zeichnung im Dienste der Naturwissenschaft und die Masszeichen insbesondere. Wolf Z. XXX. 403-404.

GRABERG. Ueber Masszeichen. Wolf Z. XXX. 55-76.

GRABERG. Der Massraum, eine Erweiterung des Massstabes. Wolf Z. XXXI. 339-357.

Die erstgenannte Notiz führt aus, dass nicht die Sprache und das Rechnen, sondern nur die Zeichnung den vollständigen Ausdruck menschlichen Vorstellens bilde, dass die letztere aber noch ihrer logischen Begründung entbehre. „Zeichen heisst der sinnlich wahrnehmbare Ausdruck unserer Vorstellungen.“ Zeichen, welche der Darstellung geometrischer Beziehungen dienen, heissen „Masszeichen.“ Dieselben gliedern sich in Massformen, Massorte, Massnetze. Letztere sind vom 1ten oder 2ten Grad, je nachdem ein Punkt der Zeichenebene nur einen Raumpunkt vorstellt oder in zweifachem Sinn gedeutet werden kann.

Die zweitgenannte Abhandlung bezweckt zu zeigen, „wie sich Masszeichen gleich anderen als erklärende, ordnende und kürzende Glieder dem sichtbaren Ausdruck räumlichen Denkens einfügen, ohne Gefährde für die Strenge abstracter Auffassung der Gestalten.“ In dieser Absicht werden räumliche Constructionen mit Punkten, Geraden und Ebenen durch deren Projectionen und Spuren in einer Zeichenebene ausgeführt, unter Zugrundelegung der hinreichenden Anzahl von Bestimmungselementen. Die gegenseitigen Lagenbeziehungen (vom Verfasser „Massverhältnisse“ genannt) werden durch eigenartige symbolische Buchstabenverbindungen formulirt.

Die letzte Abhandlung führt den „Massraum“ als [illegible] weiterung des Massstabes“ vor. „Wie nämlich der [illegible] die Grössenverhältnisse der Gegenstände in Längeneinl[illegible] sammenfasst, so fasst der Massraum die Weisen geg[illegible] Abhängigkeit von Lagen- und Grössenverhältnissen i[illegible] zeichen zusammen“. „Jede Stufenfolge geometrischer [illegible] diese letzteren als Masszeichen aufgefasst, stellt eine [illegible] rung des Massraumes dar.“ So w[illegible] ein Punkt

und ein Kreis um dessen Mittelpunkt als Masszeichen vorgeführt für die Kegelschnitte, welche die Punkte zu Brennpunkten oder den Durchmesser zur Axe haben; ein Rotationskegel dient als Masszeichen für seine ebenen Schnitte und die Rotationshyperboloide, welche seinen Erzeugungslinien parallel sind; u. s. w. Die Manier, in welcher die zu den zwei letzten Abhandlungen gehörigen Figuren gezeichnet sind, (Ueberhäufung mit übergrossen Punktringen) kann nicht zur Nachahmung empfohlen werden.

Hk.

F. A. Heissig. Grundzüge einer trimetrischen Projectionsmethode mit ihrer Anwendung auf das Entwerfen geometrischer Objecte vermittelst oder ohne eines Trimeters. 2[te] Ausg. Wien Spielhagen und Schurich. VIII u. 80 S.

Die Constructionen werden in orthogonaler Parallelperspective nach einem trimetrischen System, in Beziehung auf welches der Verfasser im Besitze eines „K. K. ausschliesslichen Privilegiums auf einen graphischen Trimeter" (axonometrisches Schiebdreieck) ist, ausgeführt und beziehen sich auf Prismen, Cylinder, Kegel, Umdrehungskörper, einfache Bau- und Maschinenteile, einschliesslich Schatten- und Beleuchtungsconstructionen. Hk.

Schur. Ueber den Pohlke'schen Satz. Klein Ann. XXV. 596-597.

Die Idee dieses hübschen und einfachen Beweises des Pohlke'schen Satzes beruht darauf, dass der Satz zunächst in projectivische Form gebracht wird, in welcher er folgendermassen gefasst werden kann:

„Vier gegebene Punkte A, B, C, O des Raumes lassen sich von einem gewissen Punkte S einer gegebenen Ebene ω stets so auf eine zu suchende Ebene ε projiciren, dass, wenn die vier Projectionen derselben vier gegebenen Punkten A', B', C', O' einer gegebenen Ebene ε' collinear gesetzt werden, gleichzeitig den beiden Schnittpunkten von ε' mit einem gegebenen (reellen oder imaginären) Kegelschnitte k^2 von ω die Schnittpunkte

von e mit demselben Kegelschnitte entsprechen; von den vier Punkten A', B', C', O' dürfen allerdings keine drei in einer Geraden liegen."

Der Beweis dieses Satzes wird gegeben und liefert zugleich die Mittel, die gesuchten Stücke des Pohlke'schen Satzes constructiv zu bestimmen. Hk.

GRABERG. Die Ortsfläche der Spitzen gleichseitiger Tetraëder zu gegebener Geraden der Zeichenebene. Schlomilch Z. XXX. 349-351.

Die Ortsfläche der Spitzen aller gleichseitigen Tetraëder, deren Grundflächen in der Zeichenebene liegen und eine in derselben gegebene Strecke zur Kante haben, wird erkannt als erzeugt durch lotrechte Ellipsen, deren Spuren eine Hyperbel umhüllen. Hk.

W. HANACEK. Aufgaben über ebenflächige Körper, deren Darstellung, ebene und gegenseitige Schnitte. Wien. A. Pichler's Wwe. u. Sohn.

Hk.

PROCHÁZKA. Ein Beitrag zur Schattenlehre. Hoppe Arch. (2) II. 101-103.

Die Tangenten an die Selbstschattengrenze der axialen schiefen Schraubenfläche bei Parallelbeleuchtung werden construirt, indem die Selbstschattengrenze als Schnittcurve [illegible] Hülfsflächen, nämlich eines einschaligen Hyperboloids [illegible] Rotationskegels aufgefasst wird.

K. SCHOBER. Ueber die Construction der Halbs[illegible] grenzen der Flächen zweiten Grades unter [illegible] setzung von Kugelbeleuchtung. [illegible] Pichler [illegible] u. Sohn.

Die Halbschattengrenzen einer von einer Kugel beleuchteten Fläche 2ter Ordnung werden gebildet von einer Raumcurve 4ter Ordnung, nach welcher die zwei Mäntel der gemeinschaftlichen Developpabeln der Kugel und der beleuchteten Fläche die letztere berühren. Im 1ten Abschnitt der Abhandlung werden zunächst die wichtigsten Eigenschaften der gemeinschaftlichen Developpabeln zweier Flächen 2ter Ordnung und ihrer wichtigsten Specialfälle besprochen. Im 2ten Abschnitt wird sodann eine Fläche als Kugel, die andere der Reihe nach als Kugel, Kegel, Cylinder, Rotationsfläche, allgemeine Fläche 2ter Ordnung angenommen, und wird die constructive Bestimmung der Halbschattengrenzen aus Punkten und Tangenten durchgeführt.

Hk.

J. v. Siegl. Schattenconstructionen an Umdrehungskörpern mit Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse im Architektur- und im kunstgewerblichen Fachzeichnen. Wien. Hölder

Das Schriftchen giebt praktische Constructionen der Selbstschatten und Schlagschatten von Umdrehungskörpern. Die Operationen bewegen sich nur im Aufriss; der Grundriss wird durch Umlegung von Parallelkreisen ersetzt. Durch zweckmässige Verwertung der auf die Hauptmeridianebene geworfenen Hülfsschattencurve werden die Schlagschatten auf Ebenen parallel zur Aufrissebene in einfacher Weise erhalten. Auf die Ermittelung der für die Curvenform charakteristischen Punkte und deren Tangentenrichtungen wird besonderes Gewicht gelegt. Dadurch ergeben sich die Schattencurven mit verhältnismässig geringem Aufwand von Constructionslinien. Hk.

C. Pelz. Bemerkung zur Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades. Wien. Ber. XCII. 410-415.

Chasles giebt in seinem „Aperçu historique" eine Lösung der Axenbestimmung eines Kegels zweiten Grades; auf diese

bezieht sich die Bemerkung des Verfassers, und sie ist veranlasst worden durch eine Abhandlung, welche Herr Solin in der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften über diesen Gegenstand veröffentlicht hat. Der Kegel sei gegeben durch eine in der Bildebene liegende elliptische Basis C, den Scheitel S und seine Höhe. Senkrecht zur Bildebene denke man eine Ebene längs der grossen Axe von C und in dieser eine Hyperbel C_1, welche die Scheitel von C zu Brennpunkten und die Brennpunkte von C zu Scheiteln hat, und bilde diese Hyperbel aus S als Centrum perspectivisch in C_2 ab. Die beiden Kegelschnitte haben ein gemeinsames Tripel, und dieses ist das Spurendreieck des gesuchten Axentripels. Die Durchführung dieser Construction mit Zirkel und Lineal bildet den Inhalt der Schrift.

Schn.

F. Procházka. Verallgemeinerung der stereographischen Projection der Flächen zweiten Grades. Cas. XIV. pag. 1. (Böhmisch.)

In jedem Punkte a einer Fläche zweiten Grades schneiden sich zwei reelle oder imaginäre Flächengerade P und Q, welche jede ebene Curve A dieser Fläche in zwei reellen oder imaginären Punkten schneidet. Wählt man den Punkt a zum Centrum der Central-Projection, eine beliebige Ebene zur Projectionsebene, dann projiciren sich die Geraden P und Q in zwei reellen oder imaginären Punkten, in welchen sich die Projectionen aller ebenen Curven der Fläche schneiden. Es bilden also solche Projectionen ein System von Curven zweiten Grades, welche zwei gemeinschaftliche Punkte besitzen.

Wenn die Projections-Ebene mit der Tangential-Ebene der Fläche zweiten Grades in dem Punkte a parallel ist, dann projiciren sich die Geraden P und Q in zwei (reellen oder imaginären) unendlich fernen Punkten, und darum sind Projectionen der ebenen Curven der Flächen ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte. Diese Art der Centralprojection, die man stereogr[illegible] nennt,

ist also nur ein specieller Fall der oben erwähnten Projection, die der Verfasser deshalb verallgemeinerte stereographische Projection nennt.

Unter Verwendung der Eigenschaften dieser Projection löst man mittels der darstellenden Geometrie manche Aufgaben der sogenannten neueren Geometrie, die sich auf Kegelschnitt-Systeme und Scharen beziehen. So wurde z. B. folgende Aufgabe gelöst:

In einer Ebene befinden sich zwei Kegelschnitte, von denen zwei Schnittpunkte gegeben sind. Es sollen die anderen zwei Schnittpunkte bestimmt werden, wenn die eine Curve vollkommen construirt erscheint und die andere durch drei weitere Punkte bestimmt ist.

Diese Aufgabe wurde auch für den Fall gelöst, wenn die gegebenen Schnittpunkte imaginär sind. Auch die speciellen Fälle der Berührung und Osculation der Curven wurden berücksichtigt. Aus der letzten Lösung wurde die Construction des Krümmungshalbmessers abgeleitet.

Alle nötigen Constructionen stimmen mit den Constructionen der neueren Geometrie vollkommen überein und erscheinen in manchen Stücken vereinfacht. Std.

Lebon. Réponse à la note de M. Rouché. S. M. F. Bull XIII. 206-207.

Zurückweisung eines von Rouché erhobenen Prioritätsanspruches betreffs der in den F. d. M. XVI. 1884. 530 besprochenen Construction Lebon's. Hk.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

G. Jung. Sopra una classe di configurazioni d'indice 3. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 231-238.

Die Configurationen von Punkten und Geraden einer Ebene, mit denen der Verfasser sich beschäftigt, sind reciprok zu einander und werden durch die Symbole dargestellt:

$$F_n \equiv (n-2, 3)\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}, \quad f_n \equiv (3, n-2)\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}};$$

eine F_n hat ihre Elemente, die mit Hülfe von n Zeigern $1, 2, \ldots, n$ dadurch dargestellt werden können, dass man bez. die Geraden durch die $\binom{n}{2}$ binären Combinationen und die Punkte durch die $\binom{n}{3}$ ternären Combinationen dieser Zeiger bezeichnet, derartig, dass ein Punkt und eine Gerade der Configuration incident sind, wenn unter den drei Zeigern des Punktes die zwei der Geraden enthalten sind; ähnlich für eine f_n. Das vornehmlichste Ziel dieser Note ist folgender Satz: Damit zwei einfache n-Ecke, von denen eins dem anderen einbeschrieben ist, so beschaffen sind, dass das Product der Verhältnisse der, auf jeder Seite des zweiten durch die in ihr liegende Ecke des ersten bestimmten Segmente der Einheit gleich sei, ist es notwendig hinreichend, dass die Seiten und Ecken der beiden Pol einer nämlichen F_{m+1} (mithin auch einer nämlichen f_{m+1}) hören. Nach der obigen Bezeichnung würden die Seiter umbeschriebenen Polygons $12, 23, \ldots, m1$ sein, die Ecken de deren $12m+1$, $23m+1, \ldots, m1m+1$. Da eine F_n nichts weite als die Projection der durch n Ebenen des Raumes und ih Durchschnitte bestimmten Configuration, so … da

dieser Satz im Grunde nichts anderes ist als der Menelaus-Carnot'sche Lehrsatz für ein beliebiges windschiefes Polygon, das von einer Ebene geschnitten wird (mit Umkehrung und reciproken Sätzen). Der Verfasser leitet daraus mehrere Zusätze her, die, gerade wie jener Satz selbst, mechanischer Anwendung fähig sind. Sc. (Lp.)

C. Hossfeld. Weitere Bemerkungen über den Zusammenhang einer Steiner'schen Aufgabe mit der Hexaeder-Configuration. Schlömilch Z. XXX. 116-119.

In einer Note in Schlömilch Z. XXIX. 365 (F. d. M. XVI. 1884. 570) hatte der Verfasser gezeigt, dass die acht Kreise, welche vier Kreise unter gleichem Winkel schneiden, in Verbindung mit den vier Kreisen, welche je drei der gegebenen orthogonal schneiden, als Elemente des ebenen Kreissystems betrachtet, die bekannte Hexaeder-Configuration $(12_4, 16_3)$ bilden. Eine Bemerkung des Herrn Mehmke in dessen Inauguraldissertation über die Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene hat nun Herrn Hossfeld zu der vorliegenden Note veranlasst. Hier erkennt derselbe die Steiner'sche Aufgabe der Auffindung der vier Kreise gleichwinklig schneidenden Kreise als im wesentlichen identisch mit der Aufgabe, die Mittelpunkte derjenigen Kugeln zu finden, welche durch vier nicht in derselben Ebene liegende Punkte hindurchgehen. Zahl und Gruppirung der Lösungen der Steiner'schen Aufgabe sind das unmittelbare Bild der Zahl und Gruppirung jener Kugeln und ihrer Mittelpunkte im Raum. Hier sind die Ausdrücke Mittelpunkte und Kugeln natürlich Bezeichnungen für Massbegriffe in übertragenem Sinne. Die durch vier Punkte bei projectiver Massbestimmung gehenden Kugeln findet der Verfasser als Flächen zweiten Grades, welche durch die vier Punkte gehen und die Fundamentalfläche der Massbestimmung längs Kegelschnitten berühren. Scht.

F. Rathke. Zwei Configurationen von Punkten, welche sich aus fünf resp. sechs beliebigen Punkten eines Kegelschnitts ergeben. Diss. Marburg.

Die Dissertation knüpft an die unbewiesen gelassenen Behauptungen an, die Steiner in Aufgabe 4 seines Aufsatzes in Crelle J. XXX. 273-276 (Ges. Werke, II. 346) aufgestellt hat. Diese Behauptungen beziehen sich auf die aus fünf beliebigen Punkten einer Ebene bestehende Figur. Die fünf Punkte geben zehn Verbindungsgerade, diese wieder 15 Schnittpunkte, und deren Verbindungen 75 Gerade, von denen 15 Seiten der zu je vier von den fünf Fundamentalpunkten gehörigen Diagonaldreiecke sind. Von diesen 15 Geraden schneiden sich je drei in einem Punkte. Von den so erhaltenen zehn Punkten liegen immer je vier mit einem Fundamentalpunkte in derselben geraden Linie. Dadurch entsteht zu jedem Fundamentalpunkte eine durch ihn gehende gerade Linie, und diese ist immer Tangente zu dem durch die fünf Fundamentalpunkte bestimmten Kegelschnitt. Ferner ergiebt sich der Satz, dass die 15 Diagonalpunkte eines vollständigen Fünfecks zehnmal zu je sechs auf einem Kegelschnitt liegen, sowie eine grosse Reihe anderer Sätze, deren Mitteilung hier zu umständlich wäre. Ausser dem Beweise der Steiner'schen Sätze bringt die Dissertation auch einige auf dieselbe Figur bezügliche neue Sätze. Scht.

E. Badia. Lezioni di geometria complementare. Città di Castello. S. Lapi.

Elementare Entwickelung der ersten Grundlagen der projectivischen Geometrie und besonders des metrischen Teiles dieser Wissenschaft. Se. (Lp.)

H. Funcke. Die analytische und die projectivische Geometrie der Ebene, die Kegelschnitte auch nach den Methoden der darstellenden und der elementar-synthe-

tischen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Potsdam, A. Stein. 108 S. 8°.

Bericht in Abschn. IX. Cap. 1. Lp.

H. Wiener. Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden. Darmstadt. L. Brill.

Nachdem die Geometrie der Lage den Massbegriff glücklich abgestreift hatte, eröffneten sich ihr zweierlei Wege, ihren Aufbau in systematischer Weise weiterzuführen; einmal ist die Forderung unabweisbar (insbesondere behufs Erzeugung der Curven und Flächen höherer Ordnung), für den Fundamentalsatz der Algebra ein geometrisches Aequivalent einzuführen: andererseits hat sie, unabhängig davon, die Theorie der Formen und ihrer invarianten Bildungen auf eine Reihe von Elementarconstructionen zurückzuführen, die selbst invariant (oder projectivischer Natur), der Uebertragung auf andere und andere Träger fähig sind.

In dieser zweiten Richtung bewegt sich die Arbeit des Herrn Verfassers: er will die systematischen Vorbedingungen zu einer Invariantentheorie der Punktgruppen auf einer Geraden, namentlich der zugehörigen Polarenbildungen entwickeln, wie dies bereits Herr Thieme mit Erfolg versucht hatte.

Dazu war vor allem nötig, sich von den Elementen (i. e. den Punkten) der einzelnen Punktgruppe und ihrer zufälligen Natur (ob reell, oder zum Teil imaginär) unabhängig zu machen, wie dies für die Gruppen von zwei Punkten durch v. Staudt geschehen war. Diese Absicht wird, in Uebereinstimmung mit modernen Tendenzen der Algebra, erreicht, indem die gegebene Punktgruppe (binäre Form) ersetzt wird durch das ganze System der zu ihr „conjugirten" („apolaren") Gruppen, oder, was auf das Nämliche hinauskommt, durch eine n-fach lineare, symmetrische Verwandtschaft, (Polarsystem n^{ter} Ordnung), deren „Ordnungspunkte" im Falle der Realität mit den Punkten der gegebenen Gruppe identisch sind.

Es stellt sich indessen die Notwendigkeit heraus, noch einen Schritt weiter zu thun, und an Stelle der letzterwähnten Polarsysteme zuvörderst n-fach lineare, nicht symmetrische Verwandtschaften zu studiren, welche mit den ersteren die n Ordnungspunkte gemein haben. Zu einer solchen allgemeineren Verwandtschaft gehört stets ein bestimmtes Polarsystem gleicher Ordnung; aber auch umgekehrt kann man aus der unendlichen Schar der zu einem Polarsysteme gehörigen Verwandtschaften eine endliche Anzahl herausgreifen, die das gegebene Polarsystem völlig zu vertreten im Stande sind.

Diese tief eingreifenden, wechselseitigen Beziehungen zwischen symmetrischen und nicht symmetrischen Verwandtschaften werden für den einfachsten Fall $n = 2$ im ersten Teile der Arbeit nach allen Richtungen hin untersucht, wobei natürlich viel Bekanntes erscheint. Die Hauptrolle spielen hier die „cyklischen Reihen" einer gegebenen projectivischen Beziehung. Construirt man nämlich in letzterer zu irgend einem Anfangspunkte A_0 den entsprechenden A_1, zu diesem den in gleichem Sinne entsprechenden Punkt A_2 u. s. f., desgleichen den, dem Punkt A_0 im andern Sinne entsprechenden Punkt A_{-1} u. s. f., so erhält man eine cyklische Reihe

$$\dots A_{-3}A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2A_3\dots$$

mit der charakteristischen Eigenschaft

$$\dots A_{-3}A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\dots \barwedge \dots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2A_3\dots,$$

die sich nur in besonderen Fällen schliesst und dann eine „cyklische Gruppe" bildet. Die Reihen resp. Gruppen verwandte schon früher Herr Lüroth zu einer Begründung des Imaginären in der Geometrie.

Man suche andererseits in der gegebenen projectivischen Beziehung die einem Punkte A_0 in beiden Sinnen entsprechenden Punkte A_1 und A_{-1} und den Punkt A_0' als vierten harmonischen jenes zu diesen, so heisse A_0' dem A_0 in der projectivischen Beziehung harmonisch zugeordnet. Diese Paare A_0A_0' bilden eine Involution „harmonisch zugeordneter Punkte".

Es lässt sich nun zeigen, dass sämtlichen cyklischen Reihen

der gegebenen projectivischen Beziehung eben die letztgenannte Involution in ein und derselben Weise zugeordnet werden kann, und dies ist zugleich diejenige Involution, deren Doppelpunkte im Falle der Realität mit denen der projectivischen Beziehung übereinstimmen.

Umgekehrt lässt sich auf diese Beziehungen die Untersuchung von einem Polarsystem (zweiter Ordnung), von zwei solchen, ihrem Büschel und dessen Functionaldeterminante stützen, u. s. f.

Bezieht man (nach Herrn Thieme) weiter einen solchen Büschel von Polarsystemen zweiter Ordnung projectivisch auf eine Punktreihe, so kann man dadurch ein Polarsystem dritter Ordnung erzeugen etc.

Die Theorie der Polaren binärer Formen (oder von Punktgruppen) n^{ter} Ordnung lässt sich so rein constructiv behandeln, und zwar bedarf man nur zweier „Ausgangspunkte" und eines Systems von n „Darstellungspunkten", um mittels wiederholter Anwendung dreier „Elementarconstructionen" eine grosse Reihe von Sätzen und Aufgaben zu behandeln. (Diese „Darstellungspunkte" treten übrigens schon in einer Arbeit von Herrn Haase Math. Ann. I., und zwar dort für rationale Curven, auf.)

Eine specielle Anwendung findet die Methode des Herrn Verfassers auf die Covarianten einer binären kubischen Form.

Wenn es dem Referenten am Schluss erlaubt ist, auf einige Mängel der sonst sehr sorgfältig geschriebenen Arbeit hinzuweisen, so möchte er in erster Linie betonen, dass der Gang, wenn man so sagen darf, ein zu systematischer ist: es werden im Laufe des stufenweisen Fortschreitens eine fast erdrückende Menge von Sätzen mitgeteilt, die sich allerdings gerade bei dieser Gelegenheit je anschliessen und auch an sich nicht ohne Interesse sind, aber das Verständnis des Ganzen erschweren und vor allem bei der wirklichen Ausführung der Invariantentheorie der binären Formen, die doch als Hauptziel hingestellt wird, keine Verwendung finden.

Auf der andern Seite ist z. B. die Lehre von den „Grenzpunkten" der cyklischen Reihen, auf deren Wichtigkeit in der

Einleitung ausdrücklich hingewiesen wird, mit Ausnahme eines Specialfalles (§ 4), ganz weggeblieben. Ihre Entwickelung, wie sie sich bei Lüroth findet, beruht doch auf vielfach anderen Grundlagen. My.

M. d'Ocagne. Transformation des propriétés barycentriques au moyen de la méthode des polaires réciproques. Mathesis V. 170-174.

Zahlreiche Folgerungen aus folgendem Principe: Die zugehörige Gerade des Centrums der mittleren Entfernungen eines Systems von Punkten ist die Polare (oder Axe der Centra der harmonischen Mittel im Sinne Poncelet's) des Mittelpunktes des Leitkreises (vom Radius Eins) in Bezug auf die zugehörigen Geraden der Punkte des Systems. Mn. (Lp.)

C. Rodenberg. Ueber collineare räumliche Systeme. Schlömilch Z. XXX. 112-116.

Verschiedene Lehrbücher der darstellenden Geometrie enthalten den Satz: „Wenn von drei räumlichen Systemen je zwei mit einander centrisch collinear sind, so liegen die drei Collineationscentra in einer geraden Linie.“ Der Verfasser zeigt nun, dass dieser Satz ungenau ist und durch folgenden Satz ersetzt werden muss: „Sind drei räumliche Systeme paarweise centrisch collinear, so sind entweder die Collineationsebenen vereinigt und dann liegen die Centra auf einer Geraden, oder die Centra sind vereinigt und dann gehen die Collineationsebenen durch eine Gerade. In beiden Fällen sind auch die Umkehrungen [illegible] Beide Möglichkeiten sind in der speciellsten Zuordnung [illegible] bei der Collineationsebene und Collineationscentrum allen [illegible] gemeinsam ist.“ Weiterhin stellt der Verfasser ein Sy[illegible] welches zu zwei beliebigen andern collinearen Systemen [illegible] trisch collinearer Lage ist, wodurch mit Rücksicht auf die [illegible] des Herrn Hauck (Schlömilch Z. XXI u. XXIV), der g[illegible] Beweis erbracht ist, dass in zwei [illegible] Systemen de[illegible]

sprechenden Gebilde entweder sämtlich gleichstimmig oder sämtlich ungleichstimmig sind. Scht.

G. Pittarelli. Gli elementi immaginari delle forme binarie cubiche. Batt. G. XXIII. 368-373.

Ist eine kubische Form durch drei Punkte auf einem Kegelschnitte angenommen, so haben die Herren Battaglini und Voss die Construction der beiden Punkte, welche die Hesse'sche Form der ersten darstellen, gegeben. Diese Construction ist nur direct ausführbar, wenn die drei Elemente der kubischen Form reell sind. Der Verfasser giebt eine Construction an, welche auch noch ausführbar ist, wenn zwei Elemente der kubischen Form conjugirt imaginär sind. W. St.

J. B. Pomey. Propriétés élémentaires des faisceaux en involution et leur application à quelques problèmes relatifs aux courbes du second et du troisième degré. Nouv. Ann. (3) IV. 489-498.

In jeder Strahleninvolution giebt es ein Paar senkrecht auf einander stehender zugeordneter Strahlen. Treten im besonderen zwei derartige Paare auf, so sind alle zugeordneten Strahlen senkrecht zu einander. Unter diesem Gesichtspunkt werden einige einfache Strahleninvolutionen behandelt, welche bei der Betrachtung von einem Kegelschnitt oder einer Curve dritten Grades mit Doppelpunkt sich darbieten. Für einen Kegelschnitt ergiebt sich: Dreht sich ein rechter Winkel um einen Punkt M eines Kegelschnittes, so geht die Verbindungssehne der Schnittpunkte seiner Schenkel stets durch einen festen Punkt N, welcher auf der Normale von M gelegen ist. Der Punkt N ist in diesem Sinne dem Punkte M zugeordnet. Durchläuft M den Kegelschnitt, so durchläuft auch N einen Kegelschnitt, welcher mit jenem concentrisch und homothetisch ist. Schn.

Martinetti. Sopra alcune trasformazioni involutorie del piano. Brioschi Ann. (2) XIII. 53-80.

Der Bericht steht bereits in F. d. M. XVI. 1884. 540.

C. le Paige. Sur les involutions cubiques. Liège Mém. (2) XI. 19 Seiten.

Ergänzung der „Essais de géométrie du troisième ordre" desselben Verfassers. Verschiedene Sätze über die „sich selbst conjugirten" Involutionen; Bestimmung der Verzweigungspunkte zweier kubischen Involutionen, deren Doppelpunkte man kennt.

Mn. (Lp.)

K. Bobek. Ueber gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene. Wien Ber. XCI 476-518.

Es seien die Punkte $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ Basispunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung. Dann ist eine rationale Curve ν^{ter} Ordnung vollständig bestimmt, wenn sie jeden Punkt i zum γ_i-fachen Punkt hat, sobald $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_9 = 3\nu-1$ und $\gamma_1(\gamma_1-1)+\gamma_2(\gamma_2-1)+\cdots+\gamma_9(\gamma_9-1) = (\nu-1)(\nu-2)$ ist. Legt man nun durch irgend einen Punkt a der Ebene die einzige, durch ihn gehende Büschelcurve, so schneidet dieselbe die Curve ν^{ter} Ordnung nur noch in einem Punkte γ, und sucht man nun den dritten Schnittpunkt α der Geraden γa mit der Büschelcurve, so ist dadurch zwischen den Punkten a und α der Ebene eine eindeutige und involutorische Verwandtschaft festgestellt, deren Fundamentalpunkte die Punkte 1-9 sind, deren Ordnung $3\nu+5$ ist, und deren Coincidenzcurve von der $(\nu+5)^{\text{ten}}$ Ordnung ist und in dem Fundamentalpunkt i einen $(\nu-2\gamma_i+1)$-fachen Punkt besitzt. Diese Verwandtschaft wird vom Verfasser eingehend studirt. Am Schluss wird auf den Satz aufmerksam gemacht, dass eine Curve n^{ter} Ordnung, welche in den neun Basispunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung n_i-fache Punkte hat, sodass $n_1+n_2+\cdots+n_9 = 3n-2$ ist, in einem beliebigen Punkt

der Ebene, ohne zu zerfallen, einen Doppelpunkt nicht besitzen kann, dass vielmehr der Ort der Doppelpunkte nicht zerfallender Curven eine bestimmte Curve, die Coincidenzcurve der erzeugten Verwandtschaft, ist. Einen Specialfall dieses Satzes erkannte schon Herr Halphen im S. M. F. Bull. X. 163 (F. d. M. XIV. 1882. 580).

Scht.

R. de Paolis. Alcune particolari transformazioni involutorie dello spazio. Rom. Acc. L. Rend (4) I. 735-742, 754-758.

Die involutorischen räumlichen Systeme, bei denen die Verbindungslinien zugeordneter Punkte ein Strahlensystem erster Ordnung bilden, zerfallen in drei Arten, je nachdem das Strahlensystem aus einem Strahlenbündel erster Ordnung oder aus dem Sehnensystem einer Raumcurve dritter Ordnung oder aus allen Strahlen besteht, die einer Raumcurve μ^{ter} Ordnung und eine $(\mu-1)$-fache Sehne derselben schneiden. Jede dieser drei Arten umfasst Unterarten, von einander unterschieden durch Construction und charakteristische Merkmale.

Js.

J. E. Estienne. Quelques réflexions sur l'étude géométrique des courbes géométriques, et théorèmes pouvant y être utiles. Nouv. Ann. (3) IV. 87-98, 131-138, 297-315.

Die Betrachtungen im ersten Teil (S. 87-98) befassen sich mit der Theorie der notwendigen Punkte zweier algebraischen Curven. Das Theorem, welches der Verfasser für einige Specialfälle verfolgt, enthält in seiner allgemeinen Fassung folgende Relation. Die n^2 Schnittpunkte zweier Curven n^{ten} Grades lassen sich in zwei Gruppen von Punkten teilen, von denen die eine $\frac{1}{2}(n-1)(n-1+3)+1$, die andere $\frac{1}{2}(n-2)(n-2+3)+1$ umfasst, denn $\frac{1}{2}(n-1)(n-1+3)+1+\frac{1}{2}(n-2)(n-2+3)+1 = n^2$. Die erste Gruppe enthält einen Punkt mehr, als zur Bestimmung einer Curve $(n-1)^{ten}$ Grades nötig ist, die zweite zählt einen mehr, als die Bestimmung einer Curve $(n-2)^{ten}$ Grades erfordert. Liegt die erste Gruppe auf einer Curve $(n-1)^{ten}$ Grades, so

liegt die zweite in einer Curve $(n-2)^{ten}$ Grades und umgekehrt. Es enthält diese Relation gewissermassen eine Verallgemeinerung des Pascal'schen Satzes; denn für $n = 3$ folgt, dass, wenn von den 9 Schnittpunkten zweier Curven dritten Grades sechs auf einem Kegelschnitt liegen, die übrigen drei in einer Geraden enthalten sind; als zwei Curven dritten Grades lassen sich aber beim Pascal'schen Sechseck die abwechselnd gelegenen Seiten desselben auffassen. Umfasst eine der Curve n^{ten} Grades eine Anzahl Gerade, so erniedrigt sich der Grad einer der Curven, auf denen eine Gruppe enthalten ist. Besteht z. B. eine Curve fünften Grades aus einer Geraden und einer Curve vierten Grades, so führt das allgemeine Theorem zu dem Satz: „Wenn von den 20 Durchschnittspunkten einer Curve vierten und fünften Grades zehn auf einer Curve dritten Grades enthalten sind, so liegen die zehn übrigen gleichfalls auf einer Curve dritten Grades.“ Analoge Specialfälle bilden den Gegenstand der weiteren Betrachtung.

In der Fortsetzung (S. 131-138) beschäftigt sich der Verfasser mit einer ähnlichen Frage, betreffend die Durchschnittspunkte dreier Flächen zweiten Grades. Unter den acht Durchschnittspunkten ist bekanntlich einer die notwendige Folge der sieben anderen. Ein Achteck, welches jene acht Schnittpunkte zu Ecken hat, zeigt folgende bemerkenswerte Eigenschaft: „Es schneiden sich seine entgegengesetzten Seitenflächen in vier Geraden, und diese vier Geraden sind Erzeugende desselben Hyperboloids.“ Dieser Satz wird die Grundlage für eine Construction des achten notwendigen Punktes aus den sieben gegebenen.

Den Gegenstand der weiteren Betrachtungen (S. 297-315) bildet zunächst die Raumcurve dritten Grades. Sie zeigt gewisse Analogien mit einem Kegelschnitt. Ist ein solcher einem Dreieck umgeschrieben, so kann er auf dieses in der Form bezogen werden, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Jedem Punkte (x, y, z) entspricht eine Gerade $\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0$, welche als die Polare des Punktes in Rücksicht auf das Dreieck bezeichnet werden mag. Die Polaren, welche den Punkten des Kegelschnitts entspre

gehen durch den Punkt (a, b, c) Das entsprechende Theorem für eine Raumcurve dritten Grades lautet: „Die Polaren aller Punkte einer Raumcurve dritten Grades in Rücksicht auf ein ihr eingezeichnetes Tetraeder gehen durch eine feste Gerade." Weitere Relationen für derartige Raumcurven, sowie für Kegelschnitte schliessen sich an; doch muss, was sie im besonderen betrifft, auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Nur eine Beziehung für zehn Punkte einer Fläche zweiten Grades mag hier noch zur Charakterisirung der behandelten Fragen Erwähnung finden. Man teile die zehn Punkte in zwei Gruppen, von denen die eine sechs, die andere vier Punkte umfasst. Durch jene sechs lege man eine Fläche zweiten Grades (a), welche eine feste Ebene in einem Kegelschnitt schneidet, und führe durch ihn und die zweite Gruppe eine zweite Fläche zweiten Grades (b). Beide Flächen (a) und (b) haben noch einen zweiten Kegelschnitt gemeinsam. Die Ebene dieses Kegelschnitts geht durch einen festen Punkt, wenn (a) sich ändert. Schn.

E. de Jonquières. Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque de deux faisceaux correspondants de droites. Batt. G. XXIII. 48-75

Die vorliegende Schrift ist von Herrn de Jonquières bereits im Jahre 1859 der Pariser Akademie eingereicht worden, ein Bericht über dieselbe ist nicht erfolgt, jetzt wird sie in obigem Journal veröffentlicht.

Ein System von Curven m^{ter} Ordnung möge einen $(m-1)$-fachen Punkt und ausserdem $2(m-1)$ einfache Punkte gemeinsam haben. Zur vollständigen Bestimmung eines Elementes dieses Systems fehlen alsdann noch zwei Punkte. Die gegebenen $(2m-1)$ Punkte bilden die Fundamentalpunkte des Curvensystems. Fügt man die Bedingung hinzu, dass die einzelnen Curven des Systems noch einen Punkt gemeinsam haben, so bilden dieselben einen Büschel und haben nur die $2m$ Punkte gemeinsam; denn der

$(m-1)$-fache Punkt, welchen sie gemeinsam haben, zählt für $(m-1)^2$ Schnittpunkte, so dass die Gesamtzahl derselben durch $(m-1)^2+2(m-1)+1 = m^2$ angegeben ist. Wie also ein Punkt der Ebene durch die Gesamtheit der Geraden, welche durch ihn hindurchführen, einen Geraden-Büschel bestimmt, so bestimmt ein Punkt der Ebene, welcher jenem Curvensystem hinzugefügt wird, einen Büschel von Curven m^{ter} Ordnung.

Sind nun $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$ drei Glieder des Systems, so ist dasselbe darstellbar durch $C + \lambda' C' + \mu' C'' = 0$. Sind andererseits $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$ drei Gerade, so ist jede vierte Gerade der Ebene darstellbar durch $L + \lambda L' + \mu L'' = 0$. Verknüpft man λ', μ' mit λ, μ durch die lineare Beziehung $\lambda' = \alpha\lambda$; $\mu' = \beta\mu$, so enspricht jeder Geraden des einen ebenen Gebildes eine Curve m^{ter} Ordnung in dem anderen, welche einen $(m-1)$-fachen Punkt und ausserdem noch $2(m-1)$ andere feste Punkte besitzt. Hiermit sind zwei ebene Gebilde in verwandtschaftliche Beziehung gesetzt. Die Verwandtschaft wird durch das Wort „isographisch" bezeichnet, und die Erkenntnis ihrer Natur bildet den Inhalt des ersten Teils der Schrift. Es zeigt sich, dass im allgemeinen einem Punkte in einem Gebilde eindeutig ein Punkt im andern entspricht, und dass für beide Gebilde vollständige Reciprocität herrscht. Liegen beide Gebilde in einer Ebene, so giebt es $(m+2)$ Punkte, welche sich selbst entsprechen.

Zieht man von einem Punkt S im Raum Strahlen nach den Punkten des einen ebenen Gebildes und von einem Punkt S' Strahlen nach dem ihm isographisch verwandten Gebilde, so entstehen zwei räumliche isographische Strahlenbündel. Jede Ebene schneidet dieselben wieder in isographischen ebenen Gebilden. Da diese $(m+2)$ selbstentsprechende Punkte haben, so erzeugen die Durchschnitte homologer Strahlen der beiden räumlichen isographischen Bündel eine Raumcurve von der $(m+2)^{ten}$ Ordnung. Dieselbe enthält S und S', hat im allgemeinen keine singulären Punkte und zeigt nur die Besonderheit, dass jeder der beiden Strahlen, welche von S resp. S' nach den beiden vielfachen Punkten der ebenen Gebilde laufen, m verschiedene Punkte der Raumcurve enthält.

Wenn $m = 1$ ist, so ist die isographische Verwandtschaft eine Verwandtschaft der Homographie, und die erzeugte Raumcurve ist dritten Grades. Schn.

J. S. und M. N. Vaněček. Erzeugung von ebenen Curven durch Curvenbüschel. Prag. Ber. 1884. 354-371. (Böhmisch.)

Die vorliegenden Aufsätze umfassen eine Theorie der Erzeugung ebener Curven durch Curvenbüschel und bilden den zweiten Teil einer Arbeit, von welcher der erste Teil über die Raumcurven und Flächen in Brioschi Ann. (2) XIV (Referat im nächsten Jahrgang) teilweise veröffentlicht worden ist.

Durch eine entsprechende Correspondenz zwischen den Curven gegebener Büschel ist man im Stande, nicht nur eine Curve von beliebiger Ordnung, sondern auch Curvenbüschel von beliebigem Index zu erzeugen. Auf Grund dieser Ergebnisse gelangt man zu Curven, welche „tangential" benannt wurden. Dabei wurde das Problem über die Berührung von drei Curvenbüscheln erster Dimension erledigt.

Ausserdem haben die Verfasser eine allgemeine Mac-Laurin-sche Erzeugungsart von Curven entwickelt. In einfachen Fällen wurden mehrere Constructionen von Curven vierter Ordnung mit drei, zwei und einem Doppelpunkte eingehend behandelt, von denen einige auf einer anderen Grundlage bereits hie und da entwickelt worden sind. Hierher gehört auch die Construction einer Curve achter Ordnung mit einem vierfachen Punkte.

In derselben Weise sind auch die ein- und umbeschriebenen Poncelet'schen Polygone behandelt worden.

Eine Construction von Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten wurde zur Bestimmung des Ortes benützt, welchen einer der drei Doppelpunkte dieser Curve durchläuft, wenn zwei von denselben fest bleiben. In besonderen Fällen wird dieser Ort zur Pascal'schen Schnecke oder zur Kardioide.

Dabei ergab sich auch eine höchst einfache Lösung des folgenden Problems: Man soll die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem bloss durch seine gewöhnlichen Bestimmungsstücke

gegebenen Kegelschnitte bestimmen. Man hat hiebei eine einzige Kreislinie zu zeichnen.

Schliesslich machen die Verfasser eine neue Erzeugungsart von Kegelschnittbüscheln bekannt. Std.

K. Bobek. Ueber projective Erzeugung von Curven. Klein Ann. XXV. 448-456.

Die Arbeit knüpft an die Untersuchungen des Herrn Nöther über die Theorie der algebraischen Curven an, wie sie u. a. in Band VII und Band XV der Math. Ann. niedergelegt sind. Wir heben von den Resultaten des Herrn Bobek folgendes hervor. Auf einer allgemeinen Curve $2\nu^{ter}$ Ordnung kann man nicht $3\nu-2$, sondern höchstens $3\nu-3$ Doppelpunkte als Basispunkte eines Büschels ν^{ter} Ordnung willkürlich annehmen.

Scht.

Goldschmidt. Conjugirte Reciprocitäten. Schlömilch Z. XXX. 182-191.

Synthetische Untersuchungen des Herrn Reye über sich stützende Kegelschnitte (Reye, Geometrie der Lage. Zweite Auflage. Erste Abteilung) veranlassen den Verfasser, analoge Untersuchungen über sich stützende Reciprocitäten aufzustellen, wobei letztere sich als identisch mit den conjugirten Reciprocitäten des Herrn Rosanes erweisen. Js.

P. H. Schoute. Over de constructie van unicursale krommen door punten en raaklijnen. Nieuw Arch. XII. 1-37.

P. H. Schoute. Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes. Arch. Néerl. XX. 49-94.

Rein synthetische Untersuchung der Construction von unicursalen Curven durch Punkte und Tangenten. Bei der gedrängten Form der Abhandlung ist es kaum möglich, eine kurze Uebersicht des reichen Inhalts zu geben. Voraus gehen einige

Betrachtungen über die Doppelverhältnisse, welche die Lage eines Punktes in Beziehung auf ein gegebenes Dreieck bestimmen. Dann folgt die Bestimmung von Fundamental-Punkten, Fundamental-Geraden und Fundamental-Dreiecken, und es werden die birationalen oder Cremona'schen Transformationen besprochen, welche nach dem Grade der Curve aus dem einen System eingeteilt werden, die einer willkürlichen Geraden aus dem andern System entspricht. Eingehender untersucht der Verfasser die quadratische Transformation und dabei besonders die involutorische, welche er „regelmässige" quadratische Involution nennt, und deren Eigenschaften er ableitet; ebenso wird die unregelmässige quadratische Involution definirt und behandelt.

Nach dieser langen Einleitung kommt der Verfasser zu seinem eigentlichen Gegenstand und wendet die behandelten Verwandtschaften auf die Bestimmung der unicursalen Curven an. Er zeigt, dass aus den vorangehenden Betrachtungen eine allgemeine lineare Construction jeder unicursalen Curve erhalten werden kann, deren gegebene Parameter so gewählt sind, dass sie nur zu einer einzigen Curve führen. Auch die Construction der Tangente ergiebt sich ohne Schwierigkeit. Als zur Anwendung der allgemeinen Sätze geeignet werden einige merkwürdige Curven dritten und vierten Grades genannt; bei der Construction der Tangenten wird eine nicht involutorische Transformation angewandt, welche entwickelt und vom Verfasser die Maclaurin'sche Transformation genannt wird. Mit Hülfe dieser Transformation kann die Gerade in einen Kegelschnitt, und dieser in eine Curve dritten oder vierten Grades verwandelt werden, wobei zur Abkürzung anstatt der Geraden der Kreis als Ausgang genommen werden kann, wie der Verfasser nachweist. Auf diese Weise werden verschiedene merkwürdige Curven behandelt, darunter die Cissoide, die Konchoide, die Curve von Agnesi und das Folium Cartesii; schliesslich wird der Einfluss des Vorhandenseins von doppelten oder dreifachen Punkten auf die Construction untersucht. G.

S. Kantor. Sur une méthode pour traiter les transformations périodiques univoques. C. R. C. 42-44

S. Kantor. Théorie des transformations périodiques. C. R. C. 76-77

Eine grössere Arbeit des Herrn Verfassers über periodische eindeutige Transformationen war von der Akademie zu Neapel 1884 preisgekrönt worden. Hier werden kurze, oft nur andeutungsweise gehaltene Angaben über den Inhalt jener Arbeit gemacht, und mit Ausdehnungen auf Räume von mehr Dimensionen verknüpft.

Cremona hatte periodische eindeutige Transformationen in der Ebene studirt mittels eindeutiger Abbildungen (auf die Ebene) von Flächen, die solche Transformationen in sich zulassen. Der Herr Verfasser verbindet damit die Untersuchung der linearen Raumtransformationen, vermöge deren jene Flächen in sich übergehen und eben dadurch (höhere) eindeutige Transformationen in sich erzeugen.

Von anderer Seite her werden die Jordan'schen Arbeiten über endliche Gruppen von linearen Raumtransformationen dazu in Beziehung gesetzt.

Für die eindeutigen quadratischen Transformationen (in der Ebene) hat der Herr Verfasser acht verschiedene „Klassen" (von je unendlich vielen Formen) ermittelt, nebst 48 isolirten Formen. Diese lassen sich indessen durch das bekannte Verfahren der „Transformation von Gruppen" auf einander reduciren, und es verbleiben so am Ende nur drei „Klassen" und zehn isolirte Typen.

My.

S. Kantor. Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques. C. R. C. 343-345.

Als ein Hauptresultat seiner Preisarbeit (cf. das obige Referat) teilt der Verfasser das Theorem mit:

„Jede eindeutige Correspondenz, die auf einer algebraischen (ebenen) Curve f vom Geschlecht $p > 2$ existirt, ist in einer bi-

rationalen Transformation der ganzen Ebene enthalten.“ Um nun alle eindeutigen (Cremona-) Transformationen zu finden, die algebraische Curven in sich überführen, bedient sich der Herr Verfasser vorzugsweise eines successive reducirenden Verfahrens, indem er von den zu f adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung φ wiederum die adjungirten $(n-6)^{\text{ter}}$ Ordnung nimmt u. s. f. Alle diese gehen vermöge der Cremona-Transformation in sich über. So kommt man auf bekannte Transformationen (von Schwarz, Jonquières u. A.) zurück.

Analog für Flächen. My.

R. Sturm. Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen. Klein Ann. XXVI 304-308.

Der Verfasser liefert zu den rationalen, eindeutigen Transformationen in der Ebene die folgenden, von ihm ausführlich behandelten Beispiele. Die beiden Punktfelder, auf denen eine Cremona'sche Verwandtschaft hergestellt werden soll, seien Σ und Σ'. Ferner seien F eine feste Fläche dritten Grades, u und v zwei windschiefe Gerade auf ihr, R eine auf F liegende Raumcurve dritten Grades. Von einem beliebigen X auf Σ sei eine u und v schneidende Gerade gezogen, die F zum dritten Male in A schneidet. Dann geht von A ein R zweimal schneidender Strahl aus, welcher Σ' in X' trifft, und es besteht zwischen X und X' eine eindeutige Verwandtschaft, welche vom vierten, sechsten, achten, achten, zehnten oder zwölften Grade ist, je nachdem von den beiden Geraden u und v keine R schneidet, oder die eine R einmal schneidet, die andere nicht, oder beide R je einmal schneiden, oder die eine R zweimal, die andere gar nicht schneidet, oder die eine R zweimal, die andere einmal schneidet, oder endlich beide R zweimal schneiden. Scht.

G. Jung. Sulle superficie generate da due sistemi Cremoniani reciproci di grado m. Rom. Acc. L. Rend. (4) I 762-767, 773-774, 810-812.

Ein Strahlenbündel s und ein Ebenenbündel s' stehen nach Note I in reciproker Cremona'scher Verwandtschaft m^{ten} Grades, wenn ein zum ersteren reciproker Ebenenbündel zum letzteren in Cremona'scher Verwandtschaft steht. Zwei solche Bündel erzeugen im allgemeinen ein Monoid $(m+1)^{ten}$ Grades.

Zwischen den Fundamentalelementen von s und s' bestehen bekanntlich Bedingungsgleichungen. Unter den ihren Lösungen entsprechenden Monoiden $(m+1)^{ten}$ Grades ist das Normalmonoid hervorzuheben als Erzeugnis zweier Bündel, zwischen denen eine reciproke Jonquières'sche Verwandtschaft m^{ten} Grades stattfindet.

Sind der Strahlenbündel s und der Ebenenbündel s' concentrisch, so bilden nach Note II einesteils die Strahlen von s, die in ihren entsprechenden Ebenen liegen, einen Kegel $(m+1)^{ter}$ Ordnung, anderenteils die Ebenen von s', die durch ihre entsprechenden Strahlen gehen, einen Ebenenbüschel $(m+1)^{ter}$ Ordnung. Im ersteren Falle ist jeder r-fache Fundamentalstrahl von s eine r-fache Erzeugende des Kegels, im letzteren Falle jede r-fache Fundamentalebene von s' eine r-fache Ebene des Büschels.

Zwei in einer Cremona'schen Verwandtschaft n^{ten} Grades stehende Ebenenbündel (Punktfelder) erzeugen nach Hirst eine Cremona'sche Congruenz. Diese ist eindeutig auf den Strahlenbündel s bezogen und erzeugt mit ihm eine auf eine Ebene abbildbare Fläche, sobald zwischen einem der beiden Ebenenbündel (Punktfelder) und dem Bündel s eine (reciproke) Cremona'sche Verwandtschaft m^{ten} Grades besteht. Auf diese Flächen hinzuweisen ist Zweck der Note III. Js.

C. Segre. Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette. Torino Atti XX. 487-504.

Für die projective Geometrie der in einer Ebene π gelegenen Curven zweiter Klasse γ^2 sind diejenigen Mannigfaltigkeiten fundamental, welche von den in Punktepaare oder Doppelpunkte degenerirenden Curven zweiter Klasse gebildet wer[...] Ver-

fasser untersucht sie, indem er die Curven zweiter Klasse γ^2 als Punkte P eines Raumes von fünf Dimensionen s_5 auffasst; den Punktepaaren entsprechen hierbei die Punkte einer kubischen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen M_3^4, den Doppelpunkten die Punkte einer Fläche vierter Ordnung F_2^4. Aus der Abbildung der Curven zweiter Klasse γ^2 auf die Punkte P folgt die der Curven zweiter Ordnung c^2 von π auf die Räume s_4 von s_5. Einem Punkte P und einem Raume s_4 entspricht derselbe Kegelschnitt, sobald s_4 die lineare Polare von P bezüglich der Mannigfaltigkeit M_3^4 ist.

Die Fläche F_2^4 wird von unendlich vielen Ebenen in Curven zweiter Ordnung geschnitten. Durch jeden Punkt der M_3^4 geht eine derselben, die beiden anderen durch ihn gehenden Ebenen der M_3^4 sind Tangentialebenen der F_2^4. Drei beliebige Tangentialebenen der F_2^4 können collinear so aufeinander bezogen werden, dass die Verbindungsebenen entsprechender Punkte wieder Tangentialebenen der F_2^4 sind. Achtfach unendlich viele Transformationen des Raumes s_5 führen die Fläche F_2^4 in sich selbst über. Werden sie einer projectiven Geometrie des Raumes s_5 zu Grunde gelegt, so fällt diese mit der projectiven Geometrie der Curven zweiter Klasse der Ebene π zusammen.

Vorstehende Resultate werden bei der Abbildung der linearen Complexe des Raumes von drei Dimensionen auf die in einer Ebene gelegenen Curven zweiter Klasse verwertet. Js.

G. Hauck. Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. (III. Artikel). Kronecker J. XCVIII. 304-332.

Dieser dritte Artikel der umfassenden Untersuchungen des Verfassers über die trilineare Verwandtschaft behandelt im wesentlichen „die dreibündig eindeutige Verwandtschaft zwischen drei ebenen Punktsystemen und ihre Beziehungen zur quadratischen und zur projectiv-trilinearen Verwandtschaft.“ Zufolge der Resultate des zweiten Artikels (Kronecker J. XCVII. 261) war die projectiv-trilineare Verwandtschaft zwischen drei ebenen Punktsystemen S, S', S'' bestimmt durch die dreimal zwei Kernpunkte

pq. $p'q'$. $p''q''$, von denen q und p', q' und p'', q'' und p je als gegnerische Kernpunkte zu bezeichnen sind, und durch die drei projectiven Beziehungen zwischen je zwei gegnerischen Kernstrahlenbüscheln, sodass dabei die Verbindungslinien der Kernpunkte pq, $p'q'$, $p''q''$ (Hauptaxen) je als entsprechende Strahlen auftreten. Drei so aufeinander bezogene Punkte konnten nun in gestaltlicher Beziehung stets als verschiedene Projectionen eines und desselben Original-Punktsystems angesehen werden. Mit Rücksicht hierauf wurde die in Rede stehende Verwandtschaft als projectiv-trilineare bezeichnet. Der Verfasser stellt sich nun jetzt die Frage, ob diese projectiv-trilineare Verwandtschaft wirklich den allgemeinsten Fall der dreibündig trilinearen Verwandtschaft darstellt, d. h. der Verwandtschaft, wo die Punkte nicht bloss eindeutig zugeordnet sind, sondern auch so, dass den auf zwei geraden Linien liegenden Punkten zweier Ebenen in der dritten Ebene stets Punkte zugeordnet sein sollen, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Die Beantwortung dieser Frage macht die vorherige Untersuchung der allgemeineren dreibündig-eindeutigen Verwandtschaft notwendig, d. h. derjenigen, wo zwar eindeutige Zuordnung besteht, nicht aber die soeben hinzugefügte weitere Bedingung erfüllt zu werden braucht. Diese dreibündig eindeutige Verwandtschaft verhält sich zur dreibündig-linearen in gewisser Hinsicht, wie sich die quadratische Verwandtschaft zur collinearen verhält. In anderer Beziehung kann man auch die Collineation als Specialfall der trilinearen Verwandtschaft und die quadratische Verwandtschaft als Specialfall der dreibündig-eindeutigen erkennen. Der Verfasser geht daher von der allgemeinsten Definition der dreibündig-eindeutigen Verwandtschaft aus, entwickelt dann deren wichtigste Eigenschaften und gelangt durch successive Specialisirung zunächst zu der parabolisch-dreibündig eindeutigen Verwandtschaft, d. h. zu derjenigen Verallgemeinerung der projectiv-trilinearen Verwandtschaft, wo, unter Beibehaltung der sonstigen Zuordnung, die Hauptaxen nicht notwendig entsprechende Strahlen je zweier gegnerischer Kernstrahlenbüschel bilden. Von diesem besonderen Fall aus wird dann die trilineare Verwandtschaft erkannt

und behandelt. Namentlich ergiebt sich, dass der allgemeinste Fall der letzteren durch die Beziehung dargestellt wird, welche zwischen den drei Projectionen eines räumlichen Punktsystems obwaltet. Von weiteren Resultaten des Verfassers sei hier der folgende Satz erwähnt: Bewegt sich ein veränderliches Vieleck von beliebig vielen Seiten so, dass seine Ecken mit Ausnahme von dreien auf eben so vielen festen Leitgeraden laufen, während jede seiner Seiten sich um einen festen Punkt dreht: so stehen die von den drei noch freien Ecken beschriebenen ebenen Systeme in parabolischer dreibündig-eindeutiger Verwandtschaft, die sich auf die projectiv-trilineare Verwandtschaft reducirt, wenn die Leitgeraden und Drehpunkte so liegen, dass es möglich ist, eine Form und Lage des veränderlichen Vielecks zu zeichnen, für welche die Winkel an den drei freien Ecken flache sind, eine Bedingung, die namentlich dann zutrifft, wenn die Drehpunkte alle in gerader Linie liegen. Verringert man die Anzahl der freien Ecken auf 2, so reducirt sich die dreibündig-eindeutige, bezw. trilineare Verwandtschaft, auf die quadratische (mit drei reellen Hauptpunktepaaren), bezw. collineare Verwandtschaft. Scht.

C. Segre. Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta. Torino Mem. (2) XXXVII. 33 S.

Die Arbeit des Herrn Frobenius über lineare Substitutionen und bilineare Formen (Borchardt J. LXXXIV.) veranlasst den Verfasser, diejenigen collinearen Transformationen eines linearen Raumes von n Dimensionen zu untersuchen, welche eine nicht zerfallende Fläche zweiter Ordnung desselben in sich selbst überführen. Diese Transformationen zerfallen, wie Herr Voss (Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, Math. Ann. X) hervorgehoben hat, für ein ungerades n in zwei wesentlich verschiedene Gruppen. Für $n = 5$ insbesondere führt die eine Gruppe auf die collinearen, die andere auf die reciproken Transformationen des gewöhnlichen Raumes, wenn in den Substitutionsgleichungen

die Variabeln als Plücker'sche Strahlencoordinaten aufgefasst werden. Beide Gruppen werden eingehend besprochen, die letztere im Anschluss an eine allgemeine Theorie der reciproken linearen Räume von n Dimensionen. Sätze über projective Transformationen eines linearen Complexes in sich selbst, sowie über einige für die projective Theorie des Strahlenraumes wichtige Invarianten schliessen die umfangreiche Arbeit. Js.

F. Aschieri. Sopra un metodo di rappresentazione piana per la geometria descrittiva dello spazio ordinario. Lomb. Ist. Rend. XVIII.

Das Referat erfolgt, sobald die Arbeit vollständig vorliegen wird. My.

D. Montesano. Su la corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio. Ricerche sintetiche. Napoli. 55 S.

Die dualistischen Verwandtschaften (Correlationen, Reciprocitäten) zwischen zwei Räumen von drei Dimensionen haben in neuerer Zeit Herrn Schröter (Borchardt J. LXXVII.) und Herrn Battaglini (Rom. Acc. L. Mem. (3) VI., vgl. F. d. M. XIV. 1882-83) beschäftigt; der Erstere hat synthetisch mehrere Eigenschaften derselben bewiesen, der Letztere hat sie mit Hülfe der Theorie der Formen durchforscht und ihre Klassification unternommen. In der Arbeit, über die zu berichten ist, hat Herr Montesano methodisch und zwar auf synthetischem Wege die allgemeine Theorie dieser Verwandtschaften aufgestellt und die besonderen Fälle der Correlation bestimmt.

Nachdem der Verfasser in § I die Verwandtschaften definirt hat, die er durchforschen will, setzt er eine Methode zu ihrer Bestimmung auseinander und beweist die Existenz der Oberfläche L zweiter Ordnung, des Ortes derjenigen Punkte, die auf ihren entsprechenden Ebenen liegen, und der Oberfläche J, welche durch diese Ebenen eingehüllt wird. Darauf beweist er (§ V), dass entweder keine dieser Flächen oder beide Regelflächen sind, und

dass sie sich in einem windschiefen Vierecke schneiden. Ferner bilden alle Geraden des Raumes, welche die ihnen entsprechenden schneiden, einen gewissen Complex Q vom zweiten Grade (§ II) dritter Art nach der Klassification des Herrn Weiler (§ VII).

Umgekehrt: 1) Sind zwei Oberflächen gegeben, die eine zweiter Ordnung, die andere zweiter Klasse, welche ein windschiefes Viereck gemeinsam haben, so kann man sie immer als Oberflächen L, J einer Reciprocität ansehen. Um die Verwandtschaft zu bestimmen, muss man unter den Berührungsebenen von J, welche durch einen Punkt P von L gehen, die ihm entsprechende geben (§ VII).

2) Wenn ein Complex zweiten Grades dritter Art gegeben ist, so kann man ihn stets auf zwei verschiedene Arten als den Complex Q einer Reciprocität betrachten.

Endlich zeigt der Verfassser, nach einer kurzen Abschweifung über die involutorischen Verwandtschaften (§ III), dass die ∞^3 Geraden r, von denen jeder Punkt, einmal zu dem einen, das andere Mal zum zweiten Raume gerechnet, zwei correspondirende Ebenen besitzt, welche r in demselben Punkte schneiden, einen Complex ersten Grades K_1 bilden; die dualistischen Betrachtungen führen zu einem zweiten Complexe des ersten Grades K_2 (§ IV).

Diese Sätze liefern dem Verfasser das Mittel zur Unterscheidung der verschiedenen Fälle, die die Reciprocität darbieten kann. Zu ihnen gelangt er (§§ VIII-XVI), indem er auf verschiedene Arten die Verwandtschaft bestimmt, oder indem er voraussetzt, dass entweder die Oberfläche L und J oder ihre gegenseitige Lage von grösserer Besonderheit sind als im allgemeinen Falle. Eine vollständige Angabe aller dieser Fälle zu machen ist uns hier unmöglich.

In den beiden letzten Paragraphen (XVII und XVIII) bestimmt der Verfasser die Anzahl der quadratischen Oberflächen, die sich in einer ganz allgemeinen oder in einer völlig oder teilweise involutorischen Reciprocität entsprechen, und er untersucht die Bestimmung einer Reciprocität, wenn unter den Daten eine Oberfläche zweiter Ordnung sich befindet, welche diese Eigenschaft besitzt.

Zum Schluss wollten wir bemerken, dass die meisten Re-

sultate der Montesano'schen Arbeit auch in der Segre'schen Abhandlung: Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale u. s. w., die fast gleichzeitig erschien, enthalten sind. Siehe das Referat über dieselbe S. 610. La. (Lp.)

F. Aschieri. Sulla trasformazione omografica generale di uno spazio lineare di specie qualunque. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 989-998.

Synthetischer Beweis des folgenden Theorems, der auf einen beliebigen Raum ausgedehnten Erweiterung eines bekannten Satzes für den gewöhnlichen Raum: „Eine beliebige Collineation in einem (linearen Raume von h Dimensionen) R_h kann durch die Folge einer endlichen Anzahl von Homologien erhalten werden.“

Das Raisonnement des Verfassers giebt aber nicht das Minimum dieser Anzahl. Referent bemerkt, dass es durch wiederholte Anwendung folgenden Satzes bestimmbar ist, (den man als Grundlage einer synthetischen Theorie der allgemeinen und besonderen Collineationen des R_h nehmen könnte): „Eine Collineation Ω des R_h, welche einen R_m von Doppelpunkten hat, kann immer betrachtet werden als die Folge (Product) einer Homologie (welche den Perspectivitätspunkt zweier R_{m+1}, die durch den R_m gehen und homolog in Ω sind, als Centrum hat und welche einen dieser R_{m+1} ebenso in den anderen transformirt wie Ω) und einer Collineation, welche einen R_{m+1} (den zweiten der genannten) von Doppelpunkten hat“ (woraus erhellt, dass Ω die Folge von $h-m$ Homologien ist). Se.

A. Sternad. Ueber involutorisch homologische Curven. Cas. XIV. pag. 208. (Böhmisch.)

Bietet den Hauptinhalt eines beim Congress böhmischer Mittelschul-Professoren im Jahre 1884 gehaltenen übersichtlichen Vortrages. Std.

V. Eberhard. Ueber eine räumliche involutorische Verwandtschaft siebenten Grades und ihre Kernfläche vierter Ordnung. Diss. Breslau. 61 S. Köhler.

B. Besondere ebene Gebilde.

M. A. Baraniecki. Elementar-synthetische Darlegung der Eigenschaften der Kegelschnitte auf Grund ihrer harmonischen Verwandtschaft mit dem Kreise. Warschau. (Polnisch.)

Dieses kleine Buch ist als Vorbereitung zur systematischen Behandlung der synthetischen Geometrie zu betrachten. Das anharmonische Verhältnis, die Involution, die Transversalen und die projectivischen Gebilde sind ausgelassen: die Kegelschnitte werden nach Milinowski (cfr. dieses Jahrbuch XIV. 1882. 522) als dem Kreise in der harmonischen Verwandtschaft entsprechende Curven erklärt und behandelt. Eine Uebersicht des Stoffes geben die folgenden Titel der Abschnitte.

I. Einleitende Begriffe. II. Harmonische Punktreihen und Strahlenbüschel, vollständiges Vierseit und Viereck. III. Harmonische Verwandtschaft. Die Verwandtschaft des Kreises mit sich selbst. IV. Der Kegelschnitt als mit dem Kreise harmonisch verwandte krumme Linie. Die Gestalten der Kegelschnitte. V. Pol, Polare, Brennpunkte, Leitlinien, Tangenten, Axen, Excentricität. VI. Polare der Punkte einer Geraden und der Pol der durch einen Punkt gehenden Geraden. Eingeschriebenes Viereck und umgeschriebenes Vierseit. Conjugirte Punkte und Geraden. Conjugirte Halbmesser. VII. Aehnlichkeitscentra zweier und Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise. Der Pascal'sche und Brianchon'sche Satz. VIII. Organische Entstehungsweise des Kegelschnitts (Steiner'scher Satz). Das Princip der Dualität.

Die Behandlung ist ganz elementar (sogar die trigonometrischen Functionen werden nicht gebraucht) und durch allmählich

fortschreitende Entwickelung für Anfänger sehr geeignet. Reicher Uebungsstoff ist beigefügt. Dn.

J. J. Sylvester. Solution of question 7769. Ed. Times XLII. 89-90.

Ein algebraischer Beweis für den Satz: Wenn zwei auf demselben geradlinigen Träger liegende projectivische Punktreihen keine sich entsprechenden Punkte gemeinschaftlich haben, so erscheinen die Strecken zwischen irgend zwei entsprechenden Punkten AA', BB', ... von einem ausserhalb der Geraden passend gewählten Punkte unter constantem Winkel. Lp.

B. Sporer. Zur harmonischen Teilung. Hoppe Arch. (2) II. 111-112.

Die 16 Punkte, aus welchen eine gegebene harmonische Punktreihe A, B, C, D sich durch einen gegebenen harmonischen Büschel projiciren lässt, liegen zu je acht auf zwei Kreisen; die acht Punkte eines jeden Kreises liegen ferner paarweise mit jedem der vier harmonischen Punkte M, N, P, Q in einer Geraden, und jeder der Punkte des einen Kreises liegt mit einem Punkte des andern und einem festen Punkt R in einer Geraden, wo M und N die Halbirungspunkte zu den conjugirten Strecken AC und BD sind, und wo P, Q, R sich aus den Gleichungen

$$PM:PN = QM:QN = AC:BD, \quad RA.RB = RC.RD$$

bestimmen. Scht.

X. Antomari. Théorèmes de géométrie sur le centre des moyennes distances. Nouv. Ann. (3) IV. 98-100.

Für ein System von m Punkten gelten folgende Sätze:

1. Combinirt man die Punkte zu p auf alle möglichen Arten und sucht zu jeder Combination das Centrum mittlerer Entfernungen, so erhält man ein System (a) von $C_{m,p}$ Punkten. Jeder

Combination zu p entspricht eine Combination der übrigen $m-p$ Punkte, die gleichfalls ein Centrum mittlerer Entfernungen hat; so erhält man ein zweites System (b) von $C_{m,m-p}$ Punkten. Die beiden Systeme (a) und (b) sind nun homothetisch in Bezug auf das Centrum mittlerer Entfernungen der gegebenen m Punkte, und das Verhältnis der Homothetie beträgt $\frac{m-p}{p}$.

II. O_1 und O_2 seien zwei homologe Punkte, wie sie im Satz I. vorkommen; also O_1 gehöre dem System (a) an, und O_2 sei der entsprechende Punkt des Systems (b). Verbindet man nun einen festen Punkt O mit allen Punkten wie O_1, und zieht durch den jedesmal homologen Punkt O_2 eine Parallele zu dieser Linie, so treffen sich alle diese Parallelen in einem und demselben Punkte. Mz.

H. Schroeter, F. Pisani. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) IV. 474-475.

Der von H. Schroeter aufgestellte, von F. Pisani bewiesene Satz lautet:

Man verbinde die Ecken eines Dreiecks ABC mit einem Punkte O seiner Ebene durch Gerade, welche die Seiten BC, CA, AB bez. in A', B', C' treffen mögen. Ferner bezeichne man die Mitten von BC, CA, AB bezw. mit a, b, c; die von AA', BB', CC' mit a', b', c'. Dann schneiden sich die Geraden aa', bb', cc' in demselben Punkte M, dem Mittelpunkte des Kegelschnittes, der die Dreiecksseiten in A', B', C' berührt. Ferner ist:

$$\frac{OA\,.OB\,.OC}{OA'.OB'.OC'}=\frac{Ma\,.Mb\,.Mc}{Ma'.Mb'.Mc'}.$$

Mz.

G. Lazzeri. Nuovi teoremi sull' esagrammo di Pascal. Ven. Ist. Atti (6) III. 481-500.

Unter i, h, m, n, p, r wird eine beliebige Anordnung der sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 eines Kegelschnittes p^2 verstanden.

unter λ_{ik} die Verbindungslinie zweier Punkte i, k und unter $T\begin{pmatrix} i, & m, & p \\ k, & n, & r \end{pmatrix}$ das aus den Strahlen $\lambda_{ik}, \lambda_{mn}, \lambda_{pr}$ bestehende Dreiseit.

λ_{ik} schneidet die drei Paar Gegenseiten des vollständigen Vierecks m, n, p, r in einer Involution mit den Doppelpunkten L_{ik}, L'_{ik}. Drei Punktepaare L_{ik}, L'_{ik}; L_{mn}, L'_{mn}; L_{pr}, L'_{pr} bilden die Gegenecken eines Polvierseits $Q\begin{pmatrix} i, & m, & p \\ k, & n, & r \end{pmatrix}$ von p^2 mit dem Diagonaldreiseit $T\begin{pmatrix} i, & m, & p \\ k, & n, & r \end{pmatrix}$. Jeder Punkt L_{ik} bestimmt drei solcher Polvierseite. Zwei Dreiecke i, k, m und n, p, r sind einem Kegelschnitt C'_{ikm} umschrieben und Poldreiecke eines Kegelschnittes C_{ikm}. Auf C_{ikm} liegen die sechs Punktepaare

$$L_{ik}, L'_{ik};\; L_{km}, L'_{km};\; L_{mi}, L'_{mi};\; L_{np}, L'_{np};\; L_{pr}, L'_{pr};\; L_{rn}, L'_{rn},$$

die übrigen neun Punktepaare L, L' sind bezüglich C_{ikm} conjugirt. Zwei Kegelschnitte C_{ikm}, C_{ikn} haben die Punktepaare L_{ik}, L'_{ik}; L_{pr}, L'_{pr} gemeinsam, vier Kegelschnitte $C_{ikm}, C_{ikn}, C_{ikp}, C_{ikr}$ das Punktepaar L_{ik}, L'_{ik}. Im Punkte m und in den Punkten D_{ik}, D'_{ik} von λ_{ik} schneiden sich je zwei Gegenseiten des vollständigen Vierecks $L_{mi}, L'_{mi}, L_{km}, L'_{km}$. Drei Punktepaare D_{ik}, D'_{ik}; L_{mi}, L'_{mi}; L_{km}, L'_{km} bilden die Gegenecken eines Polvierseits Q_{ikm} von p^2 mit dem Diagonaldreieck i, k, m. Letzteres Diagonaldreieck gehört auch zu einem vollständigen Vierseit Q'_{ikm} mit den drei Paar Gegenecken D_{ik}, D'_{ik}; D_{km}, D'_{km}; D_{mi}, D'_{mi}. Die Vierseite Q_{ikm} sind Polvierseite der Kegelschnitte p^2 und C_{ikm}, die Vierseite $Q_{ik,m}$ Polvierseite eines durch die sechs Punkte L_{ik}, L'_{ik}; D_{im}, D'_{im}; D_{km}, D'_{km} gehenden Kegelschnittes $C_{ik,m}$ u. s. w. Js.

K. Haase. Elementare Beweise der Sätze von Brianchon und Pascal. Zeuthen T. (5) III. 23-29.

In diesem Aufsatze giebt der Verfasser mehrere neue Beweise der Sätze von Brianchon und Pascal. Er benutzt dabei nur elementare synthetische Betrachtungen, und die Beweise haben für alle Kegelschnitte Gültigkeit. Einer derselben kann als eine

Erweiterung des von Herrn Bing gegebenen Beweises für den Brianchon'schen Satz beim Kreise betrachtet werden.

Gm.

D. Montesano. Su due teoremi fondamentali di geometria projettiva. Batt G. XXIII. 285-287.

Zunächst wird der von Steiner (Schröter Vorl. § 33) und von Chasles auf synthetischem Wege bewiesene Satz, dass zwei Kegelschnitte einer Ebene immer ein Paar reeller Sehnen gemein haben, aufs neue in sehr anschaulicher Weise begründet. Dann wird der durch einen beliebigen Punkt gehende Kegelschnitt des durch die ersten Curven bestimmten Büschels auf lineare Weise construirt und hierbei das Theorem von Desargues, nach welchem die Kegelschnitte eines Büschels jede Gerade in den Punktepaaren einer Involution schneiden, bewiesen.

W. St.

E. Lebon. Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique. Nouv. Ann. (3) IV 338-342.

Es sei eine Ellipse gegeben durch die grosse Axe ab und den darauf liegenden Brennpunkt f, ausserdem eine Gerade G. Die Schnittpunkte der Ellipse mit der Geraden G werden durch folgende Construction gefunden. Man schlage mit fa einen Kreis, welcher die Verlängerung der grossen Axe in c schneidet, und errichte in a, b, c Lote auf dieser Axe. Die in a und b errichteten Lote schneiden die Gerade G in a_1 und b_1. Der Strahl fb_1 schneidet das in c errichtete Lot in c_1. Die Verbindungslinie $c_1 a_1$ trifft den Kreis in i_1 und j_1. Die Strahlen fi_1 und fj_1 schneiden alsdann die Gerade G in den Punkten, in welchen sie die Ellipse schneidet. Entsprechende Constructionen gelten für Hyperbel und Parabel.

Schn.

F. Meyer. Rein geometrische Beweise einiger fundamentaler Kegelschnittsätze. 22 S. Tübingen. Fues.

G. Knobloch. Zur Construction einer Ellipse aus einem Paar conjugirter Durchmesser. Zeitschr. Realsch. X. 270-278.

H. Drasch. Bemerkung zu diesem Aufsatz. Zeitschr. Realsch. X. 531-532.

Die von der Rechnung vielfach Gebrauch machende Lösung wird nach dreierlei Gesichtspunkten durchgeführt: erstens mittels centraler Projection, dann mittels schiefer Parallelprojection und schliesslich mit Hülfe des Pascal'schen Lehrsatzes. Drasch wendet dagegen ein, dass die perspectivischen Beziehungen zwischen Kreis und Ellipse in der Schule nicht gelehrt werden, dass also von einer unbewiesenen Voraussetzung ausgegangen werden muss. Gr.

Droz. Solution de la question 1456. Nouv. Ann. (3) IV. 432-433.

Sind a, a'; b, b'; c, c' die Durchschnittspunkte eines Kegelschnitts mit den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC, so berühren die sechs Geraden Aa, Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' einen zweiten Kegelschnitt.

Diesen Satz beweist der Herr Verfasser, indem er eine metrische Relation, die von Chasles herrührt, heranzieht. Wenn nämlich von den Ecken A, B, C eines Dreiecks ABC Tangenten an eine Curve n^{ter} Klasse gezogen werden, die die Gegenseiten resp. in $a, a', a'', \ldots$, $b, b', b'', \ldots$, c, c', c'' treffen, so ist:

$$\frac{aB.a'B \ldots bC.b'C \ldots cA.c'A \ldots}{aC.a'C \ldots bA.b'A \ldots cB.c'B \ldots} = (-1)^n.$$

Geht man nun zu dem Kegelschnitt über, der von den Seiten des Dreiecks ABC in a, a', b, b', c, c' getroffen wird, so giebt es jedenfalls einen Kegelschnitt, der die fünf Geraden Aa', Bb, Bb', Cc, Cc' zu Tangenten hat; und an diesen Kegelschnitt kann man

von A eine zweite Tangente ziehen, welche BC in X treffe; dann ist nach Chasles

$$\frac{XB.a'B.bC.b'C.cA.c'A}{XC.a'C.bA.b'A.cB.c'B} = 1.$$

Aber nach Carnot's Theorem ist:

$$\frac{aB.a'B.bC.b'C.cA.c'A}{aC.a'C.bA.b'A.cB.c'B} = 1.$$

Folglich $\frac{XB}{XC} = \frac{aB}{aC}$; und daher coincidiren die Punkte X und a, womit der Satz bewiesen ist. Mz.

Anonyme. Solution de la question 1461. Nouv. Ann. (3) IV. 434-435.

Es wird folgender Satz bewiesen: Zieht man durch einen der Durchschnittspunkte A zweier gleichseitigen Hyperbeln, die dasselbe Centrum O haben, eine Secante, welche die eine Curve in B, die andere in B' trifft; und fällt von diesen Punkten Lote BC, $B'C'$ auf die Tangenten, welche die Curven in A haben (BC ist Lot zu derjenigen Tangente, welche die durch B gehende Curve in A hat, $B'C'$ Lot zu derjenigen Tangente, die die durch B' gehende Curve in A hat), so ist der Winkel COC' das Vierfache des Winkels, den die Asymptoten der Curven mit einander bilden. Mz.

C. M. Piuma. Intorno ai triangoli iscritti in un' ellisse che hanno il centro di gravità in un punto dato della sua superficie. Batt. G. XXIII. 20-33.

Sind eine Ellipse und ein Punkt M innerhalb derselben gegeben, so existiren ∞^1 dieser Ellipse einbeschriebene Dreiecke, welche M zum Schwerpunkte haben. Je nach der Lage von M füllen ihre Ecken die ganze Curve aus oder nur einen gewissen Teil, der bestimmt wird. Unter diesen ∞^1 Dreiecken werden auch die von grösstem und kleinstem Inhalte construirt. Der Ort

von M, wenn dieses Maximum oder Minimum gegeben wird, ist eine Ellipse. Sc. (Lp.)

B. Sporer. Ein Satz über Kegelschnitte, die einem Dreieck einbeschrieben sind. Hoppe Arch. (2) II. 437-439.

Unter allen einem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnitten hat derjenige die kleinste Axenquadratsumme, welcher den Höhenschnitt zum Mittelpunkt hat. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller einbeschriebenen Kegelschnitte von gegebener Axenquadratsumme ist ein Kreis um den Höhenschnitt als Centrum. Einem Dreieck lassen sich höchstens sechs Kegelschnitte einbeschreiben, welche einem gegebenen Kegelschnitt congruent sind, und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Kreise um den Höhenschnitt des Dreiecks. Einem Kegelschnitt lassen sich höchstens 24 einem gegebenen Dreieck congruente Dreiecke umbeschreiben. Diese vier Sätze und einige ihnen verwandte werden abgeleitet. Die beiden hier zuletzt genannten Sätze gab Steiner (Ges. Werke, Bd. II. 346). Scht.

J. Wolstenholme, A. H. Curtis. Solution of question 7842. Ed. Times XLIII. 24-25.

Zwei Kegelschnitte U, U' schneiden sich in O. Die von einem beliebigen Punkte an U und U' gezogenen Tangenten schneiden die U und U' in O berührenden Geraden bezw. in P, Q und P', Q'. Die vier Geraden PP', QQ', PQ', QP' berühren einen Kegelschnitt, welcher die vier gemeinschaftlichen Tangenten von U und U' berührt und ungeändert bleibt, so lange der Punkt, von welchem aus die Tangenten gezogen wurden, auf einem festen Strahle durch O sich bewegt; derselbe artet jedoch in zwei Punkte aus (die Gegenecken des durch die gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten Vierseits), wenn dieser Strahl eine der drei gemeinschaftlichen Sehnen durch O ist. Lp.

H. PICQUET. Sur l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles harmoniquement. Nouv Ann (3) IV. 183-184

Der Verfasser giebt einen neuen, kurzen Beweis des von ihm schon in seiner analytischen Geometrie (S. 508) bewiesenen Satzes, dass die zwei Kreise harmonisch schneidenden Geraden einen Kegelschnitt einhüllen, der seine Brennpunkte in den Kreismittelpunkten hat und die Kreise in ihren Schnittpunkten berührt.

Scht.

A. VOSS. Ueber Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades umschrieben sind. Klein Ann XXV 39-71.

A. VOSS. Ueber Poncelet-Zeuthen'sche Polygone, welche einem Gebilde zweiten Grades eingeschrieben sind. Klein Ann XXVI 231-246

Herr Poncelet spricht in seinem Traité des prop. proj. (t. I. p. 78) den folgenden Satz aus: Bei einem n-Seit, dessen sämtliche Seiten eine und dieselbe Linie oder Fläche zweiten Grades berühren, entstehen auf jeder Seite durch den Berührungspunkt zwei Abschnitte, so dass das Product von n nicht aufeinander folgenden Abschnitten gleich dem Product der n übrigen nicht aufeinander folgenden Abschnitte ist. Nach der von Poncelet befolgten, auf dem Carnot'schen Satze beruhenden Methode kann man indessen nur schliessen, dass das eine Product dem andern dem absoluten Werte nach gleich sei. Jedoch bemerkte Plücker gelegentlich (System der analytischen Geometrie, S. 44), dass für ein einem Kegelschnitte umschriebenes Dreiseit die beiden Producte auch dem Zeichen nach gleich seien, und hieraus folgert der Verfasser, dass dies bei einem Kegelschnitt für jedes Polygon der Fall sein muss. Dann machte Herr Giuseppe Bruno (Torino Atti. F. d. M. XIV. 1882. 551) darauf aufmerksam, dass das aus dem obigen Satze abgeleitete, übrigens schon von Brianchon ausgesprochene Corollar (in jedem einer Fläche zweiten Grades umschriebenen räumlichen Viereck liegen die Berührungspunkte in einer und derselben Ebene) nicht allgemein richtig sei, dass vielmehr der

Ort der Berührungspunkte der vierten Seiten eines Vierseits, von dem die Berührungspunkte der drei ersten Seiten gegeben sind, aus vier reellen Kegelschnitten besteht, von denen nur einer mit dem Poncelet'schen zusammenfällt. Der Verfasser stellt sich nun in der vorliegenden Abhandlung die Frage, unter welchen Umständen überhaupt n beliebig auf einer Fläche zweiten Grades gegebene Punkte Berührungspunkte der Seiten eines geschlossenen Polygons werden können; naturgemäss erweitert sich diese Frage zu einer vom Verfasser vollständig durchgeführten Untersuchung über quadratische Mannigfaltigkeiten F von $m-2$ Dimensionen überhaupt, wodurch für eine Vergleichung der scheinbar ganz heterogenen Verhältnisse in der Ebene, dem Punktraum und dem Linienraum Bahn gebrochen ist. Dabei zeigt sich, dass die Bestimmung solcher Polygone, deren Seiten nicht Erzeugende von F sind, immer mittels linearer Gleichungen erfolgt, während die aus Erzeugenden gebildeten Polygone von den Wurzeln einer reciproken Gleichung abhängen. Bei der Discussion der letzteren treten zwei schiefe Invarianten der Punktgruppe auf, welche mit den in Angriff genommenen Fragen wesentlich verknüpft sind; für eine projectiv allgemeine Fläche zweiten Grades existiren bei ungeradem n stets zwei Polygone von der erwähnten Beschaffenheit, bei geradem n aber nur dann, wenn eine der Invarianten verschwindet, dann aber gleich unendlich viele. In der zweiten Abhandlung zeigt der Verfasser, dass von jenen beiden schiefen Determinanten auch die verwandte Aufgabe abhängt, ein geschlossenes Polygon zu construiren, dessen Ecken auf einem Gebilde zweiten Grades liegen, und dessen Seiten bezüglich durch gegebene feste Punkte gehen. So wird die Theorie der Poncelet-Zeuthen'schen Polygone (Poncelet, Applications d'analyse et de géométrie, Paris 1862, p. 145-248. Traité des propr. proj., I. p. 338-342. Zeuthen, Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre, Math. Ann. XVIII. p. 33-40) und entsprechender Gebilde in höheren projectiven Räumen auf eine gemeinsame Quelle zurückgeführt, nämlich auf die Theorie der schiefen Determinanten. Scht.

M. Pelišek. Ueber die Normalen der Kegelschnitte und damit verwandte Probleme. Prag. Ber. (1883) 126-156.

Die Arbeit knüpft an einen Satz von Chasles an, der sich in seinem Traité des sections coniques pag. 145, § 223 findet. Derselbe lautet: Dreht man eine Gerade um einen festen Punkt und bestimmt die Pole dieser Geraden in Bezug auf einen Kegelschnitt, so umhüllen die Senkrechten, welche von jedem Pol auf die zugehörige Gerade gefällt werden, eine Parabel. Dieselbe hat zu Tangenten die Polare des festen Punktes und die Tangenten in den Fusspunkten der Normalen, welche von dem festen Punkte auf den Kegelschnitt gefällt werden können. Für diesen Satz wird ein einfacher Beweis in synthetischer Form gegeben und gezeigt, dass die aus dem Pol p und dem Kegelschnitt K abgeleitete Parabel Π für alle mit K confocalen Kegelschnitte dieselbe ist. Sie ist also die Umhüllungscurve der Polaren des Punktes p in Bezug auf das System der confocalen Kegelschnitte und lässt sich auch auffassen als die Enveloppe der Normalen in den Berührungspunkten der von p an diese Kegelschnitte laufenden Tangenten. Die Fusspunkte der von p an die Kegelschnitte gelegten Normalen bilden alsdann die Fusspunktencurve von Π in Bezug auf den Pol p. Die Construction dieser Curve wird gegeben und gezeigt, dass diese Curve identisch ist mit dem Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche sich in den Brennpunkten von K doppelt berühren, oder auch mit dem Ort der Fusspunkte der von p auf diese Kegelschnitte gefällten Normalen. Im Zusammenhange mit dieser Curve, der Parabel Π und ihrem Polargebilde für den Kegelschnitt K, das sich als eine gleichseitige Hyperbel darstellt, stehen die verschiedenartigsten Relationen, die der Verfasser in seiner Arbeit entwickelt.
Schn.

K. Lauermann. Construction der von einem beliebigen Punkte der Ebene ausgehenden Normalen einer Ellipse. Schlömilch Z. XXX. 52-57.

Der Herr Verfasser erinnert zuerst daran, dass er früher eine einfache Lösung des Problems gegeben hat, von einem Punkte einer Ellipsennormale die drei übrigen Normalen auf die Ellipse zu fällen, und behandelt dann im Nachfolgenden den allgemeinen Fall, für welchen der Ausgangspunkt der Normalen nicht gerade auf einer bereits construirten Normale, sondern ganz beliebig in der Ebene gegeben ist. Die Lösung beruht erstens auf dem Satze, dass die excentrischen Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Fusspunkte der vier von einem Punkte an die Ellipse gehenden Normalen 180° zur Summe haben, und zweitens auf dem Satze, dass die excentrischen Winkel von vier Punkten, in denen ein Kreis die Ellipse schneidet, ein gerades Vielfaches von 180° zur Summe hat. Durch eine Transformation, welche die Normalenfusspunkte, die auf einer gewissen gleichseitigen Hyperbel sind, in vier Punkte eines Kreises überführt, wird das Problem auf elementare Weise, also mit Zirkel und Lineal, gelöst. Mz.

F. Machovec. Beitrag zu den Eigenschaften der Krümmungsmittelpunkte der Kegelschnitte. Prag. Ber. 1884. 345-351. Böhmisch.

Der Verfasser beweist zuerst folgenden Satz:

Bezeichnen a und b die Durchschnittspunkte der auf den Fahrstrahlen eines beliebigen Punktes m des Kegelschnittes in den Brennpunkten errichteten Senkrechten mit der zugehörigen Normale, so wird der Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes im Punkte m von diesem Punkte durch die Punkte a und b harmonisch getrennt.

Auf Grund dieses Satzes schliesst er, dass die zweiten Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche eine beliebige Curve in einem Punkte m osculiren, und deren erste Brennpunkte auf einem jene Curve in m berührenden Kreise liegen, ebenfalls einem jene Curve in m berührenden Kreise angehören. Alle Paare dieser Kreise bilden einen involutorischen Büschel.

Daraus entwickelt der Verfasser verschiedene Sätze über Parabeln und gleichseitige Hyperbeln, welche eine beliebige

Curve in einem Punkte osculiren, und zeigt endlich, wie man die Brennpunkte eines Kegelschnittes von gegebenem Mittelpunkte, der eine Curve in einem Punkte osculirt, ermitteln kann.

Std.

J. Cardinaal. Het kegelsnedennet en een daaruit afgeleid vlak stelsel. Nieuw Arch. XII. 169-173.

Der Zweck dieser Arbeit ist die Anwendung der von Herrn Reye in der Theorie der Kegelschnitte benutzten Methode auf ein Kegelschnittsystem, sowohl auf den Bündel, wie auf das Netz. Die Eigenschaften des erstgenannten Systems werden hier als bekannt vorausgesetzt, aber die des zweiten von neuem abgeleitet. Einzelne der so gefundenen Eigenschaften waren bereits bekannt, andere neue werden diesen zugefügt. Weiter werden aus den Ergebnissen einige Constructionen abgeleitet. Dazu gehören: 1) Durch zwei reelle Punkte einen Kegelschnitt des Netzes zu construiren. 2) Durch zwei conjugirt imaginäre Punkte, welche durch eine elliptische Involution auf einer Geraden bestimmt sind, einen Kegelschnitt des Netzes zu legen. 3) Durch einen Punkt einen Kegelschnitt des Netzes zu legen, welcher eine gegebene Gerade berührt. 4) Durch einen Punkt eine gleichseitige Hyperbel zu construiren, welche zu dem Netz gehört. 5) Einen Kegelschnitt des Netzes zu construiren, welcher zwei gegebene Gerade berührt. 6) Dasselbe, wenn ein gegebener Punkt ihr Mittelpunkt ist.

Weiter werden die Curven behandelt, welche durch den Durchschnitt der conjugirten Kegelschnitte aus zwei projectiven Bündeln entstehen, und daraus einige Eigenschaften der Curven dritter Ordnung abgeleitet. Sodann stellt der Verfasser die reciproken Eigenschaften der bereits gefundenen auf, woraus sich die von Curven der dritten Klasse ergeben. Schliesslich weist er auf die Uebereinstimmung zwischen den gefundenen Eigenschaften und der geometrischen Verwandtschaft des zweiten Grades hin.

G.

P. DEL PEZZO. Sui sistemi di coniche. Nap. Rend. XXIII. 61-73.

Diese Arbeit über die Theorie der Systeme ∞^1 und ∞^2 von Kegelschnitten enthält neue Beweise des Lehrsatzes von Chasles-Halphen in betreff eines Systems ∞^1 und desjenigen von Cremona für Systeme ∞^2, die gewissen Bedingungen genügen. Hierzu bedient sich der Verfasser einer Methode, die derjenigen ähnlich ist, welche Clebsch gebraucht hatte (Math. Ann. VI.), um das Chasles'sche Theorem zu beweisen. Der Verfasser verweilt indessen zweckmässiger Weise länger als Clebsch bei der Abbildung eines rationalen Systems ∞^2 von Kegelschnitten durch die Punkte der Ebene; dies ermöglicht ihm die Erforschung der Singularitäten dieses Systems. Da ein beliebiges System ∞^1 immer in einem rationalen System ∞^2 enthalten ist (auch Clebsch benutzt diesen Umstand), so dient diese Abbildung auch zur Untersuchung der Systeme ∞^1.

Se. (Lp.)

V. RETALI. Sopra una serie particolare di coniche d'indice due. Bologna Mem. (4) V. 373-386.

Es handelt sich um Kegelschnitte, die zu sich selbst polarr sind in Bezug auf andere Kegelschnitte. Ihre Eigenschaften haben bekanntlich schon öfter die Geometer beschäftigt. Der Verfasse gelangt auf synthetischem Wege sowohl zu bekannten als auch zu einigen neuen Ergebnissen; jedoch ist Referent der Meinung, dass oft die befolgte Methode nicht die einfachste und lichtvollste ist.

Se. (Lp.)

W. FIEDLER. Ueber die Büschel gleichseitiger Hyperbeln, den Feuerbach'schen Kreis und die Steiner'sche Hypocykloide. Wolf Z. XXX. 389-402.

Bekanntlich schneiden sich irgend zwei Tangenten eines Kegelschnittes auf einer Diagonale des Viereckes, das aus ihren Berührungspunkten und aus irgend zwei anderen Punkten des

Kegelschnittes sich bilden lässt. Wendet man dies auf die beiden Asymptoten und je zwei von drei Punkten A, B, C einer gleichseitigen Hyperbel an, so erhält man den Satz: Bildet man über den Diagonalen BC, CA, AB Rechtecke, deren Seiten die Asymptoten-Richtungen einer ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbel haben, so schneiden sich ihre anderen Diagonalen in dem Mittelpunkte der Hyperbel. Aendern sich die Asymptoten-Richtungen, so durchlaufen die beweglichen Ecken der Rechtecke Kreise K_A, K_B, K_C mit den Durchmessern BC, CA, AB. Die beweglichen Diagonalen drehen sich also um die Mitten A_1, B_1, C_1 der Seiten des Dreiecks mit der doppelten Geschwindigkeit, wie die Asymptoten-Richtungen. Hiermit ist aufs neue und sehr einfach bewiesen, dass die ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ihre Mittelpunkte auf dem Feuerbach'schen Kreise haben, der ja durch A_1, B_1, C_1 unzweideutig bestimmt ist. Je zwei der drei Kreise K_A, K_B, K_C schneiden sich in einem Höhen-Fusspunkt von ABC. Auch ohne zu wissen, dass alle gleichseitigen Hyperbeln sich im Höhenpunkte treffen, sieht man also, dass der Feuerbach'sche Kreis die Fusspunkte der Höhen enthält.

Die Asymptoten der Hyperbeln umhüllen eine Steiner'sche Hypocykloide. Für diese Curve erhält man also folgende Construction: Auf einem Kreise nehme man C_1 an und, von ihm ausgehend, die Gerade g; durch jeden Punkt P des Kreises ziehe man nun Parallele zu den Geraden, welche die Winkel zwischen PC_1 und g halbiren. Diese Parallelen umhüllen eine Hypocykloide, für welche der gegebene Kreis der Hauptkreis ist.

E. K.

C. Intrigila. Studio geometrico sull' ipocicloide tricuspide. Batt. G. XXIII. 253-264.

Die Hypocykloide mit drei Spitzen, die schon von verschiedenen Geometern untersucht worden ist, insbesondere von Steiner und Cremona, wird in dieser Arbeit als die Einhüllungscurve der Scheiteltangenten der einem Dreiecke einbeschriebenen Parabeln oder der Asymptoten der diesem Dreiecke umbeschriebenen

gleichseitigen Hyperbeln behandelt. Die Schlussfolgerungen sind synthetisch und elementar; die Ergebnisse umfassen die bemerkenswertesten bekannten Eigenschaften der Hypocykloide und auch einige neue Sätze. Se. (Lp.)

J. de Vries. Over vlakke krommen der derde orde. Nieuw Arch. XII, 82-93.

Herr Weyr macht in seiner Abhandlung „Erzeugung der Curven dritter Ordnung mittels symmetrischer Elementensysteme zweiten Grades" (Wien Ber. 1874) die Bemerkung, dass die von ihm gefundene Art der Erzeugung die Grundlage zu einer Theorie der Curven dritter Ordnung geben könne. In der vorliegenden Arbeit wird nun ein Versuch gemacht, die Haupteigenschaften dieser Curven mit Hülfe der Theorie der mehrdeutigen Verwandtschaften abzuleiten. Viele wichtige Sätze werden auf diese Weise sehr einfach bewiesen. Dieselben betreffen die Tangenten, ihre Berührungspunkte und gegenseitigen Schnittpunkte, das in die Curve einschreibbare vollständige Viersert, die Polaren der Wendepunkte, die verwandte Cayley'sche und die Hesse'sche Curve und andere Eigentümlichkeiten dieses Curvensystems. G.

L. Cerio. Sulle forme di terzo grado generate da due forme elementari projettive di primo e di secondo grado di un piano o di una stella. Annuario del R. Ist. Tecn. di Bari.

Der Ort des Schnittpunktes zweier entsprechenden Strahlen aus zwei projectivischen Strahlenbüscheln, von denen der eine erster, der andere zweiter Klasse ist, und die in derselben Ebene liegen, ist eine Curve dritter Ordnung, die im Centrum des Büschels erster Klasse einen Doppelpunkt hat und den Träger des Büschels zweiter Klasse dreimal berührt.

Der aus den Elementen der projectivischen Geometrie und dem Chasles'schen Correspondenz-Principe geschöpfte Beweis dieser Sätze, der ihnen dual zugeordneten und derjenigen, welche

ihnen im Strahlen- und Ebenenbündel entsprechen, bildet den Gegenstand der Note des Herrn Certo. La. (Lp.)

V. MARTINETTI. Ricerche sulle curve piane del terzo ordine. Batt. G. XXIII. 37-47.

Sind P, Q, R die drei Schnittpunkte eines Strahles s mit der Hesse'schen Curve C^3 eines Kegelschnittnetzes, so liegen die den Punkten Q, R bezüglich des Netzes conjugirten Punkte Q_1, R_1 ebenfalls mit dem Punkte P in einer Geraden s_1. Im Strahlenbüschel erster Ordnung P entspricht somit jedem Strahle s eindeutig ein Strahl s_1, und zwar ist diese Zuordnung, wie Cayley bewiesen hat, eine involutorische.

Die zwei beliebigen Punkten A, B der C^3 zugehörigen involutorischen Strahlenbüschel bestimmen eine involutorische Transformation zweiter Ordnung erster Klasse, sobald einem beliebigen Punkte M der Ebene derjenige Punkt M_1 zugewiesen wird, in dem sich die den Strahlen AM, BM zugeordneten Strahlen AM_1, BM_1 schneiden. Jeder Punkt der C^3 geht hierbei in den ihm conjugirten, kurz die C^3 in sich selbst über. Solcher quadratischen Transformationen I_2 giebt es doppelt unendlich viele.

Aus den Transformationen I_2 leitet der Verfasser allgemeine Jonquières'sche Transformationen ab, sie bringen, wenn von gerader Ordnung, jeden Punkt der C^3 mit dem ihm conjugirten, wenn von ungerader Ordnung, jeden Punkt der C^3 mit sich selbst zur Deckung. Js.

P. H. SCHOUTE. Bemerkung anlässlich des Aufsatzes von Herrn O. Hermes über eine gewisse Curve dritten Grades. Kronecker J. 10C. 98-103.

Im Jahre 1852 hatte Jacob Steiner (Crelle's J. XLV. 375, oder Ges. Werke, II. 487) den folgenden Satz aufgestellt: Sind in einer Ebene zwei begrenzte Geraden AB und CD in beliebiger

fester Lage gegeben, so besteht der Ort desjenigen Punktes, aus welchem dieselben unter gleichen oder supplementaren Winkeln gesehen werden, aus zwei Curven dritten Grades. Die neun gemeinsamen Punkte beider Curven sind: die vier Endpunkte A, B, C, D, der Schnittpunkt von AB und CD, die beiden Punkte, von denen aus AB und CD unter rechten Winkeln erscheinen, sowie endlich zwei unendlich ferne imaginäre Punkte. Dann hatte Herr Hermes (Kronecker J. XCVII. 177, F. d. M. XVI. 644) auf analytische Weise denjenigen speciellen Fall dieses Satzes behandelt, welcher sich ergiebt, wenn B und C zusammenfallen. Der Verfasser weist nun nach, wie die Resultate des Herrn Hermes sich den allgemeineren Ergebnissen unterordnen, welche die Herren K. Küpper, C. Pelz (Wien. Ber. LXIV. 730: Ueber das Problem der Glanzpunkte), H. Schröter (Math. Ann. V. 50) auf synthetischem Wege gefunden haben. Zum Schluss liefert der Verfasser eine einfache Parameter-Darstellung der betrachteten Curven. Zahlreiche Figuren erleichtern das Verständnis.

Scht.

L. Mirman. Sur la cissoïde de Dioclès. Nouv. Ann. (3) IV. 372-374.

Ein elementar-geometrischer Beweis, dass der Ort der Symmetriepunkte des Scheitels einer Parabel in Bezug auf ihre Tangenten eine Cissoide des Diokles ist. Schn.

K. Habart. Ueber gewisse Curven dritten Grades, die bei Scharen confocaler Kegelschnitte auftreten. Wien. Pichler's Wwe. u. S.

P. H. Schoute. Questions qui se rapportent à un faisceau de cubiques planes. C. R. CI. 736-739, 805-808.

Denkt man sich bei einem gegebenen Büschel von Plancurven dritter Ordnung in einem der Basispunkte A eine $(3k-1)$-

punktig berührende Curve k^{ter} Ordnung zu jeder der ∞^1 kubischen Curven, so wird jede Curve noch in einem neuen Punkt A_1, dem ersten Tangentialpunkte k^{ten} Grades des Punktes A, geschnitten. Construirt man dann weiter aus jedem Punkte A_1 den Punkt A_2 in derselben Weise, wie A_1 aus A entstand, und fährt so fort bis zum Punkte A_n, so erhält man auf jeder Curve einen Punkt A_n als n^{ten} Tangentialpunkt k^{ten} Grades. Der Ort dieser Punkte A_n ist es nun, den der Verfasser nebst manchen damit zusammenhängenden Fragen in der zweiten der beiden vorliegenden Abhandlungen discutirt. Dabei ergiebt sich z. B., dass dieser Ort eine unicursale Curve ist, welche die Ordnung $\frac{1}{3}[(1-3k)^n-1]$ hat, welche $\frac{1}{9}[2(1-3k)^n-5][2(1-3k)^n+1]$ mal durch den Basispunkt A hindurchgeht, und jeden andern Basispunkt $\frac{1}{9}[4(1-3k)^n+5][(1-3k)^n-1]$-mal trifft, und welche keine andern vielfachen Punkte enthält, sodass diese sie vollständig bestimmen. Die erste Abhandlung behandelt den Specialfall $k=1$. Auch der Fall, dass n negativ ist, erhält Sinn und wird berücksichtigt.

Scht.

H. NAGELSBACH. Die Kreiskonchoiden. Pr. Erlangen. 32 S. 8°.

Die Untersuchung gründet sich auf eine eindeutige, Cremona'sche Transformation der Ebene, nämlich einen speciellen Fall einer solchen Transformation, bei welcher alle Punkte einer Curve dritter Ordnung fest bleiben, und jeder Strahl eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt auf der Curve liegt, so in sich transformirt wird, dass die entsprechenden Punkte eine Involution bilden, deren Ordnungspunkte die beiden anderen Schnittpunkte des Strahls mit der Curve sind. Zerfällt die Curve in einen Kreis und die unendlich ferne Gerade, so ergiebt sich die hier benutzte Transformation. Dieselbe wird im Abschnitte I rein geometrisch definirt und nach ihren Haupteigenschaften untersucht. Im Abschnitt II wird dann durch wiederholte Anwendung der Transformation mit alternirenden Polen aus dem Kreis eine Reihe von Curven erzeugt. Die erste ist die unter dem Namen Kreiskonchoide oder Pascal'sche Schnecke

bekannte Curve, die folgenden Curven nennt der Verfasser daher Kreiskonchoiden höherer Ordnung. Der Abschnitt III zeigt, dass bei allen diesen Transformationen gewisse Kreispaare immer sich selbst wieder erzeugen, sodass alle der Reihe nach einander entsprechenden Punkte der Ebene entweder die Eckpunkte von regulären n Ecken bilden, die diesen Kreisen eingeschrieben sind, oder die Kreispaare durchlaufen. Abschnitt IV beweist die Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft der Kreiskonchoide erster Ordnung. Jede Gerade, welche durch den einen Pol geht und mit der Hauptaxe den Winkel α bildet, schneidet die Curve in $n+2$ Punkten, sodass die Verbindungslinie der Schnittpunkte und des zweiten Poles mit der Geraden beziehungsweise die Winkel

$$\frac{\alpha}{n+2},\quad \frac{\alpha+\pi}{n+2},\ \ldots,\ \frac{\alpha+(n-1)\pi}{n+2},$$

unter sich also die Winkel $\frac{\pi}{n+2}$ bilden. Im Abschnitt V wird das Geschlecht der Curven und die Anzahl der Schnittpunkte je zweier derselben untersucht. Hierbei wird der Umstand benutzt, dass jede Curve die unendlich fernen imaginären Kreispunkte als vielfache Punkte mit einer gemeinsamen Tangente enthält. Nach dieser rein geometrischen Betrachtung werden im Abschnitt VI die Gleichungen der Curven aufgestellt. Die Gleichungen in Polar Coordinaten ergeben sich von selbst; z. B. in Bezug auf den ersten Pol:

$$r = a\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2n}\alpha}{\sin\frac{1}{2n}\alpha} \quad \text{und} \quad r = a\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2n+2}\alpha}{\sin\frac{1}{2n+2}\alpha}.$$

Besonders geeignet zeigt sich ein Bipolarsystem, von dem leicht zu gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten übergegang[en] werden kann. Zuletzt wird noch die Uebereinstimmung d[er] Transformation mit der allgemeinen Theori[e der] Cremona'schen Transformation untersucht und dabei gef[...] hier der besondere Fall vorliegt, wo je zwei Fu[...] den

unendlich fernen Kreispunkten so zusammenfallen, dass alle Transformationscurven sich in diesen Punkten berühren.

Lp.

P. H. Schoute. Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. Hoppe Arch. (2) II. 113-128 u. III. 113-137.

Der erste Abschnitt enthält eine Reihe von einleitenden Sätzen, welche grösstenteils auf die gleichseitige Hyperbel Bezug nehmen. Der zweite Abschnitt behandelt zunächst diejenige quadratische Transformation, bei welcher jedem Eckpunkte des Fundamentaldreiecks dessen Gegenseite entspricht. Es ergiebt sich, dass in jeder involutorischen, quadratischen Transformation, deren Fundamentaldreieck ABC ein Poldreieck eines gegebenen Kegelschnitts K ist, diesem Kegelschnitte K eine Curve C^4 entspricht, welche in A, B, C drei doppelte Inflexionsknoten besitzt; ein Satz, der auch umgekehrt gilt, und von Herrn Küpper herrührt. In diesem Zusammenhange ergeben sich nun die Eigenschaften der im Titel genannten Curven in elegantester Weise. Wir heben hervor, dass die Wendetangenten eines Doppelpunktes von den Verbindungsgeraden zwischen ihm und den beiden andern Schnittpunkten harmonisch getrennt werden, und dass dieselben in ihren Schnittpunkten mit den Gegenseiten des Doppelpunkt-Dreiecks von einem Kegelschnitt berührt werden, von dem ABC ein Poldreieck ist. Weitere Sätze beziehen sich auf diesen Kegelschnitt, den der Verfasser „Wendeschnitt“ nennt, und auf Normalcurven C^4, d. h. solche, die einen Mittelpunkt haben, in dem sich zwei Symmetrie-Axen senkrecht schneiden. Durch Bezugnahme auf die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte ergeben sich viele metrische Eigenschaften.

Scht.

C. Beyel. Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten. Schlömilch Z. XXX. 1-27, 65-78.

Die Theorie der Curven vierter Ordnung mit drei doppelten

Inflexionsknoten C^4 wird entwickelt, ausgehend von ihrer Erzeugung durch einen involutorischen Strahlenbüschel erster Ordnung M und einen zu ihm in ein zweideutiger Verwandtschaft stehenden Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Sind nämlich x und x_1 ein Paar zugeordneter Strahlen des Strahlenbüschels M, so schneiden diejenigen Strahlen des Büschels zweiter Ordnung, deren Berührungspunkte auf x gelegen sind, x_1 in Punkten der C^4.

An die Untersuchung der Singularitäten der C^4 und ihrer Beziehung zu einander knüpft sich eine Darstellung der Hauptformen der Curve. Js.

W. Fiedler Geometrische Mitteilungen VI-IX

Wolf Z. XXIX. 332-365. 1884

VI. Die Curven vierter Ordnung oder Klasse nach darstellend-geometrischer Methode.

Die Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung wird von einem Punkte des Raumes aus im allgemeinen durch einen Kegel vierter Ordnung vom Geschlechte Eins projicirt. Die besondere Natur seiner Singularitäten hängt von der Lage seiner Spitze ab. So sind seine Doppelstrahlen reell oder imaginär, je nachdem die Spitze eine Regelfläche des Büschels bestimmt oder nicht. Der Kegel hat einen oder zwei Rückkehrstrahlen, je nachdem die Spitze ein einfacher oder ein Doppelpunkt der Tangentenfläche ist, u. s. w.

VII. Drei gleichseitige Rotationshyperboloide desselben Büschels.

Es handelt sich um (einschalige) Hyperboloide, welch[illegible] unendlich fernen Kegelschnitt mit einander gemeinsa[illegible] Ihre Mittelpunkte liegen folglich in einer geraden Li[illegible] ihre Axen sind zu einander parallel. Zu der Ebene, in [illegible] letzteren sich befinden, steht die Ebene des zweiten gemei[illegible] Kegelschnitts senkrecht. Durch orthogonale Projection i[illegible] tung der Axen erhält man aus ihm einen Kegelschnitt, w[illegible] die Projectionen der drei Kegelkreise [illegible] bei

H. Picquet. Sur trois problèmes fondamentaux relatifs aux surfaces du second degré. Kronecker J. IC 225-232.

Ueber das Problem, zu sieben Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ordnung den achten zu finden, giebt Herr Caspary folgende Literatur an: 1) Hesse, Kronecker J. XX. 304; XXVI. 147; LXXIII. 371; LXXXV. 304; 2) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 366; 3) H. Müller, Math. Ann. I. 409; 4) Sturm, Math. Ann. I. 553; 5) P. Serret, Géometrie de direction, p. 311; 6) Picquet, Kronecker J. LXXIII. 367; 7) Reye, Geometrie der Lage, II. 152; 8) Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, 704; 9) Zeuthen, Danske Vid. Selsk. Jahrg. 1880 und Math. Ann. XVIII. 63. Dazu fügt Herr Schröter noch: 10) Lamé, examen des diff. méthodes, Paris 1818, p. 38.

Wiederum liegt eine Reihe von Arbeiten vor, welche das Problem behandeln und in elegantester Weise lösen. Die erste von den oben genannten, auf das Problem bezüglichen Arbeiten, ist dem Nachlasse Hesse's entnommen und von Herrn Caspary veröffentlicht. Die im Titel genannten Substitutionen bewirken für $n = 2$ oder $n = 3$ die Transformationen rechtwinkliger Coordinatensysteme in der Ebene oder im Raume. Durch eine Discussion des nächsten Falles $n = 4$ aber erledigt sich das Problem, aus sieben gegebenen Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ordnung den achten zu bestimmen. Die auf solche Weise erzielte Lösung des Problems gipfelt bei Hesse in dem folgenden Theorem: Wenn man von den acht Schnittpunkten dreier Oberflächen zweiter Ordnung irgend sechs Punkte als die Ecken eines räumlichen Sechsecks U betrachtet, hierauf von dem siebenten Schnittpunkte der drei Oberflächen aus drei Gerade zieht, welche die Gegenseiten des räumlichen Sechsecks U paarweise schneiden, dann die sechs Schnittpunkte in der Reihenfolge der Seiten als die Ecken eines dem Sechseck U einbeschriebenen Sechsecks V betrachtet, und endlich durch Benutzung des achten Schnittpunkts ein zweites Sechseck V' in derselben Weise construirt, wie V gefunden wurde, so liegen V und V' auf einem

und demselben Hyperboloide. Herr Caspary leitet nun in seinem Aufsatze aus dem eben genannten Hesse'schen Theorem eine einfache Construction des achten Schnittpunkts ab, indem er davon ausgeht, dass das Problem in den schönen und umfassenden Untersuchungen der Herren von Staudt, H. Müller, R. Sturm, P. Serret, Picquet, Reye, Schröter, Zeuthen zwar eingehend behandelt sei, eine einfache Construction bisher aber deshalb nicht gegeben sei, weil die dabei benutzten Hyperboloide und Raumcurven dritter Ordnung die wirkliche Ausführung der Construction sehr compliciren. Die Caspary'sche Construction lautet folgendermassen: Die sieben gegebenen Schnittpunkte seien U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6. Man verbinde U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 in dieser Reihenfolge zu einem Sechseck, lege dann durch den siebenten Punkt U_0 und die Geraden $U_4 U_5$, $U_5 U_6$, …, $U_3 U_4$ sechs Ebenen, deren Schnittpunkte mit den Geraden $U_1 U_2$, $U_2 U_3$, …, $U_6 U_1$ beziehungsweise V_1, V_2, …, V_6 heissen mögen. Ferner lege man durch den Schnittpunkt der Geraden $V_1 V_4$ mit der Ebene $U_1 U_3 U_5$ und die Gerade $V_3 U_6$ eine Ebene E. Dann suche man die Schnittpunkte W und W' dieser Ebene E mit $U_1 U_2$ und $U_2 U_3$. Endlich lege man durch W', V_4, V_1 eine zweite Ebene E', deren Schnittpunkt mit $U_3 U_4$ durch W'' bezeichnet werde. Dann schneiden sich die drei Ebenen, welche durch W, U_4, U_5, durch W', U_5, U_6 und durch W'', U_6, U_1 gelegt werden können, in dem gesuchten achten Schnittpunkte U_7. Diese aus der genannten Hesse'schen Arbeit abgeleitete Construction des Herrn Caspary gab nun Herrn Schröter Veranlassung, die erste von Hesse gegebene Lösung in der Richtung zu vervollständigen, dass die Construction die gewünschte Einfachheit erhält, nur das Ziehen von Geraden, Legen von Ebenen, Suc[illegible] punkten verlangt, und überdies den Vorteil biet[illegible] nur in einer und derselben Ebene zu operiren [illegible] Schröter findet zwei derartige, einander parallel[illegible] gen, von denen jede ziemlich symmetrisch ist, [illegible] welche durch Aufopferung der Symmetrie noch be[illegible] wird. Von den beiden symmetrischen Lösungen la[illegible] folgendermassen: Die sieben g[illegible] Schnittpu[illegible]

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 heissen. Man bestimme auf der Ebene 567 die sechs Schnittpunkte P_{12}, $P_{13}, \ldots, P_{34}$ mit den Verbindungslinien der vier Punkte 1, 2, 3, 4. Dann suche man die neun Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks 567 mit den Seiten des Dreiecks P_{12}, P_{13}, P_{14}, welche Q_{ik} heissen mögen, wo i eine der Zahlen 5, 6, 7 ist, k eine der Zahlen 2, 3, 4, so dass z. B. Q_{72} der Schnittpunkt der Seite 56 mit der Seite P_{13} P_{14} ist. Dann liegen in einer Geraden erstens die drei Punkte 5, $(P_{12}\,Q_{73}, P_{13}\,Q_{72})$ und $(P_{13}\,Q_{64}, P_{14}\,Q_{63})$, zweitens die drei Punkte 6, $(P_{12}\,Q_{53}, P_{13}\,Q_{52})$ und $(P_{13}\,Q_{74}, P_{14}\,Q_{73})$, drittens die drei Punkte 7, $(P_{12}\,Q_{63}, P_{13}\,Q_{62})$ und $(P_{13}\,Q_{54}, P_{14}\,Q_{53})$. Die so erhaltenen drei Geraden schneiden sich nun in einem und demselben Punkte A. Ebenso erhält man zwei Punkte B und C, die durch Bevorzugung der Indices 14 bez. 12 ebenso entstehen, wie A durch Bevorzugung des Index 13 entstand. Legt man endlich noch die drei Ebenen 34 A, 42 B, 23 C, so erhält man den gesuchten achten Punkt als Schnittpunkt dieser drei Ebenen.

Unabhängig von diesen Arbeiten der Herren Caspary und Schröter nahm auch Herr Picquet etwa gleichzeitig die lineare Lösung des Problems wieder in Angriff, und zwar im Zusammenhang mit den Aufgaben, die Punkte einer durch neun gegebene Punkte gehenden Fläche zweiter Ordnung zu construiren, und die Punkte einer durch acht gegebene Punkte gehenden Raumcurve vierter Ordnung zu bestimmen. Hinsichtlich der beiden letzten Probleme hatte Borchardt zu der im LXXIII. Bande erschienenen Abhandlung des Herrn Picquet die Bemerkung hinzugefügt, dass die gelieferten Constructionen nicht linear im gewöhnlichen Sinne des Wortes wären. Hier weist nun der Verfasser nach, dass sie dies doch sind. Was seine Construction des achten Schnittpunktes dreier durch sieben gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gehenden Flächen zweiten Grades anbetrifft, so beruht dieselbe auf der Betrachtung, dass in der Configuration, welche eine Ebene aus den zehn Verbindungslinien und zehn Verbindungsebenen eines räumlichen Fünfecks 12345 ausschneidet, jeder Punkt, z. B. (12) der zugehörigen Seite (345) in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt K polar ist, und

dass es daher darauf ankommt, unter allen ∞^1 durch 67 gehenden Ebenen eine solche auszuwählen, dass die Kegelschnitte welche die ∞^2 durch die sieben gegebenen Punkte gehenden Flächen auf ihr bestimmen, und welche daher dem durch 12345 bestimmten Polarkegelschnitt K harmonisch umschrieben sind, noch einen dritten Punkt gemeinsam haben, der dann der gesuchte achte Schnittpunkt der Flächen sein muss.

Scht.

A. Schönflies. Ueber diejenigen Flächen zweiten Grades, welche durch gleichwinkelige reciproke Strahlenbündel erzeugt werden. Kronecker J. IC. 185-204.

Gleichwinklige reciproke Strahlenbündel werden durch die Eigenschaft definirt, dass zwei Strahlen des einen Bündels denselben Winkel einschliessen, wie die entsprechenden Ebenen des anderen Bündels und umgekehrt. Sie erzeugen Rotationsflächen zweiter Ordnung; die Axe derselben ist derjenigen Geraden eines jeden Bündels parallel, die auf der entsprechenden Ebene des anderen Bündels senkrecht steht. Es ist aber bemerkenswert, dass nur solche Rotationsflächen erzeugt werden, welche durch Rotation eines Kegelschnitts um seine kleinere Axe entstehen, d. h. ein abgeplattetes Ellipsoid, ein einschaliges Hyperboloid mit grösserer reeller, und ein zweischaliges Hyperboloid mit grösserer imaginärer Hauptaxe. Die Bedingungen, unter denen die eine oder die andere dieser Flächen entsteht, werden dargelegt.

Sind im besonderen die reciproken Strahlenbündel von der Art, dass jeder Strahl des einen auf der entsprechenden Ebene des anderen senkrecht steht, dass also beide Bündel eine Kugel erzeugen, und dreht man den einen Bündel um einen ganz beliebigen seiner Strahlen um 180°, so erzeugen beide Bündel in der neuen Lage ein durch Rotation einer gleichseitigen Hyperbel entstehendes Hyperboloid. Dasselbe ist einschalig, oder zweischalig, je nachdem der spitze Winkel, welchen die die Centren der Bündel verbindende Gerade und die Drehaxe einschliessen,

grösser oder kleiner als 45° ist. Das Gebilde geht in einen Rotationskegel über, wenn dieser Winkel gleich 45° ist.

Schn.

G. HUMBERT. Sur les surfaces homofocales du second ordre. S. M. F. Bull. XIII 95-119.

Die Arbeit enthält eine grosse Menge von Sätzen, welche sich auf die Focaleigenschaften der Flächen und Curven zweiter Ordnung beziehen, und welche, wie der Herr Verfasser selbst bemerkt, zum Teil bekannt, zum Teil neu oder wenigstens in dieser Form nicht ausgesprochen sind. Dieselben werden durch eine specielle Untersuchungsmethode gewonnen. Wir müssen uns in diesem Referat darauf beschränken, die Ausgangspunkte der ganzen Betrachtung und einige der wichtigsten Resultate kurz anzudeuten.

Eine Fläche zweiter Ordnung E hat mit dem unendlich entfernten Kugelkreise vier Punkte gemein, durch welche ein Kegelschnittbüschel (σ) hindurchgeht. Die Secante, welche zwei Punkte a und b der Fläche E verbindet, trifft die unendlich entfernte Ebene in einem Punkte, durch welchen ein Kegelschnitt σ_1 jenes Büschels hindurchgeht. Die Punkte a und b werden als „conjugirt" im System σ_1 bezeichnet.

Jede Secante zwischen zwei Punkten, die in Bezug auf dasselbe System conjugirt sind, ist demnach parallel einer Seite eines Kegels zweiter Ordnung, welcher mit E homocyklisch ist, und umgekehrt.

Hieraus folgt leicht:

Ein Kreis durch a und b schneidet E noch in zwei Punkten a' und b', welche in Bezug auf dasselbe System conjugirt sind.

Der Durchschnitt einer Kugel S mit der Fläche E ist eine Raumcurve vierter Ordnung, durch welche sich vier Kegel legen lassen, deren jeder die unendlich entfernte Ebene in einem Kegelschnitt σ_1 des oben bestimmten Büschels schneidet. Von der Kugel S wird alsdann gesagt, dass sie der Gruppe σ_1 angehört. Jede Kugel gehört somit vier Gruppen an.

Umgekehrt schneidet ein Kegel H, dessen Basis σ_1 ist, und der einen beliebigen Punkt m zum Scheitel hat, die Fläche E in einer Raumcurve, durch welche eine Kugel hindurchgeht, die zur Gruppe σ_1 gehört. Rückt m ins Unendliche auf einer Geraden, welche durch σ_1 geht, so zerfällt H in zwei Ebenen, deren eine die unendlich entfernte ist, während die andere den Kegelschnitt σ_1 in m berührt. In diesem Falle zerfällt die Kugel S in dieselben beiden Ebenen.

Daraus folgt, dass jede Tangentialebene von σ_1 als eine der Gruppe σ_1 angehörende Kugel betrachtet werden kann.

Berührt ein Kreis die Fläche E in a und in b, so wird von ihm gesagt, dass er der Gruppe σ_1 angehört. Es ist leicht zu erkennen, dass die Ebene dieses Kreises den Kegelschnitt σ_1 berührt. Ferner folgt, dass jede Kugel, welche durch einen zur Gruppe σ_1 gehörenden Kreis geht, ebenfalls zu dieser Gruppe gehört.

Mit diesen einfachen Gesetzen hat der Herr Verfasser die Grundlagen für seine Untersuchungen gewonnen. Das fundamentale Theorem, welches hieraus hergeleitet wird, lautet: Der Ort der Mittelpunkte der einer Gruppe σ_1 angehörenden Nullkugeln ist eine der Fläche E confocale Fläche.

Dieser Satz gestattet folgende Erweiterung:

Der Ort der Mittelpunkte der einer Gruppe σ_1 angehörenden Kugeln mit gegebenem Radius ist ähnlich, ähnlich liegend und concentrisch mit einer der Fläche E confocalen Fläche.

Hieran schliesst sich unter anderem eine Folgerung über die Focalen. Unter einer Focalen einer sphärischen Curve der Fläche E versteht man den Ort der Mittelpunkte der Nullkugeln, welche durch eine Reihe von Kreisen gehen, die die sphärische Curve doppelt berühren. Diese Focale ist selbst eine sphärische Curve vierter Ordnung. Jede sphärische Curve auf E besitzt vier Focalen, und diese liegen auf vier zu E confocalen Flächen. Hieran werden nun noch viele andere Sätze gereiht

Von den späteren Sätzen möge der folgende hervorgehoben werden.

Trägt man auf der Normalen einer Fläche E längs einer

Krümmungslinie nach beiden Seiten dieselbe constante Länge ab, so erhält man als Ort der Endpunkte eine Raumcurve, welche auf einer Fläche liegt, die mit E concentrisch, ähnlich und ähnlich-liegend ist. Der letzte Teil der Untersuchung bezweckt die Auffindung aller homographischen Abbildungen einer Fläche E, bei welcher die Krümmungslinien sich erhalten. Diese Aufgabe wird vollständig gelöst, und es wird gezeigt, dass notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösung ist, dass die Nabelpunkte beider Flächen einander entsprechen.

Diese wenigen Angaben mögen genügen, um die inhaltreiche Arbeit zu charakterisiren.

In einer späteren Arbeit will der Herr Verfasser diese Untersuchungen auf Flächen vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt übertragen. A.

L. F. Marrecas-Ferreira. Sobre a theoria do hyperboloide. Teixeira J. VII. 49-77.

Der Verfasser giebt auf ganz elementare Weise eine Theorie dieser Oberfläche. Tx. (Hch.)

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. Wolf Z. XXIX. 1884. 332-355.

Vergl. Abschn. VIII. Cap. 5. B. S. 635 ff.

R. Sturm. Ueber Flächen zweiten Grades, welche zu sich selbst polar sind. Klein Ann. XXV. 236-240.

Wenn eine Fläche zweiten Grades in Bezug auf eine andere zu sich selbst polar ist, so berühren sich beide längs eines Kegelschnitts (vergl. Tarry, Nouv. Ann. (3) III., F. d. M. XVI. 1884. S. 549). Der Verfasser untersucht nun ein gewisses dreistufiges in sich duales System von Flächen zweiten Grades, welche nach einer festen Fläche zu sich selbst polar sind,

oder, was auf dasselbe hinauskommt, nach denen diese feste Fläche zu sich selbst polar ist. Es ergiebt sich u. a., dass immer 8 Flächen in diesem System existiren, von denen jede durch h gegebene Punkte geht, i gegebene Geraden und k gegebene Ebenen berührt, wo $h+i+k=3$ ist, und h, i, k Null, eins, zwei, drei ist. In einem Nachtrage bemerkt der Verfasser, dass er in einer weiteren Abhandlung zeigen wird, dass auf andere Weise auch ein vierstufiges Flächen-System von derselben Polar-Eigenschaft gefunden werden kann.

Scht.

P. del Pezzo. Sulle quadriche polari reciproche di sè stesse rispetto ad un' altra. Nap. Rend. XXIV. 161-179.

Anschliessend an die Arbeiten der Herren Battaglini, d'Ovidio, Veronese und besonders R. Sturm, untersucht der Verfasser die Flächen zweiten Grades, welche sich selbst bezüglich einer zweiten Fläche polar sind, und giebt eine synthetische Construction von Gruppen solcher Flächen an, von welchen jede bezüglich der übrigen sich selbst polar ist. Zunächst werden die Sturm'schen Sätze bewiesen: „Wenn von zwei Flächen A und B die zweite sich selbst polar-reciprok ist bezüglich der ersten, so berühren sich die Flächen entweder längs eines Kegelschnittes, oder sie schneiden sich in einem Vierseite." In dem ersten Falle heissen die Flächen A und B verbunden in „erster Art", in dem zweiten „verbunden auf zweite Art". Jedesmal ist die Beziehung zwischen A und B eine gegenseitige, wie der folgende Satz lehrt: „Je zwei auf erste Art verbundene Flächen bestimmen einen Büschel, in welchem sie durch die Doppelebene und Kegel harmonisch getrennt sind; je zwei in zweiter Art verbundene Flächen bilden einen Büschel, in welchem sie durch die Ebenenpaare harmonisch getrennt sind." Einer näheren Untersuchung werden dann die Flächensysteme unterzogen, welche mit einer gegebenen Fläche verbunden sind, und es werden die Charakteristiken dieser Systeme angegeben.

Ueber Gruppen von Flächen, welche je zwei und zwei mit einander verbunden sind, finden sich folgende Sätze:

Zunächst werden Gruppen von Flächen betrachtet, welche in zweiter Art verbunden sind. Es giebt eine Gruppe von vier solchen Flächen, welche ein gemeinsames Poltetraeder haben, sie werden eine „homogene Quaterne“ genannt. Dann giebt es ein „Sextupel“, d. h. eine Gruppe von sechs solchen Flächen, welche demselben Tetraeder umschrieben sind. Durch Zusammenstellung beider endlich erhält man eine Gruppe von zehn solchen Flächen, welche auf acht verschiedene Weisen in zwei Gruppen, eine homogene Quaterne und ein Sextupel, sich trennen lässt.

Ferner finden sich Gruppen von Flächen, welche teils auf erste, teils auf zweite Art mit einander verbunden sind. Eine Gruppe von vier solchen Flächen, welche ein gemeinsames Poltetraeder haben, heisst eine „heterogene Quaterne“.

Aus ihnen setzt sich dann eine Gruppe von acht Flächen mit gemeinsamem Poltetraeder zusammen, welche auf vier verschiedene Weisen in vier Paare erster Art und auf drei verschiedene Weisen in vier Paare zweiter Art sich einteilen. Für zwei beliebige Flächen wird dann der Satz bewiesen: Irgend zwei Flächen zweiter Ordnung sind einander polar-reciprok bezüglich acht Flächen, welche die soeben angegebene Gruppe bilden. W. St.

P. del Pezzo. Sulle quadriche ad $(n-1)$ dimensioni polari reciproche di sè stesse rispetto ad un altra. Nap. Rend. XXIV. 186-192.

In diesem zweiten Aufsatze werden Flächen zweiter Ordnung in einem Raume von n Dimensionen betrachtet, und $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$ Arten von Paaren verbundener Flächen gefunden, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Analog wie in dem ersten Aufsatze werden die Systeme von Flächen aufgestellt, welche mit einer gegebenen verbunden sind, und es wird eine Gruppe von 2^n Flächen, die zu je zwei verbunden sind, bestimmt.

W. St.

Th. Reye. Ueber quadratische Kugelncomplexe und Kugelncongruenzen, ihre Kreise und ihre Cykliden. Kronecker J. 10? 205-221.

In seiner „Synthetischen Geometrie der Kugeln und linearen Kugelnsysteme“ (Leipzig 1879) hat der Verfasser die Grundlagen für die Untersuchungen gegeben, welche in der vorliegenden Arbeit ausgeführt werden und bei welchen die Kenntnis der Eigenschaften der linearen Kugelnsysteme sowie deren Beziehung zu dem quadratischen Complex H aller unendlich kleinen Kugeln vorausgesetzt wird.

In § 1 wird ein quadratischer Kugelncomplex Γ betrachtet. Seine Ebenen umhüllen eine Fläche zweiter Klasse, und der Ort seiner Punktkugeln (eine biquadratische Congruenz) ist eine Cyklide. Letztere ist vierter Ordnung und enthält den unendlich fernen Kreis doppelt; sie kann zerfallen in die unendlich ferne Ebene und eine Fläche dritter Ordnung, oder eine beliebige Fläche zweiter Ordnung, oder auch in zwei beliebige Kugeln. Doch werden diese Fälle hier nicht verfolgt. Eine beliebige Kugel x hat hinsichtlich Γ als Polare ein Kugelngebüsch, welches eine Orthogonalkugel x' besitzt. Die Beziehungen zwischen x und x' sowie dieser zu der zu Γ gehörenden Cyklide werden näher untersucht und führen zu Kreisscharen, welche die Cyklide rechtwinklig schneiden und osculiren etc. Für specielle quadratische Complexe, welche eine Kugel δ oder auch einen Kugelnbüschel doppelt enthalten, werden diese Sätze specialisirt.

§ 2 beschäftigt sich besonders mit den ∞^3 Kugelnbüscheln eines Complexes Γ und den ∞^3 reellen oder imaginären Grundkreisen der ersteren, welche Kreise des Complexes genannt werden. Die Kreise und Geraden von Γ berühren die Cyklide Φ' desjenigen Complexes Γ' doppelt, welcher die Polare von Γ in Bezug auf H ist. Von den ∞^3 Kreisen von Γ liegen in einem beliebigen Gebüsche zwei Scharen, deren Ort eine Cyklide ist. Die Beziehungen dieser Scharen zu den Cykliden Φ und Φ' werden aufgestellt auch für den Fall, dass Γ eine Doppelkugel hat.

§ 3 handelt von dem Büschel der quadratischen Complexe, welcher durch Γ und Π bestimmt ist. Die Ebenen dieser „concyklischen" Complexe umhüllen confocale Flächen zweiter Klasse. Fünf Complexe des Büschels sind einfach singulär, und ihre fünf Doppelkugeln δ sind zu je zweien conjugirt in Bezug auf alle Complexe des Büschels. Die doppelt berührenden Ebenen der Cyklide Φ umhüllen die mit den Kugeln δ concentrischen „Kummer'schen" Kegelflächen.

Die Polaren der concyklischen Complexe Γ bezüglich des Punktcomplexes Π bilden eine Schar „confocaler" quadratischer Kugelncomplexe Γ'. Die Cykliden Φ' der letzteren schneiden einander orthogonal und folglich in den Krümmungslinien. Die Cykliden Φ' heissen ebenfalls „confocale Cykliden". Unter ihnen giebt es fünf, welche sich auf Curven, die „Focalcurven der Cyklide Φ", reduciren. Die Eigenschaften der confocalen Cykliden, ihre Beziehung zu Φ und den Kreisscharen der Complexe Γ' werden weiter verfolgt. Die ∞^1 Doppeltangenten von Φ bilden die ∞^1 Regelscharen der von den Ebenen der confocalen Complexe umhüllten Flächen zweiter Klasse.

In § 4 wird der Complex der Berührungskugeln und die Congruenz der Krümmungskugeln der Cyklide Φ untersucht. Von den Berührungskugeln enthält jeder der confocalen Complexe Γ' die biquadratische Congruenz, welche er mit dem unendlich nahen Complex Γ' gemein hat. Von den Krümmungskugeln enthält jeder der Γ' eine Schar achten Grades, welche er mit den beiden ihm zunächst benachbarten gemein hat. Diese Kugeln bilden eine Congruenz 24[ten] Grades.

Zum Schlusse wird die Gleichung des Complexes aller die Cyklide Φ berührenden Kugeln aufgestellt; sie ist vom zwölften Grade in den Kugelcoordinaten. Ferner wird die Gleichung der Congruenz aller Krümmungskugeln von Φ und diejenige der Schar von Kugeln, welche Φ dreipunktig osculiren, angegeben.

W. St.

H. G. Zeuthen. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. (Second article.) Klein Ann. XXVI. 247-271.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich eng an die Arbeit an, welche der Verfasser in den Math. Ann. XVIII. 33-69 veröffentlicht, und über welche der Referent in F. d. M. XIII. 1881. S. 501-504 Bericht erstattet hat. Zunächst beweist der Verfasser eine metrische Eigenschaft der Cyklen von Punkten, denen man unendlich viele Polygone umbeschreiben kann, die einer Fläche zweiten Grades einbeschrieben sind. Ein Polygon $A'B'C'\dots$ heisst nämlich einem Punkt-Cyklus $ABC\dots$ umbeschrieben, wenn seine Seiten der Reihe nach durch die Punkte des Cyklus gehen, also $A'B'$ durch A, $B'C'$ durch B, u. s. w. Die vom Verfasser auf doppelte Weise bewiesene metrische Eigenschaft spricht aus, dass die geschlossenen Polygone $A'B'\dots$, die einer Fläche zweiten Grades einbeschrieben und einem vollständigen Cyklus oder einem Cyklus mit einer ungeraden Punktzahl umbeschrieben sind, und zwei von den vier geschlossenen Polygonen, die der Fläche einbeschrieben und einem unvollständigen Cyklus umbeschrieben sind, der einen oder der anderen der beiden Gleichungen:

$$\frac{A'A}{B'A}\cdot\frac{B'B}{C'B}\cdot\frac{C'C}{D'C}\dots = \pm 1$$

genügen, wo jedes dieser Cykel $A, B, C, \dots$ genannt ist. Bei dem einen dieser Beweise benutzt der Verfasser das auch von Herrn Holst zu Christiania in seiner These consequent angewandte Princip, dass eine algebraische Gleichung, die keine Wurzel hat, sich auf eine Constante reducirt. Der zweite Beweis benutzt die von Poncelet angedeuteten und von Herrn Voss vollständig entwickelten Eigenschaften der beiden Arten von Polygonen, die einer Fläche zweiten Grades umbeschrieben sind (vgl. Voss, Math. Ann. XXV. 39-71, und die zweite Abhandlung von Voss, die mit der Zeuthen'schen gleichzeitig in den Math. Ann. XXVI erschien; Referat über beide, hier, Seite 622.) Im zweiten Capitel der vorliegenden Abhandlung werden die Congruenzen untersucht, die von den Verbindungsgeraden der correspondirenden

Punkte zweier auf einer Fläche zweiten Grades liegender projectiver Figuren erzeugt werden. Dabei gelangt Herr Zeuthen auch zu neuen Eigenschaften der beiden von Herrn Hirst (Collectanea matnem. in memoriam D. Chelini) untersuchten Congruenzen zweiter Ordnung zweiter Klasse, welche von solchen gemeinsamen Tangenten zweier Flächen zweiter Ordnung erzeugt werden, die sich längs der Seiten eines räumlichen Vierseits schneiden. Die Resultate dieses zweiten Capitels benutzt dann Herr Zeuthen, um im dritten Capitel zu einer Verallgemeinerung der erwähnten metrischen Eigenschaft zu gelangen. Scht.

H. Krüger. Die Focaleigenschaften der kubischen Raumcurven. Diss. Breslau.

In mancher Hinsicht an die Werke von v. Staudt, Reye, Sturm, Schröter sowie an die Abhandlungen von Cremona (Borchardt J. LXIII.) und Sturm (Borchardt J. LXX.) anknüpfend, entwickelt der Verfasser die den Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte entsprechenden metrischen Eigenschaften der kubischen Raumcurve. Durch eine beliebig gewählte Gerade gehen immer vier Ebenen, deren conjugirte in Bezug auf die Raumcurve zu ihnen rechtwinklig sind, oder, was dasselbe ist, gehen immer vier Ebenen, von denen jede Halbirungsebene des Winkels zweier Schmiegungsebenen ist. Dagegen giebt es zehn Gerade, vier reelle und sechs imaginäre, welche die Eigenschaft haben, dass jeder durch eine solche Gerade gehenden Ebene bezüglich der Raumcurve eine zu ihr rechtwinklige conjugirt ist. Solche Gerade nennt der Verfasser Axen, wegen ihrer Analogie mit den Axen der Kegelschnitte. Ferner giebt es drei reelle und zwölf imaginäre Brennstrahlen, das sind Strahlen, in denen sich zwei Ebenen schneiden, die beide zugleich Schmiegungsebenen und Tangentialebenen des imaginären Kugelkreises sind. Die Eigenschaften dieser Axen und dieser Brennstrahlen entwickelt der Verfasser im ersten Teil. Der zweite Teil behandelt in ähnlicher Weise die Orthogonalfläche der kubischen Raumcurve, d. h. die-

jenige Regelfläche sechsten Grades, deren Geraden die Schnittlinien von je zwei zu einander rechtwinkligen Schmiegungsebenen sind. Das dritte Capitel ist den ausgezeichneten Elementen der speciellen kubischen Raumcurven gewidmet. Hierbei zeigt sich, dass die kubische Parabel, d. h. die die unendlich ferne Ebene als Schmiegungsebene besitzende Raumcurve, in Bezug auf focale und daraus fliessende Eigenschaften unter den kubischen Raumcurven eine in noch weit höherem Masse exceptionelle Stellung einnimmt, als die Parabel unter den ebenen Kegelschnitten.

Scht.

H. Schröter. Metrische Eigenschaften der kubischen Parabel. Klein Ann. XXV. 293-318.

Von Herrn Ad. Hurwitz (vergl. Math. Ann. XXV. 287-292) wurde zunächst das räumliche Analogon zu der Eigenschaft der ebenen Parabel gefunden, wonach der Inhalt eines Parabelsegments gleich $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte des Dreiecks ist, welches die zugehörige Parabelsehne und die Tangenten in den Endpunkten derselben einschliessen. Einer darauf bezüglichen Mitteilung des Herrn Hurwitz verdankt Herr Schröter die Anregung zur vorstehenden Untersuchung, die freilich von ganz anderen Gesichtspunkten ausgeht, als die Arbeit von Hurwitz. Herr Schröter knüpft nämlich enger an die Bestimmung eines Parabelsegments durch Archimedes und an die von Möbius (der barycentrische Kalkül, S. 230 und 392) entdeckten Eigenschaften über ein- und umbeschriebene Dreiecke der Parabel an und findet eine grosse Reihe von neuen Eigenschaften der kubischen Parabel, d. h. einer solchen Raumcurve dritter Ordnung, welche die unendlich ferne Ebene zur Schmiegungsebene hat. Die meisten dieser Eigenschaften beziehen sich auf die durch je zwei Punkte der kubischen Parabel erzeugten Schmiegungstetraeder. Ein solches hat zu Ecken erstens die beiden erzeugenden Punkte und zweitens die beiden Punkte, die man erhält, wenn man die Tangente des einen mit der Schmiegungsebene des andern zum Schnitt bringt. Für solche Schmiegungstetraeder

findet Herr Schröter durch möglichst geometrische Betrachtungen die folgenden Sätze: Ist $ABCD$ das den Punkten A und B angehörige Schmiegungstetraeder und T ein beliebiger Punkt der Sehne AB, so ist $\sqrt[3]{ACDT} + \sqrt[3]{BCDT} = \sqrt[3]{ABCD}$. Sind ferner A, B, C drei Punkte einer kubischen Parabel, und ist CA die grösste der drei Sehnen AB, BC, CA, so ist $\sqrt[6]{S_a} + \sqrt[6]{S_b} = \sqrt[6]{S_c}$, wo S_a, S_b, S_c bezw. die den Sehnen BC, CA, AB zugehörigen Schmiegungstetraeder bedeuten. Interessant ist auch das räumliche Analogon zu der Eigenschaft der ebenen Parabel, dass der Inhalt eines einbeschriebenen Dreiecks doppelt so gross wie der Inhalt des von den Tangenten in seinen Ecken gebildeten Dreiecks ist. Dieses räumliche Analogon lautet: Das von vier Punkten einer kubischen Parabel gebildete Tetraeder hat neunmal soviel Volumen, wie das Tetraeder, welches von den diesen vier Punkten zugehörigen Schmiegungsebenen gebildet wird. Nach mehreren Sätzen, die wir hier übergehen, gelangt der Verfasser dann vermittelst einer Integration zu dem Hurwitz'schen Satze: Projicirt man von den Ecken C und D des der Sehne AB angehörigen Schmiegungstetraeders $ABCD$ den geschlossenen Umring, welcher von der Parabelsehne AB und dem Parabelbogen AB gebildet wird, so schliessen diese beiden konischen Flächen ein Volumen ein, welches $\frac{9}{17}$ von dem Volumen des Schmiegungstetraeders ist. Schliesslich gelangt Herr Schröter noch zu folgendem Resultate: Die geradlinige abwickelbare Fläche vierter Ordnung, welche von sämtlichen Tangenten der kubischen Parabel gebildet wird, teilt das zwei beliebigen Punkten A und B zugehörige Schmiegungstetraeder $ABCD$ immer so, dass das AB anliegende Stück $\frac{15}{16}$ und das CD anliegende Stück $\frac{1}{16}$ des ganzen Schmiegungstetraeders beträgt. Scht.

M. N. VANĚČEK. Sur les surfaces du troisième ordre.

Liège Mem. (2) XI. 5 p.

Lineare Construction einer kubischen, durch 19 Punkte be-

stimmten Oberfläche mit Hülfe von Principien, die in einer Note in Resal J. dargelegt sind. Mn. (Lp.)

W. Stahl. Ueber eine gewisse Gattung von Raumcurven. Kronecker J. 10. 151-160.

Den betrachteten Raumcurven wird die Grund-Eigenschaft auferlegt, dass sie auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen und dass ihre Schmiegungsebenen eine Fläche zweiter Klasse berühren. Die Tangenten einer solchen Raumcurve berühren also die beiden Flächen und gehören dem Strahlensystem vierter Ordnung und und Klasse an, welches beide Flächen einhüllt. Der Verfasser zeigt, dass die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche einer solchen Curve ebenfalls die erwähnte Grundeigenschaft hat. Ferner ergiebt sich, dass diese Doppelcurve derjenigen Curve collinear verwandt ist, welche von den doppelt berührenden Tangentialebenen der Grundcurve eingehüllt wird. Dadurch wird eine collineare Transformation bestimmt, durch deren wiederholte Anwendung auf die Grundcurve und die Doppelcurve eine Kette von Curven erhalten wird. Je zwei Curven der Kette, welche durch eine ungerade Zahl von Curven getrennt werden, sind collinear. Je zwei auf einander folgende Curven der Kette haben die Beziehung zu einander, dass die zweimal berührenden Tangentialebenen der zweiten Curve Schmiegungsebenen der ersten sind. Durch eine andere collineare Transformation, welche ebenfalls durch die Grundcurve bestimmt ist, erhält man aus der ersten Kette eine zweite und durch wiederholte Anwendung eine Reihe solcher Ketten. Alle sich ergebenden Curven haben mit der Grundcurve die erwähnte Grundeigenschaft gemein. Die Flächen, auf welchen diese Curven liegen, oder diejenigen, welche von ihren Schmiegungsebenen eingehüllt werden, gehören zu dreien auf mehrfache Weise zu Flächenbündeln und Flächenscharen. Die abgeleiteten Sätze können am besten an der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species veranschaulicht werden.

Scht.

A. Leman. Beweis, dass auf einer algebraischen Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ausser dieser nicht mehr als 16 Gerade liegen können. Hoppe Arch (2) II 223-224.

Schon Clebsch bewies den im Titel genannten Satz (Math Ann. I). Der Verfasser bringt einen neuen directen geometrischen Beweis. Scht.

A. Weiler. Ueber Flächen vierter Ordnung mit Doppel- und mit Cuspidalkegelschnitt. Schlömilch Z. XXX. 170-181

Der Verfasser stellt eine eingehende Untersuchung der allgemeinen Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt an und behandelt dann auch die Fläche, auf der ein Cuspidalkegelschnitt vorhanden ist, sowie endlich den Specialfall der letzteren Fläche, in welchem die Clospunkte zusammenfallen. Die Untersuchung fördert einige neue Resultate zu Tage und setzt bereits bekannte Eigenschaften in leicht übersehbaren Zusammenhang. Specialfälle werden gelegentlich berührt. Eine ausführliche systematische Klassifikation aller solcher Fälle gab Herr Segre in Math. Ann XXIV, woselbst auch eine vollständige Literaturangabe sich findet. (S. F. d M XVI. 1884. 596 ff.) Scht.

L. Berzolari. Sulla superficie del quarto ordine avente una conica doppia. Brioschi Ann (2) XIII. 81-174.

In dieser Abhandlung wird die von Herrn Kummer zuerst gefundene Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt mit grosser Ausführlichkeit untersucht. Insbesondere wird die Gruppirung der 16 Geraden der Fläche in Zusammenhang mit den fünf die Fläche doppelt berührenden Kegeln zweiter Ordnung angegeben. Einige Resultate will ich hervorheben. Vier auf der Fläche liegende Vierseite, die zusammen die 16 Geraden enthalten, nennt der Verfasser eine Quaterne. Deren giebt es drei Arten, welche in engem Zusammenhang mit den fünf Kummer'schen Punkten stehen.

Die 16 Ebenen der Vierseite einer Quaterne erster Art teilen sich in zwei Gruppen von je acht, welche durch einen Kummer'schen Punkt gehen. Die 16 Ebenen der zweiten Art teilen sich in drei Gruppen von resp. 8, 4 und 4 Ebenen; die Ebenen einer Gruppe gehen durch einen Kummer'schen Punkt. Die 16 Ebenen der dritten Art teilen sich in eine Gruppe von acht Ebenen, welche durch einen Kummer'schen Punkt gehen, und vier Paare, deren Schnittgeraden die übrigen Kummer'schen Punkte enthalten. Im ganzen giebt es 110 Quaternen, von welchen 10 erster Art, 60 zweiter und 40 dritter Art sind.

Zwei sich schneidende Geraden der F_4 werden verbunden durch eine die F_4 dreifach berührende Ebene. Deren giebt es 40, und man kann aus ihnen 705 Oktaeder bilden der Art, dass die Ebenen eines jeden alle 16 Geraden enthalten. Die verschiedenen Arten dieser Oktaeder werden untersucht und ihre Beziehungen zu den fünf Kummer'schen Punkten erörtert. Weiterhin werden die windschiefen der F_4 angehörenden Vielseite betrachtet, ihre Arten und Zahl festgestellt. Zwei projective Erzeugungen der Fläche F_4 werden mitgeteilt, mittels welcher die 16 Geraden construirt werden und die Constantenzahl der Fläche sich ergiebt. W. St.

G. Humbert. Sur les surfaces cyclides. J. d. l'Éc. Pol. LV. 127-252.

Ueber Cykliden haben in Frankreich zuerst besonders Moutard (Soc. philom. 1864, C. R. 1864) und Laguerre (Soc. philom. 1868) schöne Lehrsätze ausgesprochen. Eine ausführliche analytische Behandlung und ein bis 1872 reichendes, nahezu vollständiges Litteraturverzeichnis hat Darboux gegeben (Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques. Paris, 1873). Der Verfasser unternimmt es in der vorliegenden Arbeit, diese Ergebnisse ohne jede Rechnung zu erweisen und in vielen Punkten zu erweitern. Den Ausgangspunkt freilich bilden zwei von ihm bei früherer Gelegenheit analytisch bewiesene Sätze über ebene Cykliken, über Curven vierter

Ordnung, welche die beiden unendlich fernen Kreispunkte zu Doppelpunkten haben. Für diese, aber nicht, wie der Verfasser meint, für jede algebraische Curve, giebt es einen Punkt, der das Centrum der mittleren Entfernungen für alle Punktgruppen ist, die von ihm ausgehende Geraden auf der Curve ausschneiden. Diesen Punkt bezeichnet der Verfasser als Centrum der Cyklik und spricht sodann folgende Sätze aus:

1) Der Fusspunkt des Lotes, welches man vom Centrum der Cyklik auf irgend eine Gerade fällen kann, ist das Centrum der mittleren Entfernungen für die von ihr ausgeschnittene Punktgruppe.

2) Das Centrum der Cyklik halbirt das Geradenstück, welches die reellen Punkte der Asymptotenpaare begrenzen.

Auch bei einer Cyklide spricht der Verfasser von einem Centrum, und zwar wird dasselbe analog bestimmt, wie das der ebenen Cyklik. Zu bemerken ist aber, dass nicht jeder algebraischen Fläche ein Centrum zukommt. Der Fusspunkt des Lotes, welches man vom Centrum aus auf irgend eine Ebene fällen kann, ist das Centrum der Cyklik, welche sie aus der Cyklide ausschneidet. Jede Kugel schneidet auf der Cyklide eine gekrümmte Cyklik (cyclique gauche) aus, eine Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlechte 1. Der Mittelpunkt der Kugel wird auch als derjenige der Cyklik bezeichnet. Zwei gekrümmte Cykliken liegen immer dann und nur dann auf einer Fläche zweiter Ordnung, wenn das Centrum der Cyklide das Geradenstück halbirt, welches ihre eigenen Mittelpunkte begrenzen. Hiernach gelangt Herr Humbert sofort zu den Flächen F zweiten Grades, die die Cyklide längs einer Cyklik berühren, und die zuerst von Darboux untersucht worden sind. Ihre Berührungscurven haben alle dasselbe Centrum wie die Cyklide und treffen den unendlich fernen Kugelkreis in den vier Rückkehrpunkten der Cyklide. Ein beliebiger Punkt liegt in zwei Flächen F, eine Gerade wird von drei und eine Ebene von vier Flächen der Schar berührt. Für die Schnittcurve der letzteren sind die Berührungspunkte Hauptpole (pôles principaux), in Bezug auf welche die Curve anallagmatisch ist. Den grössten Raum nimmt im ersten Teile die Untersuchung der

homofocalen Cykliden und der von Darboux zuerst betrachteten Systeme conjugirter Punkte ein.

Als homofocal bezeichnet man bekanntlich solche Flächen, denen dieselbe den unendlich fernen Kugelkreis enthaltende Developpable umschrieben ist. Als gemeinsame Focale wird die Doppellinie dieser Fläche bezeichnet. Sie enthält zugleich die Spitzen aller isotropen (den unendlich fernen Kugelkreis projicirenden) Kegel, welche die Fläche doppelpunktig berühren. Bei dem System homofocaler Cykliden zerfällt nun die Focale in fünf gekrümmte Cykliken, von denen noch irgend vier die Focalen der fünften sind, also eindeutig von dieser abhängen. Man erhält jede einzelne der confocalen Cykliden als Enveloppe von Kugeln, welche die irgend eine der fünf Focalen enthaltende Kugel orthogonal schneiden, während ihre Mittelpunkte einer Fläche zweiten Grades angehören, welche die betreffende Focale enthält. Jede dieser Kugeln schneidet die Cyklide in zwei Kreisen, deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Focale gehen und einen Kegel umhüllen, der zur Senar der Flächen F gehört. In Bezug auf die fünf Centren der Focalen ist jede Cyklide des Systems anallagmatisch. Um diese grösstenteils von Moutard aufgestellten Sätze zu bestätigen, geht der Verfasser von der Thatsache aus, dass jede Fläche zweiter Ordnung, die eine Fläche F längs eines Kegelschnittes berührt, die Cyklide in zwei gekrümmten Cykliken schneidet. Dies gilt insbesondere von den Berührungskegeln einer F. Durch gewisse von den Cykliden, die letztere ausschneiden, kann man isotrope Kegel legen. Die Spitzen derselben füllen eine zu der gegebenen homofocale Cyklide aus.

Moutard hatte bereits darauf aufmerksam gemacht, dass die homofocalen Cykliden ein dreifach orthogonales System bilden. Der Verfasser bestätigt dies und zeigt, dass die Krümmungslinien irgend einer Cyklide, in welcher sie von anderen Flächen des Systems geschnitten wird, von den Berührungspunkten der Ebenen beschrieben werden, die zugleich der Cyklide und je einer ihrer Flächen F umschrieben sind.

Die Schnittpunkte a, b, c, d einer Cyklide mit irgend einer

Tangente einer Fläche V zerfallen in zwei Paare a, b und c, d. Ist nämlich g der Berührungspunkt derselben, so ist $ga . gb = gc . gd$. Solche Paare bezeichnet man nach Darboux als conjugirt in dem Systeme V. Ein Paar ab eines solchen Systems kann man beliebig wählen. Zwei Punktepaare, welche von demselben Kreise ausgeschnitten werden, sind in einem und demselben Systeme conjugirt. Von den neuen Lehrsätzen, die der Verfasser erweist, sei der folgende hier erwähnt: In irgend zwei Punkten a, b wird die Cyklide von einem Kreise berührt. Durch denselben gehen zwei isotrope Kegel. Wenn nun $a\ b$ conjugirt in einem System bleiben, so erfüllen die Spitzen dieser Kegel eine mit der ersten homofocale Cyklide und beschreiben ein System conjugirter Punkte derselben.

Der zweite Teil der Arbeit ist vornehmlich der Hauptcurve (cubique principale) gewidmet, einer merkwürdigen, bereits von Darboux behandelten triorthogonalen Raumcurve dritter Ordnung. Sie ist der Ort der Mittelpunkte aller Flächen V, oder auch der Flächen zweiter Ordnung, welche die Berührungscurve irgend einer Fläche V enthalten. Sie ist daher durch das Centrum der Cyklide und die Centren der Focalen eindeutig bestimmt. Man kann dieselbe auch definiren als Ort der Mittelpunkte aller homofocalen Cykliden eines Systems, ferner als Ort der Fusspunkte aller Lote, die vom Centrum der Cyklide aus sich auf die Flächen V fällen lassen; dieser Eigenschaft wegen enthält sie die (12) Fusspunkte der Lote, welche vom Centrum der Cyklide aus sich auf dieselbe fällen lassen. Eine jede Sehne der Hauptcurve ist die Symmetrie-Axe einer auf der Cyklide gelegenen spirischen Curve; ihre Ebene steht senkrecht zu der anderen, welche die betreffende Sehne mit dem Mittelpunkt der Cyklide verbindet. Von irgend einem Büschel paralleler Ebenen schneiden zwei Ebenen die Cyklide in spirischen Curven. Nach dem Beweise des Verfassers sind dies die Tangentialebenen der Fläche H zweiter Ordnung, welche durch die Hauptcurve und die Normale bestimmt wird, welche sich vom Centrum der Cyklide aus auf die parallelen Ebenen fällen lässt. Sollte diese Normale die Hauptcurve noch einmal treffen, so wird H zum Kegel. Jede

Ebene des Büschels schneidet aus der Fläche H eine gleichseitige Hyperbel aus, welche für die in der Ebene liegende Cyklik dieselbe Bedeutung hat, wie die Hauptcurve für die Cyklide selbst, und der Hauptkegelschnitt der ebenen Cyklik heisst. Freilich giebt es sechs Ebenenbüschel, die Scharen spirischer Curven auf der Cyklide ausschneiden.

Die Hauptcurve enthält ferner die (eigentlichen) Mittelpunkte aller der auf der Cyklide liegenden Cykliken, welche zwei Symmetrie-Axen besitzen. Die Ebene einer solchen Cyklik ist zu der Linie normal, welche ihren Mittelpunkt mit dem Centrum der Cyklide verbindet.

Insbesondere ist die Centrale jedes in einer Ebene liegenden Kreispaares der Cyklide eine Sehne der Hauptcurve. Unter diesen Paaren giebt es 20, die aus gleichen Kreisen bestehen. Die Mitten ihrer Centralen werden auf den fünf Kegeln in der Schar der V von der Hauptcurve ausgeschnitten.

Die Flächen H zweiter Ordnung, welche die Hauptcurve enthalten, stehen in noch einer anderen Beziehung zur Cyklide. Die Normalen der Cyklide in ihren gemeinsamen Punkten mit einer Fläche H schneiden sämtlich die Gerade der H, welche der Hauptcurve nur einmal, und zwar im Mittelpunkte der Cyklide, begegnet. Hieran knüpft der Verfasser eine sehr einfache Construction der Krümmungsmittelpunkte einer Cyklide. Auf irgend einer Normale werden die Mittelpunkte der Hauptkrümmungskreise von den beiden Flächen H ausgeschnitten, welche in dem Fusspunkte der Normale die Krümmungslinien berühren.

Den Schluss der Arbeit macht eine Betrachtung aller Cykliden, die eine gegebene Hauptcurve besitzen, und eine Einteilung der Cykliden, die sich auf das Vorhandensein oder den Mangel von Symmetrie-Ebenen und auf die besondere Natur der Hauptcurven gründet. E. K.

A. Weiler. Ueber einige Flächen, auf denen Scharen von Kegelschnitten liegen. Schlöm. Z. XXIX. 225-226. 1884.

Die Flächen zweiter Ordnung eines einstufigen Systems durchschneiden sich mit den Tangentialebenen einer auf dasselbe bezogenen Torse in den Kegelschnitten einer solchen Fläche. Aus einem Flächen-Büschel und den Tangentialebenen eines Kegels zweiten Grades erhält man eine Fläche fünfter Ordnung, die als Doppelcurve die Grundcurve des ersteren Büschels enthält. In speciellen Fällen löst sich eine Ebene von der Fläche ab, doch muss die Grundcurve dabei in zwei Kegelschnitte zerfallen.

E. K.

A. Weiler. Ueber einige Flächen, welche Scharen von Kegelschnitten enthalten. Schlömilch Z. XXX. 159-169.

Wenn man die Flächen eines einstufigen Systems von Flächen zweiten Grades, das μ Flächen durch jeden Punkt sendet, den Ebenen einer Torse n^{ter} Klasse projectiv zuordnet, so erhält man durch den Schnitt jeder Fläche mit der zugeordneten Ebene eine Schar von Kegelschnitten derartig, dass die Punkte aller dieser Kegelschnitte eine Fläche vom Grade $2n+\mu$ bilden. Ist das Flächensystem so beschaffen, dass alle Flächen durch eine und dieselbe Curve vierter Ordnung erster Species hindurchgehen, so ergiebt sich, da $\mu = 1$ ist, eine Fläche vom Grade $2n-1$, welche vom Verfasser hinsichtlich ihrer Singularitäten und ihrer Beziehungen zu den erzeugenden Gebilden ausführlich discutirt wird. Zum Schluss giebt der Verfasser auch eine analytische Darstellung und Discussion jener Fläche.

Scht.

A. Mannheim. On the wave surface. Mess. XIV. 189-190.

Es wird nachgewiesen, dass eine unendliche Anzahl von Kegeln zweiter Ordnung vorhanden ist, welche den Mittelpunkt der Wellenfläche als gemeinsame Spitze haben und diese Oberfläche in Curven schneiden, die durch reciproke Radien in sich selbst transformirt werden. Glr. (Lp.)

A. Mannheim. Note on the wave surface. Mess XV. 40-41.

Untersuchung eines Ortes, der mit den Normalen zu einer Wellenfläche in allen Punkten auf einer gewissen Curve der Oberfläche zusammenhängt. Der Ort erweist sich als Kegelschnitt. Glr. (Lp.)

C. le Paige Sur les courbes de la quatrième classe à trois tangentes doubles. Prag Ber. 1881. 45-48.

Hält man das eine von zwei perspectivischen Dreiecken fest, und bewegt man die Ecken des anderen mit dem Centrum der Perspectivität über einen Kegelschnitt, so umschreibt die Axe eine Curve vierter Klasse, welche die Seiten des festen Dreiecks in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt berührt.

Zum Lehrsatze führt eine Untersuchung der Involution zweiter Stufe des Kegelschnittes, deren Gruppen mit den Ecken des festen Dreiecks in Kegelschnitten liegen. E. K.

Em. Weyr. Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins. Zweite Mitteilung. Wien Ber. XCII 498-523

Man lese zunächst das in dem vorigen Bande (S. 599-601) enthaltene Referat zu der ersten Mitteilung des Verfassers über denselben Gegenstand. Die dort begonnenen Studien über die bei Curven vom Geschlechte Eins auftretenden *I*- und *E*-Beziehungen werden hier fortgesetzt, und zur Aufdeckung der auf die Trisecanten der Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins bezüglichen Eigenschaften verwertet. Von fundamentaler Bedeutung ist dabei der Satz, dass zwischen den Punkten einer solchen R_5 und ihren ∞^1 Trisecanten eindeutige Beziehungen hergestellt werden können. Da nämlich jede von einem festen Punkte P der Raumcurve ausgehende Bisecante Px von einer einzigen Trisecante λ geschnitten wird, so bestimmen sich x und

X gegenseitig eindeutig. Doch ergiebt sich weiter, dass derartige eindeutige Beziehungen in zwei wesentlich verschiedene Arten zerfallen, die man passender Weise als centrale und nicht centrale unterscheidet. Bei den centralen laufen die Verbindungsebenen xX entsprechender Elemente durch einen festen Punkt A der Raumcurve, bei den nicht centralen schneiden die wechselweisen Verbindungsebenen (xY), (yX) irgend zweier Paare entsprechender Elemente die Raumcurve in einem und demselben Punkt. Von den Sätzen, die sich hierbei ergeben, sei folgender erwähnt. Es seien x, y, z die drei Curvenpunkte einer Trisecante, und X, Y, Z die drei zweiten von x, y, z ausgehenden Trisecanten. Wenn man dann X, Y, Z von irgend einem Curvenpunkte auf die Curve projicirt, so erhält man drei Punkte x', y', z' so, dass die drei Geraden xx', yy', zz' einer durch die Raumcurve gehenden kubischen Regelfläche angehören. Weiter gelangt der Verfasser nun zu den eindeutigen Beziehungen zwischen den Trisecanten unter einander. Von den zahlreichen Sätzen, die sich hierbei aus der fruchtbaren Untersuchungsmethode des Verfassers ergeben, mögen nur folgende hier Platz finden. Durch einen Curvenpunkt A und irgend zwei Trisecanten kann man ein und nur ein Hyperboloid legen, welches noch eine dritte Trisecante enthält. Werden die Erzeugenden einer durch die Raumcurve gelegten kubischen Regelfläche aus einem Curvenpunkte auf die Curve projicirt, so erhält man die Erzeugenden einer zweiten kubischen Regelfläche.

Scht.

J. Solin. Ueber die Construction der Osculationshyperboloide zu windschiefen Flächen. Prag. Ber. 1883. 11-16.

Die windschiefe Fläche ist durch drei Leitcurven gegeben, längs denen die erzeugende Gerade P gleitet. Die Aufgabe, das Osculationshyperboloid längs der Geraden P zu construiren, hat Mannheim in seinem „Cours de géométrie descriptive“ mit den Methoden der von ihm ausgebildeten kinematischen Geometrie gelöst, Herr Ed. Weyr hat in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien 1880 eine Lösung

des Problems gegeben, der Verfasser sucht die Lösung in einer möglichst einfachen Form zu gewinnen.

Zu dem Ende construirt er ein Hyperboloid H_a, das die windschiefe Fläche Σ längs der Erzeugenden P berührt, in dem Punkte a aber, in welchem P die Leitcurve A schneidet, eine Osculation hat. Unter den Hyperboloiden, welche diesen Bedingungen entsprechen, wählt er dasjenige aus, welches die Schmiegungsebene von A im Osculationskreise von a schneidet. Dieses Hyperboloid osculirt die windschiefe Fläche Σ in a und hat mit dem Hyperboloid H, welches längs P osculirt, die zwei von a auslaufenden Erzeugenden P und Q gemeinsam. Schneidet nun P die Leitcurven B und C in b und c, so lassen sich in derselben Form die Geraden R und S construiren, welche für diese Punkte dieselbe Bedeutung haben wie Q für den Punkt a. Die drei Geraden Q, R, S bestimmen alsdann das gesuchte Hyperboloid H. Eine andere Lösung der Aufgabe knüpft an eine Relation von Lamarle an. Sind r_1 und r_2 die absoluten Längen der Hauptkrümmungsradien der windschiefen Fläche in einem Punkte, z. B. a, und bedeutet x die Entfernung dieses Punktes vom Centralpunkte, κ aber den Parameter der Erzeugenden, so ist $r_1 r_2 = \left(\frac{x^2 + \kappa^2}{\kappa}\right)^2$. Die Grössen x und κ werden mit Anwendung der Mannheim'schen Hülfsgeraden construirt und demnächst die Länge $q = \frac{x^2 + \kappa^2}{\kappa}$ hergestellt, so dass die Lamarle'sche Relation in die Form kommt $r_1 r_2 = q^2$. In a kennt man die Krümmungsradien der Leitcurve A und der Erzeugenden P. Aus dem ersteren gewinnt man nach Meunier den Krümmungsradius r des berührenden Normalschnitts. Die Krümmungsradien zweier Normalschnitte reichen nun zwar zur Bestimmung der Krümmungsverhältnisse einer Fläche im Punkte a nicht aus, aber bei windschiefen Flächen tritt jene Relation von Lamarle hinzu, und es wird durch sie ermöglicht, die Indicatrix zu bestimmen. Dieselbe ist eine Hyperbel, die Erzeugende P ist eine Asymptote derselben, die andere Asymptote ist die genannte Gerade Q.

M. Marchand. Méthode pour mener les plans tangents aux surfaces gauches. S. M. F. Bull. XIII. 34-48.

Den Ausgangspunkt bildet die Discussion der Schnitte und abgeleiteten Axoide eines fundamentalen Axoids, d. h. einer windschiefen Fläche mit geradliniger Directrix. Dadurch gelangt der Verfasser zu metrischen Constructionen der im Titel genannten Tangentialebenen. Scht.

A. Mannheim. Liaison géométrique entre les sphères osculatrices de deux courbes qui ont les mêmes normales principales. Lond. M. S. Proc. XVI. 274-276.

Die Curven (a) und (a') mögen dieselben Hauptnormalen haben, aa' sei eine ihrer gemeinsamen Normalen, a das Krümmungscentrum von (a) und a' dasjenige von (a'). Sind o und o' die Mittelpunkte der in a und a' osculirenden Kugeln, so besteht folgende Relation: die Perpendikel, welche von a und a' auf die Radien der osculirenden Kugeln ao und $a'o'$ gefällt werden, treffen die Ebene, welche in a senkrecht auf aa' errichtet ist, in zwei Punkten g und g'. Das Dreieck agg' ist in g' rechtwinklig, und die Gerade gg' läuft parallel der Tangente, welche in a' an (a') gelegt werden kann. Diese Relation gestattet, den Punkt o' zu construiren, wenn o als bekannt vorausgesetzt wird. Schn.

D. Abzählende Geometrie.

H. Krey. Ueber Systeme von Plancurven. Acta Math. VII. 49-94.

Im X. Bande der Videnskabernes Selskabs Skrifter veröffentlichte Herr Zeuthen eine Abhandlung, welche, unter dem Titel „Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver", die Grundlagen entwickelt, auf welche eine anzahlgeometrische

ndlung der Plancurven beliebiger Ordnung naturgemäss auf-
ut werden kann. Bekanntlich werden dabei die Anzahlen,
he angeben, wieviel Plancurven gegebener Definition ge-
ne Bedingungen von ausreichender Dimensionssumme er-
n, auf die Anzahlen für Curven zurückgeführt, deren Con-
enzahl geringer ist, und deren anzahlgeometrische Behand-
daher bei einem systematischen Fortschreiten als bekannt
sgesetzt werden kann. Herr Zeuthen setzt daher ein ein-
ges System von Plancurven n^{ter} Ordnung voraus und entwickelt
dasselbe alle möglichen Beziehungen zwischen den Anzahlen,
he angeben, wieviel Curven des Systems gewisse Bedingungen
len, und den Anzahlen, welche angeben, wieviel Curven des
ms in gewisser Weise ausgeartet sind, und deshalb anzahl-
etrisch von Curven mit geringerer Constantenzahl abhängen.
selbst bei der Beschränkung auf Systeme, deren definirende
gungen nur angeben, dass eine Curve durch einen gegebenen
t gehen oder einen gegebenen Strahl berühren soll, und bei
Beschränkung auf $n = 4$ ist die Auffindung aller Ausartungen
aller bestehenden Beziehungen mit grossen Schwierigkeiten ver-
en, namentlich wegen des Auftretens von Curven mit mehrfach
nden Zweigen. Wohl aber vereinfachen sich die Probleme
für allgemein gedachte Curven, wenn vorausgesetzt wird,
das zu Grunde gelegte System keine Ausartung enthält, die mit
n mehrfach zählenden Zweige behaftet ist. Unter dieser Vor-
tzung zeigt nun der Verfasser in dem ersten Teile der vor-
nden Abhandlung, dass alle dann in Betracht kommenden
en bestimmbar sind. Beispielsweise bestimmt der Verfasser
Plancurven n^{ter} Ordnung viele Anzahlen, welche sich auf Be-
ngungen beziehen, die entweder aussprechen, dass Punkte ge-
n sind, durch welche die Curven hindurchgehen, oder dass
pelpunkte und Spitzen frei vorhanden sind, oder auf ge-
nen Geraden liegen oder festgegeben sind. So ergiebt
um ein einzelnes Beispiel herauszugreifen, dass es immer
$-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$ mit zwei freien Doppelpunkten
ftete Plancurven n^{ter} Ordnung giebt, von denen jede durch
$+3)-2$ gegebene Punkte hindurchgeht. D der

Abhandlung knüpft an die vom Referenten in den Math. Ann. XIII. 445 gegebene Erweiterung der Zeuthen'schen Formeln auf Plancurven in nicht fester Ebene an. Ehe der Verfasser jedoch auf die dadurch ermöglichte Behandlung der im Raume freien Plancurven mit Doppelpunkten, Spitzen, u. s. w. eingeht, werden durch ein interessantes Recursionsverfahren die drei Functionen von n entwickelt, von denen jede angiebt, wieviel Plancurven n^{ter} Ordnung im Raume $\frac{1}{2}n(n+3)+a$ gegebene Gerade schneiden und dabei ihre Ebene durch eine feste Axe, oder durch einen gegebenen Punkt schicken, oder in freier Lage haben, wo a beziehungsweise eins, zwei oder drei ist. Die letzte dieser drei Functionen ist z. B. $\frac{1}{324}n(n^2-1)(n+2)(2n^5+14n^4+49n^3+91n^2+90n+18)$. Für $n=2$ ergiebt sich hieraus die von Herrn Lüroth zuerst bestimmte Anzahl 92 der 8 gegebene Gerade schneidenden Kegelschnitte. Scht.

J. Bacharach. Ueber den Cayley'schen Schnittpunktsatz. Klein Ann. XXVI. 275-299.

Die auf Abzählung von Constanten gegründeten Beweise mancher Schnittpunktsätze lassen noch gerechte Zweifel über deren allgemeine Gültigkeit bestehen. Der Verfasser verwirft deshalb diese Beweise und setzt algebraische an deren Stelle. Zugleich ergeben sich hieraus die Modificationen, welcher die bekannten Schnittpunktsätze, insbesondere der Cayley'sche, bedürfen.

Es wird zunächst auf algebraischem Wege der folgende Fundamentalsatz der ganzen Untersuchung bewiesen: „Wenn von den np Schnittpunkten einer Curve n^{ter} Ordnung und einer Curve p^{ter} Ordnung pq auf einer Curve q^{ter} Ordnung liegen, so liegen die übrigen $p(n-q)$ Schnittpunkte auf einer Curve $(n-q)^{\text{ter}}$ Ordnung". Hierauf gründet sich der Beweis des Brill-Nöther'schen Restsatzes, dem folgende Form gegeben wird: „Sind auf einer algebraischen Curve F die Punktgruppen G_R und $G_{R'}$ einander corresidual in Bezug auf eine Punktgruppe G_Q, so sind sie es auch in Bezug auf jede andere $G_{Q'}$, welche zu einer von

bzen (etwa G_R) residual ist". Dem Cayley'schen Satze, welcher in ursprünglicher Form heisst: Eine Curve r^{ter} Ordnung, welche durch $mn - \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ Schnittpunkte zweier Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung geht [wo $\gamma = m+n-r$, $r \geqq m$, $r \geqq n$, $r \leqq m+n-3$], enthält auch die übrigen $\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ Schnittpunkte der letzteren", wird folgende Ergänzung gegeben: „Der Satz ist im allgemeinen richtig, wenn dagegen diese $\delta = \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ Punkte auf einer Curve $(\gamma-3)^{ter}$ Ordnung liegen, so braucht eine durch die $mn - \delta$ Punkte gelegte, aber sonst willkürliche Curve r^{ter} Ordnung nicht zugleich durch die δ übrigen Schnittpunkte der beiden Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung zu gehen.

Der Ausnahmefall wird besonders behandelt, ein zweiter Beweis des Cayley'schen Satzes gegeben, und es werden dann Anwendungen des Satzes auf specielle Fälle gemacht. Schliesslich wird die Mannigfaltigkeit der Curven r^{ter} Ordnung untersucht.

W. St.

J. S et M. N. Vaneček. Sur la génération des surfaces et des courbes gauches par les faisceaux de surfaces. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 130-133.

Die Note enthält einige Angaben über die Ordnung der mittels gewisser Systeme erzeugten Oberflächen und Curven. Die wichtigsten Fälle sind die beiden folgenden:

Es seien gegeben ein $(n-1)$-fach unendliches System (R) mit dem Index m von Oberflächen R der Ordnung r; n Curven $(p_1), \dots, (p_n)$ von den Ordnungen $p_1, \dots, p_n$; n einfach unendliche Systeme $(F_1), \dots, (F_n)$ mit den Indices $m_1, \dots, m_n$ von Flächen $F_1, \dots, F_n$ von den Ordnungen $f_1, \dots, f_n$. Man ordne $F_1, \dots, F_n$ einander zu, wenn sie bezw. durch n Punkte von $(p_1), \dots, (p_n)$ gehen, die auf einer nämlichen Fläche von (R) liegen. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Flächen von $(F_1), \dots, (F_n)$ wird eine Oberfläche von der Ordnung $nrmm_1 \dots m_n f_1 \dots f_n p_1 \dots p_n$. Wenn man unter Festhaltung aller anderen Voraussetzungen nur annimmt, dass (R) $(n-2)$-fach (nicht mehr $(n-1)$- [illegible] lich

ist, so wird der Ort der den entsprechenden $F_1, \ldots, F_n$ gemeinsamen Punkte eine Curve von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)r^2 m m_1 \ldots m_n f_1 \ldots f_n p_1 \ldots p_n.$$

Se. (Lp.)

H. Schubert. Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes Klein Ann. XXVI. 26-51.

Ein im n-dimensionalen Gebiet liegender a-dimensionaler Raum (Hauptelement), bezeichnet durch $[a]$, ist durch $(n-a)$ Bedingungsgleichungen bestimmt, aus deren Existenz sich Sätze über die Anzahl von Räumen ergeben, welche andere gegebene Räume gleichzeitig enthalten oder gleichzeitig in ihnen enthalten sind. Von diesen Sätzen, die sich ihrer Natur nach zunächst an die von Grassmann in der Ausdehnungslehre von 1844, S. 185 (Neudruck S. 184) gegebenen anschliessen, teilt der Verfasser neben zwei schon von Veronese gefundenen mehrere neue mit, die bei der weitern Untersuchung als Hilfssätze verwandt werden. Der wichtigste lautet: Es ist für einen $[a]$ eine $(c+1)(n+c-a-b)$-fache Bedingung, mit einem $[b]$ einen und nur einen $[c]$ gemeinsam zu haben. Für $a = b = c$ ergiebt sich $(a+1)(n-a)$ als Constantenzahl eines $[a]$. Hieran schliesst sich eine Reihe anderweitiger Specialisirungen. „Grundbedingungen" eines Punktes sind die Bedingungen, welche aussagen, dass er in irgend einem $[a]$ liege. Demnach bedeutet $[0]$, dass der Punkt gegeben ist, während die Bedingung $[n]$ stets von selbst erfüllt ist. Der Verfasser findet, dass analog alle Grundbedingungen eines Strahls in dem Symbol (a, b) enthalten sind, wenn $a < b$, $b \leqq n$ ist, $[a]$ in $[b]$ liegt, und der Strahl in $[b]$ liegt und $[a]$ schneidet. Die Anzahl aller Grundbedingungen des Strahles ist dann $\tfrac{1}{2}n(n+1)$, und die Dimensionenzahl der Bedingung $[p, q]$ ist $2n-1-p-q$. Analog bedeutet für die Ebene das Symbol (a, b, c), dass $[a]$ in $[b]$ und $[b]$ in $[c]$ liegt, und die Ebene mit $[c]$ alle ihre Punkte, mit $[b]$ die Punkte einer Geraden, mit $[a]$ einen Punkt gemeinsam hat. Analoges wie für Gerade und Ebene gilt, wie der Ver-

fasser zeigt, auch für Hauptelemente von beliebiger Dimensionenzahl. Als „Grundgebilde" wird ferner die Gesamtheit der eine gegebene Grundbedingung erfüllenden Hauptelemente definirt, und es wird die Stufenzahl dieses Grundgebildes bestimmt, auch die Perspective in die Erzeugung höherer Gebilde durch projective Zuordnung solcher Grundgebilde eröffnet. Der nächste Fortschritt der Betrachtung besteht darin, dass ein Hauptelement mehreren Grundbedingungen gleichzeitig unterworfen wird. Es kommt dann darauf an, diese zusammengesetzte Bedingung, die sich zunächst als Product einfacher Bedingungen darstellt, durch eine einfache Grundbedingung zu ersetzen. Diese Aufgabe löst der Verfasser in der vorliegenden Arbeit allgemein für den Strahl, während für höhere Hauptelemente erst die Grundlagen der Lösung gewonnen sind. Der letzte Abschnitt bringt als Anwendung die Lösung von zwei specielleren Aufgaben, nämlich Bestimmung der Zahl der Strahlen eines $[n]$, welche 1) der einfachen Bedingung, einen gegebenen $[n-2]$ zu schneiden, 2) der zweifachen Bedingung, einen gegebenen $[n-3]$ zu schneiden, beliebig oft, und ausserdem einer beliebigen Grundbedingung genügen. Schg.

H. Schubert. Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche m^{ten} Grades. Klein Ann. XXVI. 52-73.

Der Verfasser bestimmt zuerst die Anzahl derjenigen aus einem Strahl g und darauf liegendem Punkt p bestehenden Gebilde, welche eine beliebige algebraische $(n+a-1)$-fache Bedingung Z erfüllen, während ausserdem g der Bedingung (a, n) und p der Bedingung $(n-1)$ genügt. (S. vorstehendes Referat.) Sodann leitet er die allgemeine Coincidenzformel für Punktepaare ab und wendet sich nach diesen Vorbereitungen zu der Aufgabe: Für einen im n-dimensionalen Raume liegenden $(n-1)$-dimensionalen punktallgemeinen Raum m^{ten} Grades die Anzahl derjenigen Geraden durch m und n auszudrücken, welche die letzteren in

$(i+1)$ unendlich nahen Punkten berühren, dabei selbst (
beliebige Grundbedingung erfüllen und auch ihren Berührui
punkt eine solche erfüllen lassen. Der Verfasser findet du
Analogie eine Formel, die er dann durch den Schluss vo
auf $n+1$ beweist. Hervorzuheben ist, dass die nach Poter
von n fortschreitende Schlussformel in den Coefficienten di
der Theorie der höheren Differentialquotienten auftreten
„Facultätencoefficienten" enthält. Den Schluss der Arbeit bil
verschiedene Specialisirungen des Hauptresultates.

Schg.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Lehrbücher, Coordinaten.

H. FUNCKE. Die analytische und die projectivische Geometrie der Ebene, die Kegelschnitte auch nach den Methoden der darstellenden und der elementar synthetischen Geometrie, mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Potsdam A. Stein. 108 S. 8°.

Der in dem ausführlichen Titel gekennzeichnete Stoff wird in sehr knapper Vortragsform unter den Ueberschriften abgehandelt: Der Punkt, die Gerade, der Kreis, die Kegelschnitte, complicirte analytische Curven, Anhang (Differentialrechnung). Der Inhalt ist sehr reichhaltig für den geringen Umfang; in der gewählten Dreiteilung der Behandlung kommen besonders die verschiedenen Gesichtspunkte zur Geltung, unter denen die geometrischen Gebilde betrachtet werden können. Die mitgegebenen Aufgaben sind gut gewählt, zahlreich und verschiedenartig. Dem ganzen Werke fehlt jedoch die letzte genaue Durchsicht. Die Ausdrucksweise ist oft unklar, daher bisweilen misszuverstehen, ein anderes Mal unverständlich. In den Sätzen und Formeln sowie in den Aufgaben stecken mannigfache Versehen und Irrtümer. Lp.

J. Carnoy. Cours de géométrie analytique. Géométrie plane. Quatrième édition revue et augmentée. Paris. Gauthier-Villars. Louvain. Peeters. LIII 456 S. 8°.

Vermehrte Auflage des F. d. M. IV. 323-324 angezeigten Werkes. Dieselben Eigenschaften und Mängel.

Mn. (Lp.)

J. Casey. A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle, and conic sections, containing an account of its most recent extensions; with numerous examples. Dublin. Hodges. Ref. Nature XXXIII. 172-173.

Nach dem Referate in Nature ist das Werk in acht Capitel eingeteilt. In demselben werden behandelt: I. Coordinaten. Punkt. II. Gerade (in Cartesischen, trilinearen, Punkt- und Linien-Coordinaten nach Clebsch). III. Kreis. IV. Allgemeine Gleichung zweiter Ordnung. V. Parabel. VI. Ellipse. VII. Hyperbel. VIII. Vermischte Untersuchungen. Die Anzahl der Aufgaben übersteigt 600. Lp.

N. G. Ljungzell. Analytisk geometri. Plana linierna af första och andra graden. Stockholm. Norman. 8°. 31 S.

Elementares Lehrbuch der analytischen Geometrie; behandelt in gewöhnlicher Weise die Gerade und die Kegelschnitte.

E.

F. Aschieri. Il sistema delle coordinate omogenee projettive pegli elementi dello spazio ordinario (*X*§). Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 559-584.

Die Arbeit enthält eine vereinfachte und strengere Begründung der schon in einem früheren Aufsatze gegebenen Ableitung des gewöhnlichen Systems homogener Coordinaten des Punktes und der Ebene. Der Reihe nach werden behandelt homogene tetraedrische Coordinaten der Geraden und homogene projectivische

Coordinaten eines Punktes und einer Ebene. Die folgenden Abschnitte behandeln die zweifache Deutung einer homogenen Gleichung als Gleichung einer Ebene oder eines Punktes, das anharmonische Verhältnis von vier Strahlen eines Büschels und die Gleichungen der Fundamentalcurve dritter Ordnung, wobei die Uebereinstimmung der vom Verfasser gefundenen homogenen Coordinaten mit den Fiedler'schen hervorgehoben wird.

Schg.

W. Krimphoff. Zum Schwering'schen Liniencoordinatensystem. Schlömilch Z. XXX. 253-256.

Die Reciprocität der Schwering'schen Liniencoordinaten mit den Cartesischen Punktcoordinaten wird durch Aufstellung der projectivischen Bedingungen erläutert, unter welchen die Gleichungen eines Kegelschnittes in beiden Systemen die einfachste Form annehmen. Es wird ferner die Bedeutung angegeben, unter welcher die unendlich ferne Gerade Doppeltangente einer Curve n^{ter} Klasse ist, der Ausdruck für den Krümmungsradius, endlich die Gleichungen der Transformation aus Cartesischen in Schwering'sche Coordinaten. Schg.

M. d'Ocagne. Étude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan: coordonnées parallèles et coordonnées axiales. Nouv. Ann. (3) IV. 110-130.

Diese Arbeit, eine Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verfassers (F. d. M. XVI. 1884. 614), enthält reciproke Uebertragungen verschiedener auf rechtwinklige Coordinaten bezüglicher Sätze und Begriffe der analytischen Geometrie. Dies gelingt zunächst ohne Schwierigkeit mit der Teilung einer Strecke in einem bestimmten Verhältnis. Der Verfasser vergleicht sodann die Gleichung einer Geraden a im rechtwinkligen System, $y = mx + n$, mit derjenigen eines Punktes A im reciproken System, $v = m_1 u + n_1$, und ermittelt einen durch die Gleichung

$\operatorname{tg} \varphi_1 = m$ bestimmten Winkel („Winkelmodul" des Punktes A) der ebenso als Winkel des Punktes A mit dem Coordinaten-Fundamentalpunkt X anzusehen ist, wie der durch die Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = m$ bestimmte Winkel φ als Winkel der Geraden a mit der Axe x. (Zu dem Begriff des „Winkels zweier Punkte" gelangte übrigens schon Schendel in seinen „Elementen der analytischen Geometrie in trilinearen Coordinaten" Jena 1874, Nr. 10). Diese Festsetzung gestattet nun eine vollkommen reciproke Uebertragung der Sätze von Winkeln aus der Punkt- in die Liniengeometrie. Demgemäss werden im Folgenden die Begriffe und Eigenschaften des Winkels zweier beliebigen Punkte, sowie der parallelen und senkrechten Punkte erörtert. Der Verfasser lässt dabei nicht unerwähnt, dass die specielle Lage solcher Gebilde zu einander abhängig ist von der Lage des Coordinatensystems. Nach einigen Anwendungen auf Homographie und Involution wendet sich der Verfasser zur reciproken Transformation der Kegelschnitte, wobei wieder neue Begriffe, wie: Normalpunkt, Asymptotenpunkte, Brennlinien, Diametralpunkte, Mittelgerade, etc. gewonnen werden. Dann werden diejenigen Formen der Kegelschnittsgleichungen in Liniencoordinaten untersucht, welche den specialisirten Formen in Punktcoordinaten entsprechen; es folgen schliesslich zahlreiche Uebertragungen verschiedener Sätze aus der Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte in die reciproke Form. Schg.

M. d'Ocagne. Coordonnées parallèles et axiales.
Paris. Gauthier-Villars. 91 S.

Der grösste Teil des Buches (S. 1-72) ist eine wörtliche Reproduction früherer Arbeiten des Verfassers in den Nouv. Ann., über welche in den F. d. M. XVI. 1884. 614 und im vorstehenden Referat berichtet worden ist. Es folgt eine sehr beachtenswerte graphische Lösung der allgemeinen trinomischen Gleichung. Diese Lösung ist nichts anderes als eine reciproke Transformation der von Lalanne 1846 in den Ann. d. Ponts et Chauss. gegebenen, besitzt aber eben in Folge der Ver-

wendung reciproker Coordinaten den schwerwiegenden Vorzug, einen Wurzelpunkt als Schnittpunkt einer Geraden, statt als Berührungspunkt einer Tangente, mit einer vorgezeichneten Curve zu liefern. Den Schluss des Buches bilden einige Bemerkungen über anderweitige Verwendungsweisen der Parallel-Coordinaten. Alle diese Anwendungen beweisen, dass durch die hier verwendeten Liniencoordinaten die Auffassung der Curven als Tangentengebilde dasjenige analytische Förderungsmittel erhalten hat, welches am vollkommensten dem der rechtwinkligen und Polarcoordinaten für die Punktauffassung entspricht, wie dies auch bei dem reciproken Charakter der beiden Coordinatengattungen vorauszusehen war. Es sei schliesslich noch daran erinnert, dass des Verfassers „Parallel-Coordinaten" mit den von Schwering, und seine „Axialcoordinaten" mit den vom Referenten in seiner Abhandlung über reciproke Polarcoordinaten (Franc. Ass. 1885) aufgestellten identisch sind, wie denn auch Fiedler teils durch seine Untersuchungen über projectivische Coordinaten, teils durch dualistische Betrachtungen gelegentlich zu jenen beiden Coordinatensystemen geführt worden ist.

Schg.

E. Cesaro. Remarques sur un article de M. d'Ocagne. Nouv. Ann. (3), IV. 256-264.

Es wird in dieser mehrfach anregenden Arbeit zunächst der Charakter der d'Ocagne'schen Axialcoordinaten als reciproker Polarcoordinaten festgestellt; sodann wird [illegible] der von d'Ocagne als Beispiele benutzten Curven i[illegible] bekannten Curven dargelegt und eine Anzah[illegible] jener Curven angegeben. Mit Benutzung der [illegible] werden dann insbesondere die den Konch[illegible] Curven untersucht, wobei Fragen aufgeworfen [illegible] gende: Welche Transformation entspricht im [illegible] derjenigen durch reciproke Radien? Welche Cu[illegible] ihren Reciprocalcurven ident[illegible] [illegible]

[illegible]

dass einige dieser Fragen bereits von Laguerre in den Nouv. Ann. beantwortet worden sind. Schg.

V. Schlegel. Sur le système de coordonnées réciproque à celui des coordonnées polaires. Franc Ass (Congr de Grenoble)

L. Janse Bz. Verandering van rechthoekige coördinatenstelsels Nieuw Arch. XII 109-112.

Die Transformation von rechtwinkligen Coordinaten kann auf doppelte Art geschehen; beide Arten werden gewöhnlich nach Lagrange und Euler benannt und unterschieden. In der kurzen Note wird auf den Zusammenhang zwischen den Grössen hingewiesen, welche in beiden Transformationsmethoden die neue Lage des Systems bestimmen. Dies wird dadurch gezeigt, dass die Grössen des einen Systems construirt werden, wenn die des anderen gegeben sind. G.

S Gundelfinger. Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen. Kronecker J. XC 147-153

Wenn zwei beliebige ganze homogene Functionen $\varphi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ und $\psi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ durch eine orthogonale Substitution

$$\xi_\varkappa = a_\varkappa^0 x_0 + a_\varkappa^1 x_1 + \dots + a_\varkappa^n x_n$$

übergehen in $\Phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ resp. $\Psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$, so wird gleichzeitig

$$\sum_\varkappa \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\varkappa} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_\varkappa} = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial\Psi}{\partial x_\varkappa},$$

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_\varkappa \partial\xi_\lambda} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_\varkappa \partial\xi_\lambda} = \sum \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda}$$

. . . .

Von diesem Satze werden Anwendungen auf die Lehre von den krummlinigen orthogonalen Coordinaten gemacht, die in Beziehung zu den Untersuchungen des Herrn Verfassers in Borchardt J. LXXXV. 295 stehen (vgl. F. d. M. X. 444). No.

R. HOPPE. Neue Relationen innerhalb eines Orthogonal-coefficientensystems. Hoppe Arch. (2) II. 413-416.

Das Charakteristische der aufgestellten Relationen ist, dass die Coefficienten nicht symmetrisch in die Gleichungen eingehen.

No.

J. J. SYLVESTER. On the trinomial unilateral quadratic equation in matrices of the second order. Quart. J. XX. 305-312.

Bedeuten in $x^2-2Bx+D=0$ die Coefficienten B und D Matrizen oder Quaternionen, und zwar Functionen einer einzigen Matrize, welche Basis genannt werden soll, so giebt es möglicherweise ausser den drei Paaren bestimmter Wurzeln der Gleichung, welche Functionen dieser Basis sind, noch andere von ihr unabhängige. Es wird untersucht, unter welchen Umständen dieser Fall eintritt, und es stellt sich heraus, dass das Verschwinden einer gewissen Grösse die Bedingung bildet. Am Schluss des Aufsatzes wird die Summe der sechs Wurzeln der Gleichung bestimmt.

No.

A. BUCHHEIM. On the theory of matrices. Lond. M. S. Proc. XVI. 63-82.

Die Theorie der Matrizen wird unter Zugrundelegung eines von Grassmann in seiner Ausdehnungslehre definirten Operators behandelt. Hierdurch gewinnen manche Teile dieser Lehre an Einfachheit. Nur die Methoden, nicht die Theoreme sind neu.

No.

J. J. SYLVESTER, G. B. MATHEW[illegible] [illegible]tion 7922. Ed. Times XLIII. 105-107.

Die Gleichung in Quaternionen x^2 [illegible]
und diese Wurzeln, angesehen als zum [illegible]
gehörig, gehorchen der Hamilton'schen Le[illegible]

A. Buchheim. A memoir on biquaternions. Newcomb Am. J. VII. 293-326.

Der Verfasser giebt in der Einleitung eine kurze Uebersicht über die Arbeiten Clifford's auf dem Gebiete der Biquaternionen und deren Anwendungen auf die Geometrie des parabolischen und des elliptischen Raumes. Die zum Teil fragmentarischen und ohne Beweis mitgeteilten Resultate Clifford's hat der Verfasser in einer Reihe vorhergehender Arbeiten mit den Methoden der Ausdehnungslehre abgeleitet, wie denn auch Cox mit denselben Methoden die Clifford'schen Untersuchungen auf den hyperbolischen Raum ausgedehnt hat. Im Gegensatz hierzu bezweckt die vorliegende Arbeit, die von Clifford selbst angewandten Methoden zusammenhängend auseinanderzusetzen. Die Clifford'sche Biquaternion ist insofern eine Verallgemeinerung der Hamilton'schen $(q+iq')$, als sie an Stelle des Factors i ein Operationssymbol ω setzt, dessen Quadrat in den drei Fällen des elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Raumes bezw. gleich $+1, 0, -1$ ist. Durch diese Verallgemeinerung wird es möglich, die Hamilton'sche Behandlung der Geometrie des Punktes und der Geraden auf die linearen Complexe auszudehnen. Der erste Teil der Arbeit entwickelt die an das Symbol ω sich anschliessenden rechnerischen Methoden, die sich im wesentlichen als eine Modification der Hamilton'schen darstellen, der zweite giebt verschiedene geometrische Anwendungen. Schg.

P. G. Tait. On an equation in quaternion differences. Edinb. Proc. 561-562.

Cly.

E. Laguerre. Recherches sur la géométrie de direction. Méthodes de transformation. Anticaustiques. Paris. Gauthier-Villars.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

Ch. Biehler. Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires. Nouv. Ann. (3) IV. 153-159.

Der Herr Verfasser setzt die Gleichung der Curve in die Form:

$$u = f(\omega),$$

wo $\frac{1}{u}$ der Fahrstrahl und ω seine Neigung gegen die Axe des Polarcoordinatensystems ist. Er giebt dann die Tangente in einem Curvenpunkte und untersucht die Gestalt der Curve in der Nähe dieses Punktes durch Betrachtung des Unterschiedes von Fahrstrahlen nach Punkten der Curve und solchen nach Punkten der Tangente. Die Inflexionspunkte werden durch die Gleichung gegeben:

$$f(\omega) + f''(\omega) = 0.$$

Weiterhin folgt dann eine Theorie der Asymptoten, und die Untersuchung der parabolischen Zweige einer Curve. Die Untersuchungen des Verfassers sind unter demselben Titel auch separat bei Gauthier-Villars erschienen. Mz.

G. Ascoli. Dei rami algebrici di curva. Lomb. Ist. Rend. XVIII. 279-284.

Ein ganz im Endlichen liegender, algebrais[illegible] besteht aus dem Inbegriffe der Punkte (x, y), für [illegible]

$$x + iy = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots \qquad (t_0 - [illegible]$$

wo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nicht gleichzeitig verschwinden, u[illegible] innerhalb eines Kreises um t_0 convergirt, dessen Rad[illegible]

Der Verfasser stellt Betrachtungen über die Form solcher Zweige an, welche als besondere Fälle der früher von ihm definirten „Curvenzweige" erscheinen (s. Le curve limite d'una varietà data di curve. Rom Acc. L. Mem. (3) XVIII. 521-586).

Die algebraischen Curvenzweige, denen der unendlich ferne Punkt als innerer Punkt oder als Endpunkt angehört, werden analog definirt. (S. auch Abschnitt VI. Cap. 6. S. 349.)

Vi.

H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles. Jordan J. (4) I. 167-244.

Das Vorliegende schliesst sich als dritter Artikel an die Abhandlung (3) VII. 375, VIII. 251 (siehe F. d. M. XIII. 1881. 591, XIV. 1882. 666) an. Es handelt sich um die Gestalten der Curven, welche die Gleichung

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

unter X, Y Polynome in (x, y) verstanden, darstellen. Im Gegenwärtigen drückt die Gleichung, geschrieben

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

die Bahn eines Punktes in der Ebene aus; X, Y können auch irrationale algebraische Functionen bezeichnen. Die Bewegung wird als stabil definirt, wenn der bewegte Punkt seinem Ausgangspunkte unendlichmal unendlich nahe kommt. Es wird zuerst für rationale X, Y die Bedingung der Stabilität gesucht, dann dasselbe, wenn die Gleichung in der Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gegeben ist, dann die Verteilung der singulären Punkte untersucht, dann die zwei ersten Fragen verallgemeinert; dann folgt eine Untersuchung des „tore".

H.

W. Krimphoff. Beitrag zur analytischen Behandlung der Umhüllungscurven. Pr. Coesfeld.

Mittels Cartesischer Punkt- und Schwering'scher Liniencoordinaten (cfr. F. d. M. VIII. 1876. 414) wird eine Reihe von Umhüllungscurven nebst den ihnen polar reciproken Curven bestimmt. Ein Beispiel der hier behandelten Curven findet sich schon bei Steiner in Crelle J. LIII. Im übrigen mögen, um von der Art der hier gelösten Aufgaben eine Vorstellung zu geben, folgende Beispiele erwähnt werden: Man bestimme die Enveloppe der einer Parabel mit ihrem Osculationskreise gemeinsamen Sehne (vgl. F. d. M. XV. 1883. 598). Auf einem Centralkegelschnitt bewegen sich zwei Punkte so, dass das Verhältnis ihrer Argumente $(-m):n$ ist. Auf welcher Curve bewegt sich der Schnittpunkt ihrer Tangenten?

Schg.

E. Habich. Sur les rayons de courbure de deux courbes qui rencontrent les tangentes d'une troisième courbe sous des angles liés par une relation donnée. S. M. F. Bull. XIII. 201-204.

Construction von Krümmungsradien in Bezug auf Curven, die in gegenseitiger Abhängigkeit sind, und Anwendung hiervon auf die durch Refraction entstehenden Brennlinien.

Mz.

M. d'Ocagne. Sur les isomét[illegible] d'une droite par rapport à certains systèmes d[illegible] S. M. F. Bull. XIII. 71-83.

Es sei ein System (C) ebener Cur[illegible] System (K) von Curven K schneide das [illegible] der Curven von (K) zwischen zwei belie[illegible] (C) unter einander gle[illegible] sind; dann [illegible] Curven K „isometrische [illegible] des [illegible]

erste Curve von (K) beliebig angenommen werden kann, so werden die übrigen „die Isometrischen der ersten bezüglich des Systems (C)" genannt. Die Arbeit behandelt den Fall, dass die erste, willkürlich gewählte Curve von (K) eine Gerade D ist.

Die rechtwinkligen Coordinaten seien so angenommen, dass die Gerade D die Gleichung $x = a$ habe; die Gleichung einer Curve von (C) sei $F(x, y, \lambda) = 0$, wo λ ein willkürlicher Parameter. Die Ordinate h der Schnittpunkte von D mit C wird durch die Gleichung $F(a, h, \lambda) = 0$ bestimmt. Die Elimination von λ zwischen beiden Gleichungen ergebe $h = \varphi(x, y)$. Dann ist die Differentialgleichung der Isometrischen von D:

$$\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - 1 = 0.$$

Folgende Fälle werden behandelt: Das System (C) wird gebildet durch 1) die verschiedenen Lagen einer unveränderlichen Curve, die parallel zu D in der Ebene gleitet; 2) concentrische Kreise; 3) einen geradlinigen Strahlenbüschel; 4) gleichseitige Hyperbeln mit denselben zwei Asymptoten, von denen die eine parallel zu D; 5) Kreise mit den Mittelpunkten auf D, die durch einen und denselben Punkt von D gehen. Die Fälle 4) und 5) führen auf elliptische Functionen. Lp.

M. d'Ocagne. Sur les courbes isométriques. Brux. S. sc. Ann. IX. A. 56-58.

Uebersicht über eine in S. M. F. Bull. veröffentlichten Mitteilung. (Vergl. den vorangehenden Bericht.)

N. N. Från fysisk matematiska Föreningen i Upsala III. 2. Zeuthen T. (5) III. 163-164.

Beweis des Satzes: Bildet man zu einer gegebenen Curve die Fusspunktcurve, zu derselben wieder die Fusspunktcurve

u. s. w., so wird die Grenzcurve sich im allgemeinen auf eine endliche Anzahl von discreten Punkten reduciren.

Gm.

B. Theorie der algebraischen Curven

M. Nöther. Ueber reducible Curven. Erlang. Ber.

Die bekannten Schnittpunktsätze, der Begriff des Geschlechts, die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten Curven, der Riemann-Roch'sche Satz werden für die Fälle erweitert, dass die ebene resp. räumliche algebraische Curve reducibel wird.

Dies liefert zugleich ein Kriterium für die Irreducibilität einer algebraischen Curve. Eine weitere Ausführung erscheint in den Acta Mathematica.

My.

Chrystal. On the Hessian. Edinb. Trans. XXXII. 645-650.

Enthält die Berechnung der Anzahl von solchen Schnittpunkten zwischen einer Curve und ihrer Hessiana, welche in einem vielfachen Punkt der Curve absorbirt werden; in manchen Fällen von ganz speciellem, in anderen von allgemeinerem Charakter.

Cly. (Lp.)

B. Sporer. Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven. Hoppe Arch. (2) III. 84-91.

Eliminirt man eine der beiden Coordinaten zwischen den beiden Gleichungen einer Curve m^{ter} und einer Curve n^{ter} Ordnung, so sind die Coefficienten der Glieder von der Ordnung mn und $mn-1$ nur abhängig von den Coefficienten der Glieder der gegebenen Gleichungen, deren Ordnung m und $m-1$, n und $n-1$ ist. Aus der bekannten Beziehung zwischen den Gleichungen

der Asymptoten und den Gliedern höchster Dimensionen der Curvengleichung folgt sofort, dass die Schnittpunkte zweier algebraischen Curven denselben Schwerpunkt haben wie die Punkte, welche die Asymptoten der einen Curve mit den Asymptoten der anderen gemein haben. Der Fall $m = 1$, n beliebig, ist schon von Newton behandelt, was dem Verfasser nicht bekannt gewesen ist. Ausser für diesen Fall werden auch noch Specialtheoreme für $m = 2$, n beliebig, angegeben. Lp

G. Humbert. Application géométrique d'un théorème de Jacobi. Jordan J. (4) I. 347-356.

Ein von Jacobi in der Abhandlung: Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum (Crelle J. XIV. 288, Ges. Werke III. 287 ff.) aufgestellter Satz in der Fassung, die ihm Clebsch und Gordan in den „Abel'schen Functionen" p. 44 gegeben haben, auf das System der Gleichungen einer Curve m^{ter} und einer anderen n^{ter} Ordnung angewandt, führt zu folgenden allgemeinen Sätzen: I. Die Summe der Cotangenten der Schnittwinkel zweier algebraischen Curven ist gleich der entsprechenden Summe für zwei beliebige Curven, welche dieselben Asymptoten wie die ersteren haben (also insbesondere gleich der Summe der Cotangenten der Winkel, unter denen die Asymptoten der einen Curve die der anderen schneiden). II. Ein Kreis schneidet jede algebraische, durch keinen der Kreispunkte im Unendlichen der Ebene gehende Curve unter Winkeln, deren Cotangenten die Summe Null haben. III. Die Centra der mittleren Kreisentfernungen (ein nach Analogie des Centrums der mittleren Entfernungen einer Geraden gebildeter Begriff) der Punkte, welche eine durch keine der Kreispunkte im Unendlichen gehende Curve n^{ter} Ordnung und ein Kreis gemeinsam haben, beschreiben n Gerade, wenn der Radius des Kreises sich ändert, sein Centrum fest bleibt. IV. Eine algebraische Curve vom Grade $2m$, welche mit der Geraden im Unendlichen in jedem der Kreispunkte m Punkte gemeinsam hat, schneidet eine durch

keinen dieser Punkte gehende algebraische Curve unter Winkeln, deren Cotangenten die Summe Null haben. Lp.

A. Lechthaler. Die Singularitäten der ebenen algebraischen Curven in Cartesianischen Punkt- und Plücker'schen Linien-Coordinaten. Pr. Gymn. Melk. 64 S. 8°.

Die Discussion der geometrischen Singularitäten einer Curve gestaltet sich bekanntlich sehr einfach, falls es gelingt, für jeden endlichen oder unendlichen, singulären oder nicht singulären Punkt die eine Coordinate nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der andern zu entwickeln. Der Herr Verfasser giebt daher eine methodische Darstellung der von Lagrange, Cauchy, Weierstrass u. a. herrührenden Sätze und Beweise für die Entwickelbarkeit algebraischer Functionen, wendet diese Resultate zunächst auf den Doppelpunkt, dann auf die höheren singulären Punkte an, macht den Uebergang zu den Tangentialcoordinaten, um für diese die analogen Resultate zu erzielen, und schliesslich zu zeigen, dass dieselbe geometrische Singularität bei dem Uebergange von der einen Coordinaten Art zur andern auch durch dasselbe analytische Verhalten gekennzeichnet wird. R. M.

E. C. Valentiner. En Bemärkning om Antallet af Spidser paa en Kurve af Ordenen n og Slägten p. Zeuthen T. (5) III. 179-180.

Bemerkung über die Grenzen der Anzahl von Spitzen einer algebraischen Curve von gegebener Ordnung und gegebenem Geschlecht. Gm.

C. Taylor. On orthoptic loci. Brit. Ass. Rep. 909-910.

Herr Taylor definirt einen „orthoptischen Punkt" bezüglich einer Curve als den Schnittpunkt eines Paares rechtwinkliger Tangenten der Curve; der „orthoptische Ort" einer Curve ist der Ort der orthoptischen Punkte jener Curve. In der Arbeit bespricht Herr Taylor die Ordnung des orthoptisch[illegible] einer Curve von gegebener Klasse und erreicht dies Zi[illegible]g-

nahme auf die von den Kreispunkten im Unendlichen gezogen Tangenten. (Vgl. F. d. M. XVI. 1884. 606.) Gbs. (Lp.)

G. Fouret. Sur un nouveau mode de génération d[es] courbes algébriques unicursales. C. R. CI 1241-1243.

Es sei ein System von Massenpunkten gegeben, die v[on] parallelen Kräften angegriffen werden; letztere seien an Grö[sse] und Vorzeichen den Massen und reciproken Abständen dieser Punk[te] von einer Ebene proportional; nach Cauchy heisst der Mitte[l]punkt dieser parallelen Kräfte das „harmonische Centrum“ d[es] Systems bezüglich der Ebene. Der Satz des Herrn Fouret laute[t]: „Sind im Raume $n+1$ Punkte $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ mit den res[p.] Massen $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$ gegeben, so beschreibt das harmonisch[e] Centrum dieser $n+1$ Punkte in Bezug auf eine veränderlich[e] durch eine feste Gerade Δ gehende Ebene eine unicursal[e] Curve n^{ter} Ordnung, welche durch die $n+1$ Punkte geht“. D[ie] Curve ist eine Raumcurve, es sei denn, dass die Punkte A i[n] einer Ebene liegen. Jede unicursale Curve kann auf unendlic[h] viele Arten so erzeugt werden. Der Beweis dieser Umkehrung welche der Verfasser für wichtiger als den Satz hält, wird skizzir[t].

Lp.

G. Humbert. Sur les courbes unicursales. S. M. F. Bull. XII 49-67, 89-95.

In homogenen Coordinaten wird eine unicursale Curve n^{ten} Grades durch Gleichungen von der Form dargestellt:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f_1(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n, \\ x_2 = f_2(t) = b_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \cdots + b_n, \\ x_3 = f_3(t) = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n, \end{cases}$$

wo t ein veränderlicher Parameter ist, $a_0, \dots, b_0, \dots, c_0, \dots$ Con[-] stanten sind. Umgekehrt, jede durch Gleichungen von der obige[n] Form dargestellte Curve ist im allgemeinen vom Grade n un[d] Geschlecht Null; doch kann in manchen Fällen ihr Grad vo[n]

n verschieden sein. Die Erforschung dieser besonderen Fälle hängt eng mit derjenigen der adjungirten Curven der vorgegebenen zusammen. Bekanntlich heisst adjungirte Curve einer Curve S jede Curve, welche durch die Doppelpunkte von S geht, oder allgemeiner jede Curve, die in jedem vielfachen Punkt von der Ordnung p auf S einen vielfachen Punkt von der Ordnung $p-1$ besitzt. Die in der vorliegenden Arbeit behandelten Aufgaben sind die folgenden zwei: 1) „Wenn eine Curve S vom Grade n gegeben ist, welche durch die Gleichungen (1) dargestellt wird, die Gleichung dieser Curve und diejenigen der adjungirten Curven von den Graden $n-2$ und $n-1$ zu bilden". 2) „Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, damit eine durch Gleichungen von der Form (1) dargestellte Curve nicht vom Grade n sei, und diese Bedingungen als Function der in den Gleichungen (1) vorkommenden Coefficienten auszudrücken". Lp.

G. Humbert. Sur les courbes de genre un. Thèse. Paris. Gauthier-Villars. VIII u. 131 S. 4°.

Folgende Fragen werden behandelt: I. „Ist jede Curve, deren Coordinaten doppelt-periodische Functionen eines Parameters sind, vom Geschlechte eins? Welches ist ihr Grad?" II. „Aus einer gegebenen Parameter-Darstellung einer solchen Curve ihre Gleichung abzuleiten." (Die Hermite'sche Methode für doppeltperiodische Functionen dritter Ordnung führt, wenn sie auf Functionen n^{ter} Ordnung angewandt wird, zu einer Gleichung $(2n-3)^{ten}$ und nicht n^{ten} Grades zwischen x und [illegible] III. „Aus einer gegebenen Parameter-Darstellung der Curve [illegible] der zur vorgelegten Curve adjungirten Curve (n [illegible] zu finden, d. h. der Curve $(n-3)^{ten}$ Grades, [illegible] die $\frac{1}{2}n(n-3)$ Doppelpunkte der gegebenen Curve [illegible] und Geschlechte eins geht". Diese drei Aufgaben [illegible] ersten Teile der Arbeit behandelt. Hierbei wird [illegible] genen Coordinaten der Curve eine Parameter-Darst[illegible] geben, in welcher nur Summen [illegible] von

Diese ϑ-Functionen sind durch homogene Relationen zweiten Grades verbunden, aus welchem gewisse „fundamentale" Gleichungen folgen; die Betrachtung der letzteren löst die drei gestellten Aufgaben.

Im zweiten Teile wird der Schnitt einer Curve vom Geschlechte eins und einer beliebigen algebraischen, adjungirten oder nicht adjungirten Curve untersucht. Dabei werden die von Clebsch über die Berührungscurven gefundenen Resultate wiedergewonnen.

Im dritten und letzten Teile werden die Systeme conjugirter Punkte und die Correspondenzen auf einer Curve vom Geschlechte eins definirt und geometrische Eigenschaften dieser Punkte gegeben. Die erhaltenen Resultate werden zuletzt auf die Curven vierten Grades mit zwei Doppelpunkten angewandt.

Unter den im zweiten Teile gelösten Aufgaben befindet sich folgende, auf welche der Verfasser ein besonderes Gewicht legt. „Es sei

$$mn = 2k_1 + k_2 + r_1 l_1 + \cdots + r_\nu l_\nu.$$

Die allgemeine Gleichung der Curven m^{ten} Grades zu finden, welche durch k_1 gegebene Doppelpunkte und k_2 gegebene einfache Punkte auf einer Curve vom Grade n und Geschlechte eins gehen und mit dieser Curve in l_i Punkten, deren Argumente eine gegebene Summe haben, einen Contact $(r_i - 1)^{ter}$ Ordnung haben." Als benutzte Quellen werden die Arbeiten von Clebsch über das Thema in Borchardt's Journal und in den „Vorlesungen über Geometrie" citirt, ferner eine These von d'Esclaibes und das Buch des Herrn Darboux: „Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques". Lp.

M. d'Ocagne. Sur les courbes polaires réciproques homologiques. S. M. F. Bull. XIII. 202-205.

Es seien C und C' zwei reciproke Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt, P ein Punkt auf C, t die Tangente in P, t' und P' die Tangente und der Punkt von C', welche jenen entsprechen. Gehen alle Geraden PP' durch einen und denselben

Punkt A, so liegen alle Punkte (tt') auf einer und derselben Geraden a, der Polaren von A bezüglich K; C und C' sind collinear mit A als Centrum, a als Axe der Collineation. Der Verfasser zeigt: „Die einzigen mit ihren reciproken Polaren collinearen Curven, bei denen die entsprechenden Punkte in beiden Fällen dieselben sind, sind die den Leitkegelschnitt K doppelt berührenden Kegelschnitte". Lp.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

Fr. Graefe. Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte. Für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen. Leipzig. Teubner. IV u. 136 S. 8°.

Die Sammlung enthält 1207 Aufgaben (Repetitionsfragen, Zahlenbeispiele für die beim Vortrage gegebenen Entwickelungen, einfache Aufgaben zur Wiederholung, Lehrsätze und schwierigere Probleme). Neben den Punktcoordinaten werden die Liniencoordinaten in gleichem Umfange berücksichtigt. Die schwierigeren Aufgaben sind mannigfaltig und interessant; doch ist die Fassung mancher derselben nicht präcise, so dass zuweilen der Sinn nicht klar hervortritt. Die Auflösungen sind in einem besonderen Bande 1886 erschienen; über dieselben erfolgt daher der Bericht im nächsten Jahrgange der F. d. M. Lp.

A. H. Anglin. On expressions for th[illegible] near figures. Edinb. Proc. XIII. 336-346[illegible]

Formeln für die Inhalte in Ausdrücken d[illegible] die in den Gleichungen der Seiten enthalten sind[illegible]

G. Emsmann. Mathematische Miscellaneen. Pr. Realgymn. Frankfurt a. O. 34 S. 4° u. 1 Tafel.

I. Die Kegelschnitte als geometrische Oerter. Dritter Teil. (Fortsetzung der Programmabhandlungen von 1875 und 1877 derselben Schule). Die allgemeine Aufgabe, den geometrischen Ort zu bestimmen für die Mittelpunkte von Kreisen, welche zwei gegebene Kreise unter vorgeschriebenen Sehnen schneiden, führt auf eine Curve vierter Ordnung. Sowohl in den beiden früheren Schriften als auch in der jetzigen sind solche besonderen Fälle behandelt, in denen der gesuchte Ort in zwei Kegelschnitte, oder in einen Kegelschnitt und niedere Gebilde zerfällt. Die analytisch gefundenen Resultate sind am Schlusse tabellarisch zusammengestellt.

II. Transporteur mit Trisector. Wiederholung der Angabe, dass das Folium von Descartes zur Trisection eines Winkels dienen kann, wie dies der Verfasser schon 1876 und 1877 in Hoffmann's Zeitschrift beschrieben hat.

III. Die Radien der in und um eine dreiseitige Pyramide beschreibbaren Kugeln. Entwickelung einiger Ausdrücke für diese Längen, weil dem Verfasser „bis jetzt noch keine Formel dafür zu Gesicht gekommen" sei.

IV. Ist n positiv ganz und grösser als 1, so ist

$$2^{n-2}-\tfrac{1}{2}\binom{n-3}{1}2^{n-4}+\tfrac{1}{3}\binom{n-4}{2}2^{n-6}-\tfrac{1}{4}\binom{n-5}{3}2^{n-8}$$
$$+\tfrac{1}{5}\binom{n-6}{4}2^{n-10}+\cdots=\frac{2^n-2}{n}.$$

Lp.

E. Ritsert. Neue Gesichtspunkte in der Theorie der Kegelschnitte. Pr. Gymn. Laubach. 26 S. 4°. u. 1 Tafel.

Eine erweiterte Darstellung der Untersuchungen, über welche F. d. M. XV. 1883. 594 berichtet ist. I. Die Coordinaten. „Ausgehend von einer Strecke $AC=b$, lässt sich ein Punkt P als Schnittpunkt zweier durch A und C gehenden Geraden, die gegen die Basis unter den Winkeln α und γ geneigt sind, fest-

legen." Die Cotangenten dieser Winkel sind die Coordinaten. II. Die gerade Linie. III. Transformation der Coordinaten. IV. Die Gleichung vom zweiten Grade. (Pag. 8 sind die Bezeichnungen Ordnung und Klasse verwechselt, wie dies jetzt öfter vorkommt, u. a. in Funcke's Geometrie der Ebene, vgl. S. 671.) V. Die Liniencoordinaten. VI. Strahlenbüschel. Punktreihen. Die Sätze von Pascal und Brianchon.

Im Grunde handelt es sich um eine Entwickelung der Eigenschaften der Kegelschnitte mit Hülfe des vom Verfasser bevorzugten Coordinatensystems. Lp.

H. LE PONT. Note de géométrie. Teixeira J. VII. 91-97.

Der Verfasser giebt eine Reihe von Theoremen in Bezug auf acht nach dem Modul 3 associirte Gerade, sowie auf acht nach demselben Modul associirte Punkte. Tx (Hcb.)

H. LE PONT. Démonstration nouvelle des théorèmes de Pascal et de Brianchon. Teixeira J. VI. 183-187.

H. LE PONT. Note de géométrie. Teixeira J. VI. 188-190.

Der Verfasser verallgemeinert einige von Herrn P. Serret gegebene Identitäten für sechs Punkte oder für sechs Paare conjugirter Pole, für sechs Tangenten oder sechs Paare conjugirter Polaren eines Kegelschnitts auf den Fall, d[illegible] sechs gemischte Elemente dieser Art betrachtet, Pun[illegible] jugirter Pole, Tangenten und Paare conju[illegible] diesen Identitäten folgert der Verfasser eini[illegible] schnitte.

R. HEGER. Bemerkungen zum Pascal'sche[illegible] Kegelschnittsechsecke. [illegible] Z. XXX 27[illegible]

Die Erzeugung eines Kegelschnittes durch zwei projectivische Strahlenbüschel $T_0-\lambda T_1=0$, $T_1-\lambda T_2=0$ (T_0, T_1, T_2 lineare Functionen der Punktcoordinaten) wird zur Bildung von Identitäten benutzt, wobei die Zahl λ als Repräsentant eines Punktes aufgefasst wird; diese Identitäten enthalten den Beweis des Pascal'schen Satzes. Die Uebertragung analoger Betrachtungen auf zwei projectivische Curvenbüschel liefert zunächst für Kegelschnitte den Satz: „Wird einem Kegelschnitte K ein Sechseck eingeschrieben, dessen Seiten Kegelschnitte sind, die einem Netze angehören, das zwei Träger auf K hat, so liegen die drei Punkte, die durch den Schnitt gegenüberliegender Seiten des Curvensechsecks neu bestimmt werden, auf einem Netzkegelschnitte." Entsprechende Sätze über ebene Curven dritter Ordnung werden nach derselben Methode abgeleitet. Sodann wird, unter Bezugnehmung auf den Aufsatz von Herrn Lüroth: „Ueber das Rechnen mit Würfen" (Math. Ann. VIII., F. d. M. VII. 1875. 301), das umgekehrte Verfahren gegen das dortige eingeschlagen; es werden nämlich auf analytisch-geometrischem Wege reelle und imaginäre Zahlen durch Kegelschnitte dargestellt, sodass der Pascal'sche Satz als der geometrische Ausdruck der beiden arithmetischen Fundamentalsätze der Commutation und Association erscheint. Zuletzt werden diese Ueberlegungen für die Raumcurven dritter Ordnung verwertet. Lp.

M. Pasch. Ueber Viereck, Vierseit und projective Verwandtschaft in der Ebene. Klein Ann. XXVI 211-216.

Der Aufsatz bildet eine Ergänzung zur Abhandlung desselben Verfassers in Klein Ann. XXIII. 419-437 (F. d. M. XVI. 1884. 728): „Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität". Wenn bei einer conjugirten Reciprocität ein vollständiges Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ und ein vollständiges Viereck $abcd$ so liegen, dass durch eine Ecke des Vierseits jedesmal diejenige Seite des Vierecks geht, welche der jener Ecke entsprechenden Seite gegenüberliegt, so nennt der Verfasser das Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ dem Viereck $abcd$ „verkehrt eingeschrieben", das Viereck dem Vierseit „ver-

kehrt umschrieben." Diese Lage wird für eine directe Betrachtung der projectiven Verwandtschaften, bei denen sie auftritt, zum Ausgangspunkt gemacht. Aus den Ergebnissen heben wir folgende Sätze hervor: „Wenn bei einer in eingeschriebener Dreieckslage befindlichen Collineation dem Viereck *abcd* das Viereck $a'b'c'd'$ entspricht, so existirt ein (im allgemeinen einziges) Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$, welches dem Viereck $a'b'c'd'$ umschrieben und zugleich dem Viereck *abcd* verkehrt eingeschrieben ist." „Liegen zwei Vierecke auf einer Ebene perspectiv, so lässt sich im allgemeinen ein und nur ein Vierseit angeben, welches beiden Vierecken verkehrt eingeschrieben ist", und umgekehrt: „Die Vierecke, welche einem und demselben Viereck verkehrt umschrieben werden können, liegen paarweise perspectiv."

Lp.

F. Vályi. Mehrfach collineare Dreiecke bei Kegelschnitten. Hoppe Arch. (2) II. 320-324.

Fortsetzung einer Notiz aus Hoppe Arch. LXX. 334 (F. d. M. XV. 1883. 526) Für zwei collineare Dreiecke giebt es bekanntlich stets einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke polarreciprok sind. Wenn nun die Dreiecke r-fach collinear ($r = 2, 3, 4, 6$) sind, so giebt es r solcher Kegelschnitte. Die Beziehungen dieser Kegelschnitte unter einander werden erörtert. Lp.

G. Humbert. Note sur la théorie des foyers. Nouv. Ann (3) XV. 138-143.

Auf eine sehr einfache Weise wird gezeigt, dass ein Brennpunkt (α, β) des Kegelschnitts:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

durch Auflösung der Gleichungen:

$$(a-s)(c-s) - b^2 = 0,$$
$$b(d + s\alpha) = (a-s)(e + s\beta),$$
$$(d + s\alpha)^2 + s(a-s)(\alpha^2 + \beta^2) - f(a-s) = 0$$

nach s, α, β erhalten wird. Nach der Excentricität wird das verschiedene Verhalten von Ellipse und Hyperbel beurteilt. Dann wird die allgemeine Gleichung der den Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise aufgestellt unter Bezugnahme auf die Aufgabe, den Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte zu finden, die zwei Kreise doppelt berühren. Mz.

Fr. Schiffner. Zur Theorie der Kegelschnitte. Hoppe Arch. (2) III. 223-224.

Es werden sehr einfache Sätze über Tangenten an Kegelschnitten und über die Construction dieser Tangenten angegeben. Zuerst wird die Gleichung:

$$y^2-2mx+nx^2=0$$

und nachher die Polargleichung:

$$r(1+q\cos u)=p$$

als Gleichung des Kegelschnitts zu Grunde gelegt.

Mz.

Fr. Schiffner. Neue Construction von Kegelschnittslinien aus zwei conjugirten Durchmessern. Hoppe Arch. (2) III. 108-110.

Der Herr Verfasser betrachtet die Ellipse als durch die Lage und Grösse ihrer Axen: $AB=2a$, $CD=2b$ gegeben. Er nimmt dieselben zu Coordinatenaxen und construirt AC und BC. Haben nun die Punkte M in (AC) und N in (BC) dieselbe Abscisse $OQ=m$, so haben BM und AN bezw. die Gleichungen:

$$\frac{y}{a-x}=\frac{b(a+m)}{a(a-m)},\quad \frac{y}{a+x}=\frac{b(a-m)}{a(a+m)}.$$

Der Schnittpunkt P von AN und BM ist dann ein Ellipsenpunkt, und die Tangente in ihm geht durch den Punkt L, in welchem MN von einer aus C parallel zu AB gehenden Geraden getroffen wird. Ganz auf dieselbe Art kommt man zur Construction der Ellipsenpunkte mit ihren Tangenten, wenn AB und CD nicht

mehr die Axen, sondern conjugirte Durchmesser bedeuten, die also gleichfalls der Grösse und Lage nach gegeben sind. Auch bei der Hyperbel wird das Entsprechende nachgewiesen.

Mz.

Fr. Schiffner. Wann stehen die von einem Punkte an eine Kegelschnittslinie gezogenen zwei Tangenten auf einander senkrecht? Hoppe Arch. (2) II. 442-445

Der Herr Verfasser betrachtet den Kegelschnitt, der durch die Gleichung:

$$y^2 = px + qx^2$$

definirt ist. Sind ξ, η Coordinaten eines Punktes, von dem zwei zu einander senkrechte Tangenten an den Kegelschnitt gehen, so ist:

$$q(\xi^2+\eta^2)+p\xi+\frac{p^2}{4} = 0.$$

Mz.

T. C. Simmons, A. H. Curtis. Solution of question 7415. Ed. Times XLII 96-98

Von zwei gegebenen Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt wird der eine um diesen Brennpunkt gedreht; dann umhüllt die gemeinschaftliche Sehne einen anderen Kegelschnitt mit demselben Brennpunkte, und die Hüllcurve hängt nur vom Verhältnisse der beiden Excentricitäten sowie von der Lage der beiden Leitlinien ab.

Lp.

A. H. Curtis. Solution of question 7350. Ed Times XLII 83-84

Um einen Kegelschnitt sei ein m-Eck so beschrieben, dass die Bogen der auf einander folgenden Berührungspunkte von einem Brennpunkte aus unter dem nämlichen Winkel erscheinen; 2α sei der Winkel, welchen der Fahrstrahl von einem beliebigen

Berührungspunkte nach dem Brennpunkte mit der Hauptaxe bildet. Dann ist das Product aus den Quadraten der Lote vom Brennpunkte auf die Seiten des m-Ecks umgekehrt proportional mit $C-\cos 2m\alpha$, wo C eine Constante ist, die bei der Parabel gleich eins wird. Eine symmetrische Function positiver Potenzen der Quadrate der reciproken Lote von einem kleineren als dem m^{ten} Grade ist constant, wenn das Polygon sich den Bedingungen gemäss ändert. Lp.

A. Sýkora. Anmerkung zur Theorie der Kegelschnitte. Cas. XIV. 44. (Böhmisch.)

Wählt man auf der Hauptaxe einer Ellipse oder Hyperbel zwei Punkte, deren Entfernung vom Mittelpunkte gleich u und $-u$, fällt man dann von diesen Punkten Senkrechte auf eine beliebige Tangente des Kegelschnittes, so gilt die Relation

$$u^2(k+l)^2-c^2(k-l)^2 = \pm 4b^2u^2,$$

wenn k, l die Senkrechten, $2c$ die Excentricität und $2b$ die Nebenaxe bezeichnen. Wählt man jene Punkte auf der Nebenaxe, so gilt

$$u^2(k+l)^2+c^2(k-l)^2 = 4a^2u^2,$$

woraus für $u = c$ folgt, wenn $2a$ die Hauptaxe ist,

$$k^2+l^2 = 2a^2.$$

Std.

J. Wolstenholme, A. H. Curtis. Solutions of questions 7863, 7866. Ed. Times XLIII 76-79.

Gegeben sind ein Brennpunkt F und die zugehörige Leitlinie eines Kegelschnittes; ein Kreis berührt die Axe des Kegelschnitts in F und schneidet ihn in P, Q. Obgleich die Gerade PQ von zwei Parametern abhängt (dem Radius des Kreises und der Excentricität des Kegelschnittes), so hat sie doch eine Hüllcurve, nämlich eine Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen. Aehnlich ist die zweite Aufgabe. Lp.

G. Fazzari. Alcune relazioni fra i semiassi delle coniche. Batt. G. XXIII 198-202.

Einige Beziehungen unter den Halbaxen von Kegelschnitten, die in gewisser Weise von Dreiecken abhängen, werden angegeben und bewiesen. Ist nämlich ABC das Coordinatendreieck, und soll ein Kegelschnitt φ_1 durch B und C gehen, und A zum Centrum haben, so ist er durch einen weiteren Punkt M mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0 bestimmt. Die Gleichung von φ_1 ist dann:

$$ay_0 z_0 x^2 + x_0(ax_0 - 4S)yz + 2cy_0 z_0 zx + 2by_0 z_0 xy = 0,$$

wo S der Flächeninhalt und a, b, c die Seiten des Dreiecks ABC sind. Sind nun A_1, B_1, C_1 die Seitenmitten des Dreiecks ABC und l_1, m_1, n_1 die Polaren von resp. A_1, B_1, C_1 in Bezug auf φ_1, so wird ein Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks $l_1 m_1 n_1$ gewonnen. Hierauf wird das Product der Quadrate der Halbaxen L_1, M_1 von φ_1 berechnet und dann die Relation nachgewiesen:

$$L_1^2 . M_1^2 = S . S_1,$$

wo S_1 den Flächeninhalt des Dreiecks $l_1 m_1 n_1$ bezeichnet. Sind dann ebenso L_2, M_2 Halbaxen des Kegelschnitts φ_2, der durch A, C, M geht und B zur Mitte hat, ferner L_3, M_3 Halbaxen des Kegelschnitts φ_3, der durch A, B, M geht und C zur Mitte hat, so hat man:

$$\frac{L_1^2 . M_1^2}{S_1} = \frac{L_2^2 . M_2^2}{S_2} = \frac{L_3^2 . M_3^2}{S_3} = S,$$

wo S_2 den Inhalt des Dreiecks der Polaren von $A_1 B_1 C_1$ in Bezug auf φ_2, und S_3 den Inhalt des Dreiecks der Polaren von $A_1 B_1 C_1$ in Bezug auf φ_3 bezeichnet.

Es folgen dann noch andere Sätze in Bezug auf um und conjugirte Dreiecke.

R. A. Roberts. On the orthogonal trajectories o systems of circles. Mess. XIV 134-138.

Der Verfasser giebt eine allgemeine Methode zur Auf

der orthogonalen Trajectorien der Kreise, welche einen festen Kreis rechtwinklig schneiden und eine weitere Bedingung erfüllen. Durch Inversion wird die Aufgabe auf den besonderen Fall von Kreisen zurückgeführt, deren Mittelpunkte auf einer und derselben Geraden liegen; daher sind die Gleichungen der Kreise in der Form angenommen:

$$(x-\alpha)^2+y^2-r^2=0,$$

wo $r=\Phi(\alpha)$ ist. Die Gleichung der Trajectorie ist das Ergebnis der Elimination von α und θ zwischen den Gleichungen:

$$x=\alpha+r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad \log\tang\tfrac{1}{2}\theta=C+\int\frac{d\alpha}{\Phi(\alpha)}.$$

Als Beispiele giebt der Verfasser die orthogonalen Trajectorien der Kreise, welche 1) zwei gegebene Kreise berühren, 2) mit einem Kegelschnitte doppelte Berührung haben, 3) einen Kegelschnitt in zwei Punkten rechtwinklig schneiden, u. s. w. Die Resultate liegen in dem allgemeinen Theorem eingeschlossen. Die Kreise:

$$(x-\alpha)^2+y^2-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2=0$$

werden rechtwinklig durch eine Curve geschnitten, deren Gleichung durch Elimination von α zwischen den Gleichungen gewonnen wird:

$$x=\alpha+\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\,\frac{c^2-f(\alpha)^2}{c^2+f(\alpha)^2},\quad y=\frac{2cf(\alpha)^2}{f'(\alpha)(c^2+f(\alpha)^2)}.$$

Glr. (Lp.)

K. Zelber. Ueber drei geometrische Kreisörter. Hoppe Arch. (2) II. 324-327.

Durchläuft die Ecke C eines Dreiecks ABC den diesem Dreiecke umschriebenen Kreis, so beschreiben der Schwerpunkt von ABC, der Höhenschnitt und das Inkreiscentrum, wie bekannt, je einen Kreis, was der Herr Verfasser analytisch und auch zum Teil synthetisch nachweist. Am Schlusse werden einige Aufgaben erwähnt, die mit diesen Oertern zusammenhängen.

Mz.

R. Lachlan, B. H. Rau, T. C. Simmons. Solution of question 7720. Ed. Times XLII 39

Es seien α, β, γ drei Winkel mit der Summe 2σ. Vier Kreise, deren Centra innerhalb des Dreiecks ABC liegen, schneiden die Seiten des Dreiecks BC, CA, AB desselben bezw. unter den Winkeln $(\alpha, 2\sigma, \beta, \gamma)$, $(\beta, \gamma, 2\sigma, \alpha)$, $(\gamma, \alpha, \beta, 2\sigma)$. Sind R_1, R_2, R_3, R_4 die Halbmesser dieser vier Kreise, r der des Inkreises von ABC, so gilt die Gleichung:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{1}{r},$$

und schneiden jene fünf Kreise eine beliebige Gerade unter den Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \theta$, so ist:

$$\cos\varphi_1+\cos\varphi_2+\cos\varphi_3+\cos\varphi_4 = 4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\theta$$

Lp.

J. C. Wolstenholme, R. Knowles, S. Marks. Solution of question 7385. Ed Times XLII. 56-57.

An den Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC ziehe man eine Tangente, welche die Seiten BC, CA bezw. in A', B' treffe. Dann ist der Ort für den Mittelpunkt des Umkreises und den Höhenschnitt des Dreiecks $A'B'C$ ein und dieselbe Hyperbel, deren Eigenschaften näher angegeben werden. Lp.

C. M. Piuma. Intorno a quelle circonferenze osculatrici ad un ellisse data, per le quali la corda commune colla stessa passa per un punto dato. Giornale di letture e conversazioni scientifiche di Genova. 1° sem. 206-226.

Die Note enthält eine analytische Lösung der „Question d'admissibilité pour le concours d'aggrégation des sciences mathématiques“ 1882. Diese Frage kann in folgender Weise formulirt werden: „Gegeben sind eine Ellipse und ein Punkt P in ihrer Ebene. 1) Die Anzahl der Krümmungskreise der Ellipse

zu finden, für welche die jedem von ihnen und der Ellipse gemeinsamen Sehnen durch den Punkt P geht. 2) Für jede Lage von P zu bestimmen, wie viele von diesen Kreisen reell sind. 3) Nachzuweisen, dass die Berührungspunkte dieser Kreise mit der gegebenen Ellipse auf einem und demselben Kreise liegen. 4) Die Hüllcurve dieser Kreise zu finden, wenn P die gegebene Ellipse durchläuft. 5) Die Hüllcurve kann auch als Eingehüllte eines Orthogonalkreises zu einem festen Kreise erzeugt werden, dessen Mittelpunkt einen Kegelschnitt durchläuft; die Anzahl von Arten zu bestimmen, wie diese Eingehüllte derartig erzeugt werden kann." La. (Lp.)

E. Cesaro. Remarques sur le cercle osculateur à l'ellipse. Mathesis V. 7-9.

Beziehung zwischen den Oertern für die Brennpunkte einer Ellipse, die mit einem festen Kreise in einem gegebenen Punkte eine Berührung zweiter Ordnung hat. Mu. (Lp.)

A. la Chesnais. Construction du centre de courbure en un point d'une ellipse. Nouv. Ann. (3) IV. 247.

Die Construction des Krümmungscentrums für einen gegebenen Ellipsenpunkt wird hier geleistet durch Deformation der Evolute:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

in die Astroide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{c^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Bei der Astroide ist aber der Berührungspunkt einer Tangente sehr leicht geometrisch aufgefunden, und von diesem Berührungspunkt gelangt man dann zu dem entsprechenden Berührungspunkt der Curve

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

d. h. zum gesuchten Krümmungsmittelpunkt. Mz.

J. C. Wolstenholme, R. Lachlan, S. Marks. Solution of question 7515. Ed. Times XLII. 64-65.

Von einem Punkte O mit den Coordinaten X, Y seien drei Normalen OP, OQ, OR an die Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ gezogen; die Tangenten in P, Q, R bilden ein Dreieck $P'Q'R'$. Setzt man das Verhältnis der Dreiecke $PQR:P'Q'R'$ gleich $k:1$, so ist:

$$\left\{k^2+(k-\tfrac{1}{4})\frac{a^2X^2+b^2Y^2}{c^4}\right\}^2=(\tfrac{1}{4}-k)\left(\frac{a^2X^2-b^2Y^2}{c^4}\right)^2.$$

Da es vier Normalen von O aus giebt, so liefert diese Gleichung auch vier Werte von k. Lp.

A. Martin, J. L. Kitchin, J. O'Regan. Solution of question 7498. Ed. Times XLII. 72-73.

Zieht man durch einen Brennpunkt einer Ellipse eine Gerade, welche mit einer Tangente einen gegebenen Winkel α einschliesst, so ist der Ort für den Schnittpunkt der Tangente und der Geraden ein Kreis. Lp.

J. Rénoy. Solution de question 1535. Nouv. Ann. (3) IV. 391.

Es wird der folgende von Herrn d'Ocagne aufgestellte Satz bewiesen: Das Product der Abstände der Brennpunkte einer Ellipse von einer Normalen ist gleich der Differenz des Quadrates aus dem zur Normalen senkrechten Halbmesser der Ellipse und dem Quadrate der kleinen Halbaxe. Schn.

H. Bassani. Solution de question 1537. Nouv. Ann. (3) IV. 530-531.

Von einem Punkte laufen vier Normalen an eine Ellipse. Haben die vier Fusspunkte die Coordinaten

$$(x_1\, y_1),\ (x_2\, y_2),\ (x_3\, y_3),\ (x_4\, y_4),$$

so gilt folgende Relation:

$$\frac{\sqrt{x_1x_2x_3x_4}}{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}} = a; \quad \frac{\sqrt{y_1y_2y_3y_4}}{\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}} = b.$$

Es bedeuten a und b die Halbaxen der Ellipse. Schn.

J. Wolstenholme. Deux théorèmes. Nouv. Ann. (3) IV. 476-481.

I. In einer gegebenen Ellipse mögen die in P, Q construirten Normalen sich in R treffen und die Geraden OR und PQ gleiche Neigung zu den Axen haben (O Mitte der Ellipse). Dann ist 1) der Teil der Geraden PQ, welcher zwischen den Axen liegt, von constanter Länge, 2) bilden die beiden andern von R an die Ellipse gehenden Normalen einen rechten Winkel mit einander. (Beweis von E. Barisien.)

II. Man construirt die Normale in einem Punkt P einer gegebenen Ellipse; diese Normale treffe die Axen in Q, R; über QR als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, und von einem Punkte S, der auf der in P an die Ellipse gezogenen Tangente liegt, ziehe man Tangenten an diesen Kreis. Dann wird diejenige Ellipsensehne, die durch die Berührungspunkte geht, von P unter einem rechten Winkel gesehen. (Beweis von G. Drouot und H. Bagard.) Mz.

A. Biehler. Das System $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1\right)=0$. Eine Untersuchung in der analytischen Geometrie. 8 S. Marburg. Sipmann.

R. Guimarães. Sobre um theorema relativo a comparação de arcos de ellipse. Teixeira J. VII. 111-116.

Indem der Verfasser von den Theoremen von Graves und Fagnano ausgeht, findet er eine Reihe von Ellipsenbogen, welche rectificirbar sind. Tx. (Hch.)

M. d'Ocagne. Sur les arcs d'ellipse rectifiables. Teixeira J. VII. 178-179.

Herr d'Ocagne bezieht sich auf die in der vorhergehenden Arbeit gegebenen Formeln, vereinfacht für einige Fälle die, welche die Enden der Bogen bestimmen, und gelangt so zu interessanten Resultaten. Tx. (Hch.)

Juhel-Rénoy. Théorèmes sur l'ellipse et l'hyperbole équilatère. Nouv. Ann. (3) IV. 460-463.

1. Verbindet man einen Punkt M einer Ellipse mit den Endpunkten A, A' der grossen Axe, und sind P, Q die Durchschnittspunkte von resp. MA', MA mit der Directrix, welche zum Brennpunkt F gehört, so ist der Winkel PFQ ein rechter. Umgekehrt: Wird ein Segment PQ der Directrix von F unter einem rechten Winkel gesehen, so schneiden sich die Geraden QA, PA' auf der Ellipse.

2. Sind M und M' die Endpunkte zweier conjugirten Halbmesser einer Ellipse, und ist F ein Brennpunkt, so berührt die Gerade $M'H$, welche mit MF parallel ist, denjenigen Kreis, der über der kleinen Axe als Durchmesser beschrieben ist.

3. Ist ein rechtwinkliges Dreieck einer gleichseitigen Hyperbel eingezeichnet, so bestimmen die Katheten desselben auf den Aymptoten zwei Segmente, deren Mittelpunkte auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks liegen. Mz.

Asparagus, J. Wolstenholme, W. T. Mitchell. Solution of question 7816. Ed. Times XLIII. 58-59.

Moret-Blanc. Nouv. Ann. (3) IV. 382-383.

Beschreibt man um einen Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel als Centrum einen Kreis mit einem Radius, der gleich dem Durchmesser PQ der Hyperbel durch den Punkt P ist, so ist das durch die drei andern Schnittpunkte A, B, C bestimmte Dreieck gleichseitig. Lp.

H. Brocard. Solution de question 1500. Nouv. Ann. (3) IV. 524-525.

Die orthogonalen Projectionen eines Punktes einer gleichseitigen Hyperbel auf die Seiten eines ihr einbeschriebenen Dreiecks bestimmen einen Kreis, der durch das Centrum der gleichseitigen Hyperbel geht. Dieser von Herrn P. Terrier aufgestellte Satz findet sich nach der Angabe von Herrn Brocard bereits in einer Schrift von Bobillier (Gergonne Ann. XIX.) über die gleichseitige Hyperbel. Schn.

Solution des questions 1504, 1512. Nouv. Ann. (3) IV. 380-381, 384.

1) Das bei *A* rechtwinklige Dreieck *ABC* ist einer gleichseitigen Hyperbel eingezeichnet, und die Tangenten dieser Curve in *B* und *C* treffen sich in *T*; die Normale in *B* trifft *AC* in *B'*; die Normale in *C* trifft *AB* in *C'*. Dann ist der Winkel *B'TC'* gleich dem Winkel der Tangenten (gegeben von d'Ocagne, bewiesen von Goffart).

2) Man soll die Umhüllungscurve einer Parabel finden, von welcher der Brennpunkt *F* und ein Punkt *P* der Directrix fest gegeben sind (gegeben von d'Ocagne).

Lösung: Eine gerade Linie, und zwar die Senkrechte zu *PF* in der Mitte von *PF* (gelöst von Richard). Mz.

C. Bergmans. Théorèmes sur la parabole. Mathesis V. 71-72, 95-96, 175-180.

Drei und vierzig einfach bewiesene Lehrsätze; mehrere von ihnen, die sich auf den Krümmungsradius beziehen, sind bemerkenswert. Mn. (Lp.)

Moret-Blanc. Solution de question 1544. Nouv. Ann. (3) IV. 333-335.

Es ist eine Parabel gegeben und ein Punkt in ihrer Ebene. Jede Gerade, welche von dem Punkt ausläuft, schneidet eine

Secante aus, und diese bestimmt als Durchmesser einen Kreis. Dem Scheitel der Parabel entspricht in Bezug auf jeden dieser Kreise eine Polare. Die Enveloppe der Polaren ist zu bestimmen. Es ergiebt sich als Enveloppe ein Kegelschnitt.

Schn.

J. Wolstenholme, A. H. Curtis. Solution of question 7711. Ed. Times XLII. 81-83.

Der Ort für die Berührungspunkte der Tangenten, welche man von einem gegebenen Punkte O an eine Reihe confocaler Parabeln ziehen kann, ist eine circulare kubische Curve, von welcher die Polargleichung und mehrere Eigenschaften angegeben werden. Dieselbe Curve erhält man auch für confocale Kegelschnitte beliebiger Art.

Lp.

D. Andere specielle Curven.

Picquet. Applications de la représentation des courbes du troisième degré à l'aide des fonctions elliptiques. J. de l'Éc. Pol. cah. LIV. 31-100.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer ebenen Curve dritter Ordnung lassen sich, wie bekannt, als doppeltperiodische Functionen eines Arguments u derart darstellen, dass einem Werte von u ein einziger Punkt der Curve, [illegible] deren hingegen unendlich viele Werte von u [illegible] einander durch Vielfache der den Coord[illegible] Perioden $2K$ und $2iK'$ unterscheiden. Die[illegible] als ein sehr geeignetes Mittel für die Unters[illegible] Curven dritter Ordnung zugleich ein- und u[illegible] gone, welche den Gegenstand der vorlieg[illegible] Als Ausgangspunkt dient [illegible] dass die [illegible] Schnittpunkten einer bel[illegible] Ord[illegible]

bischen Curve entsprechenden Werte des Arguments u constant ist, abgesehen von einem Vielfachen der Perioden.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit den geradlinigen Polygonen. Durch einen Punkt der kubischen Curve zieht man die Tangente, welche die Curve noch in einem weiteren Punkte schneidet, durch diesen zieht man wiederum die Tangente und fährt so fort, bis das Polygon sich schliesst. Die Bedingung dafür, dass dies für eine gegebene Seitenzahl n geschieht, lautet:

$$u = \frac{C}{3} + \frac{2mK + 2piK'}{2^n - (-1)^n},$$

wo u den dem Ausgangspunkt entsprechenden Wert des Arguments, C die erwähnte Constante, m und p beliebige ganze Zahlen bezeichnen. Da hiernach die Lösung des Problems auf die Teilung eines Arguments in $2^n - (-1)^n$ gleiche Teile zurückgeführt ist, so ist die Gesamtzahl der Lösungen $(2^n - (-1)^n)^2$. Hierin sind für jedes n die neun Inflexionspunkte inbegriffen, ferner, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, die Eckpunkte der Polygone von a Seiten, falls a ein Teiler von n ist. Setzt man $\varphi(n) = (2^n - (-1)^n)^2 - 3^2$, so erhält man für die Anzahl aller Polygone von genau n Seiten den Ausdruck

$$(1)\quad \frac{1}{n}\left\{\varphi(n) - \Sigma\varphi\left(\frac{n}{a}\right) + \Sigma\varphi\left(\frac{n}{ab}\right) - \cdots \pm \Sigma\varphi\left(\frac{n}{ab\ldots l}\right)\right\},$$

wo $a, b, \ldots, l$ sämtliche Primteiler von n bezeichnen und die Summen sich auf alle Combinationen dieser Primteiler beziehen.

Der zweite Abschnitt handelt von krummlinigen Polygonen. Eine Curve μ^{ter} Ordnung möge die Curve dritter Ordnung in einem Punkte $(3\mu-1)$-punktig berühren, der $3\mu^{te}$ Schnittpunkt ist dann vollkommen bestimmt. Durch diesen legt man wiederum eine Curve μ^{ter} Ordnung, die in ihm mit der kubischen Curve eine $(3\mu-1)$-punktige Berührung hat und dieselbe noch in einem weiteren Punkte schneidet; so erhält man auf diesem Wege fortschreitend krummlinige Polygone, deren Seiten unbestimmt, deren Ecken bestimmt sind. Die Bedingung für die Wahl des Anfangspunktes, damit Polygon μ^{ter} Ordnung von n Ecken, im Folgenden n

zeichnet, sich schliesst, lautet

$$u = \frac{C}{3} + \frac{2mK + 2piK'}{(3\mu-1)^{\nu} - (-1)^{\nu}},$$

(u das Argument des Anfangspunktes).

In der hierdurch sich ergebenden Gesamtzahl $((3\mu-1)^{n} - (-1)^{n})^{2}$ der Ecken der Polygone $[\mu, n]$ sind, entsprechend den Inflexionspunkten bei den geradlinigen Polygonen, die sogenannten Coincidenzpunkte ν^{ter} Ordnung ($\nu = \mu$ oder ein Teiler von μ), d. h. diejenigen Punkte der kubischen Curve, in denen eine Curve ν^{ter} Ordnung eine ν-punktige Berührung hat, eingeschlossen. Die Zahl der eigentlichen Lösungen wird durch eine Formel gegeben, die der für die geradlinigen Polygone gültigen Formel (1) analog ist. Bemerkenswert ist noch der Satz, dass die Eckpunkte der (gerad- oder krummlinigen) Polygone, die einer kubischen Curve zugleich ein- und umgeschrieben sind, stets Coincidenzpunkte sind.

Unter Zugrundelegung der speciellen Clebsch'schen Darstellung der Coordinaten der kubischen Curve

$$x:y:z = \operatorname{sn}^2 u : \operatorname{sn} u : \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$$

werden nun im dritten Abschnitt unter den durch obige Formel, in der nunmehr $C = 0$ zu setzen ist, bestimmten Ecken der Polygone $[\mu, n]$ die reellen von den imaginären unterschieden. Es ergeben sich folgende Sätze: 1) Jedes Polygon $[\mu, n]$, von welchem eine der Ecken auf dem die Inflexionspunkte enthaltenden Zweige einer kubischen Curve sich befindet, hat alle seine Ecken auf demselben Zweige. Besitzt die kubische Curve noch ein Oval, so hat jedes Polygon von gerader Ordnung, welches eine seiner Ecken auf d[illegible] auf demselben alle seine Ecken. Polygone von unge[illegible] auf dem Ovale. 2) Die Anzahl der [illegible] die Inflexionspunkte enthaltenden Z[illegible]

$$\frac{1}{n}\Big[(3\mu-1)^{n} - \Sigma(3\mu - [illegible]$$

Hat di[illegible]

eine [illegible]

Ovale liegen. Für die Polygone mit imaginären Ecken bedient sich der Verfasser der Darstellung des Herrn Klein (Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Math. Ann. VII p. 558, F. d. M. VI. 1874. 307) für die imaginären Elemente einer Curve. Auf der die Darstellung vermittelnden, die Ebene zweifach bedeckenden Fläche werden behufs Bestimmung der Lage der Polygonecken und Coincidenzpunkte zwei Scharen von Curven, Meridian- und Breitencurven, gezogen, längs deren für die ersteren der reelle, für die letzteren der imaginäre Teil des Arguments constant ist. Schliesslich bemerken wir, dass der Arbeit eine ausführliche Zusammenstellung der Literatur über den behandelten Gegenstand vorangeschickt ist. Hr.

G. Pittarelli. Sulle curve del terz' ordine con un punto doppio. Nap. Rend. XXIV 111-121.

Analytische Untersuchung der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte durch die bekannte Parameterdarstellung:

$$x_1:x_2:x_3 = a_\lambda^3:b_\lambda^3:c_\lambda^3.$$

Titel der Paragraphen:

1) Gleichungen der Curve und der Wendetangenten;

2) Digression über Raumcurven dritter Ordnung;

3) Canonische Form;

4) Hesse'sche Curve von f (f ist die betrachtete Curve dritter Ordnung);

5) Cayley'sche Curve von f;

6) Allgemeine Form der Parameterdarstellung. Vi.

J. J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of question 4481. Ed. Times XLIII 53-54.

Es giebt auf einer kubischen Curve im allgemeinen 18 derartige Punkte, dass die Winkel zwischen den vier Tangenten von diesen Punkten nach anderen Punkten der Curve zu i· einander gleich sind.

J. J. Sylvester, W. J. C. Sharp. Solution of question 4118. Ed Times XLIII. 21-22.

Folgende von Herrn Sylvester gestellte Aufgaben werden von Herrn Sharp gelöst: 1) Die Gleichung der beiden circularen kubischen Curven zu finden, welche vier auf einer Kreislinie gegebene Punkte zu Brennpunkten haben. 2) Die Gleichungen zur Bestimmung der Brennpunkte für die beiden Cartesischen Ovale zu finden, welche eine gegebene Axe haben und durch vier gegebene Punkte einer Kreislinie gehen.

Lp.

C. Moser. Zur Theorie der Winkeldreiteilung. Bern. Mitt. III. 50-78.

Man denke sich einen Kreis mit dem Centrum A, beschreibe in denselben das gleichseitige Dreieck $S_1S_2S_3$, nehme auf der einen Seite von S_1 auf der Peripherie einen Punkt D, auf der anderen einen Punkt B so an, dass $\alpha =$ Bogen $S_1D = \frac{1}{2}S_1B$, also $= \frac{1}{3}BD$ ist. Die Tangente in B trifft den Radius AD in einem Punkte C; der Ort für C ist bei variabel angenommenem α eine Curve $\mathfrak{C}_3$ dritter Ordnung, deren Gleichung in Polar-Coordinaten, auf AS_1 als Axe bezogen, $r.\cos 3\varphi = a$ ist, wo a den Radius des gegebenen Kreises bedeutet. Um C als Centrum mit CB als Radius wird ein zweiter Kreis beschrieben und in diesen dasjenige gleichseitige Dreieck, dessen Seiten auf denen von $S_1S_2S_3$ senkrecht sind. Beide Dreiecke geben zu einer grossen Menge von Lagenbeziehungen [illegible] die unter den Titeln betrachtet werden: 1) Drei Gerad[illegible]punkte. 2) Sechs Gerade und sechs con[illegible] Beziehungen zu der Determinante dritten [illegible] mit Kegelschnitten. Hiernach erst we[illegible]nkeldreiteilung, als einer Unk[illegible]en geometrischen Betrachtungen [illegible] der Curv[illegible] b. [illegible] 3) Das [illegible]

Hyperbel, deren Excentricität gleich 2. Bei allen Lösungen wird auf die Dreideutigkeit des Resultates und auf die Eigentümlichkeiten der jeweiligen geometrischen Beziehungen gebührend Rücksicht genommen. Lp

J. B. Pomey. Sur les points d'inflexion des courbes du 3me et 4me degré. Nouv. Ann (3) IV 169-170.

Beweis der beiden Sätze: 1) Die Gerade, welche zwei Wendepunkte einer Curve dritten Grades verbindet, geht noch durch einen dritten Wendepunkt derselben. 2) Geht eine Gerade durch drei Wendepunkte einer Curve vierten Grades, so geht sie noch durch einen vierten Wendepunkt derselben. Mz.

F. Dingeldey. Ueber die Erzeugung von Curven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen. Diss. Leipzig. B. G. Teubner. VIII u. 64 S. nebst VI Taf. 8°.

Die Schrift behandelt in fünf Abschnitten die Erzeugung von Curven vierter Ordnung durch 1) Trochoidenbewegung, 2) Führungscurven, 3) Gelenkmechanismen, 4) den Newton'schen, 5) den Grassmann'schen Bewegungsmechanismus. Auf fleissigen Studien beruhend, liefert sie nähere Erläuterungen und Beweise von manchen Sätzen, die in den Originalarbeiten von den Autoren ohne weitere Begründung ausgesprochen sind. Der erste Abschnitt giebt nur allgemein Bekanntes wieder. Der zweite commentirt im wesentlichen zwei Abhandlungen von Herrn S. Roberts aus den Lond. M. S. Proc. III. (1871) und VII. (1876). Eine bewegliche Ebene wird so geführt, dass A) einer ihrer Punkte die eine Führungscurve, ein zweiter die andere durchläuft; B) einer ihrer Punkte die eine Curve durchläuft, eine ihrer Geraden die andere berührt; C) eine ihrer Geraden die eine Curve, eine zweite die andere berührt. Jedesmal wird die Bewegung so specialisirt, dass die Bahn eines beliebigen Punktes der Ebene eine Curve vierter Ordnung wird. Im dritten Abschnitt werden auf Grund

der Untersuchungen von Peaucellier, Liguine, Mannheim, Sylvester diejenigen Gelenkvierecke mit zugehörigen Verbindungsstäben untersucht, durch welche Kegelschnitte in Curven vierter Ordnung verwandelt werden. Der vierte Abschnitt erläutert die von Newton (Enumeratio linearum tertii ordinis, Sectio VI. 1706) angegebene Erzeugung der rationalen Curven vierter Ordnung. Von den sechs Erzeugungsarten, welche Grassmann in Crelle's J. XLIV. 3 angiebt, wird folgende allein behandelt: „Jede Curve vierter Ordnung lässt sich erzeugen als Ort der gemeinschaftlichen Spitze x dreier stetig an einander liegenden Dreiecke, deren übrige Ecken in festen Geraden liegen, und deren Gegenseiten und äusserste Schenkel durch feste Punkte gehen".

Der Verfasser stellt jedesmal die Gleichung der erzeugten Curve in Cartesischen Coordinaten auf und untersucht genau ihre Gestalten und Singularitäten. Die zahlreichen Abbildungen der gewonnenen Curven auf sechs Tafeln bilden eine dankenswerte Beigabe. Auf Constructionen, welche mit Hülfe von Fäden ausgeführt werden können, ist nicht eingegangen worden.

Lp.

J. J. Walker. On a method in the analysis of plane curves Part. II. Lond. M. S. Proc. XVI. 215-223

In Fortsetzung seiner früher besprochenen Abhandlung (F. d. M. X. 1878. 459) giebt der Verfasser ein neues Beispiel für die Anwendbarkeit seiner Methode. Unter der Voraussetzung, dass eine Curve vierter Ordnung $u = 0$ einen Doppelp[illegible] den homogenen Coordinaten (x, y, z) besitze, bestim[illegible] Gleichung der Verbindungslinie derjenigen beiden [illegible] welchen die Curve $u = 0$ von den beiden Doppelpunkt[illegible] geschnitten wird. Diese Gleichung erweist sich in ihrer [illegible] Form als vom fünften Grade in den Coefficienten von u [illegible] zehnten Grade in x, y, z.

h.

E. Laguerre. Sur les anti-caustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe. Nouv. Ann. (3) IV. 5-16.

Der Aufsatz schliesst sich der Reihe von Arbeiten des Verfassers an, welche von der Theorie der „Halbgeraden, Cyklen, Hypercyklen und der Transformation durch reciproke Halbgeraden" handeln (vgl. F. d. M. XIV. 1882. 541, 722; XV. 1883. 534, 618). Die Aufgaben der Antikaustiken bei der Spiegelung an der Parabel für Lichtstrahlen, welche parallel der Axe einfallen, ist in der zuletzt citirten Note gelöst. In der vorliegenden Arbeit gelangt der Verfasser zu zahlreichen geometrischen Sätzen über die im Titel genannten Curven, indem er die Parabel als einen Hypercyklus betrachtet. Lp.

J. Wolstenholme, A. M. Nash, S. Marks. Solution of question 7572. Ed Times XLII. 47-50.

Bei der Pascal'schen Schnecke mit der Polargleichung $r = a\cos\theta + b$ sei $b > a$, O der Pol, A der nähere und A' der fernere Scheitel, C ein Punkt grösster Krümmung, P und P' zwei Curvenpunkte auf derselben Seite von der Axe wie C, so dass OC das harmonische Mittel zwischen OP und OP' (P fällt mit A zusammen, wenn P' mit A'). Dann gelten folgende Sätze: 1) Die Differenz der Winkel $AOP - A'OP'$ ist gleich dem Winkel der Sehne PP' mit der Axe. 2) Die Differenz der Bogen $AC - A'C$ ist gleich $4a$. 3) Der Ort des Schnittpunktes der Tangenten in P und P' ist eine Cissoide. 4) In Bezug auf den einzigen Brennpunkt O und die Gleichung $r^2 - 2r(a + b\cos\theta) + (b-a)^2 = 0$ ist die Curve ihre eigene inverse, wenn der Radius des Inversionskreises $b-a$ ist. 5) Ist OPP' eine Sehne durch O, so dass P, P' inverse Punkte sind, so ist der Ort des Schnittpunktes der Tangenten in P und P' die Cissoide $y^2(x+b-a) = (2a-b-x)^2$. 6) Bei einer Schar von Schnecken mit gegebenem Brennpunkte O und gegebenem Doppelpunkt S ($SO = b-a = c$) ist der Ort für die Krümmungsmittelpunkte in den Punkten grösster Krümmung

die Cissoide $y^2(3c-x) = (x-c)^3$ und die Hüllcurve der Tangenten in den Wendepunkten eine andere Cissoide $y^2(\frac{1}{3}c-x) = (x-\frac{1}{3}c)^3$.

Lp.

S. Hudler. Die Cassini'sche Curve. Wien. Pichler's Wwe u. Sohn 59 Seiten.

Ch. L. Franklin, T. C. Simmons. Solution of question 6607. Ed. Times XLII. 24-25.

Untersuchung der Curve, deren Gleichung in Cartesischen Coordinaten:

$$(y^2-ax)^2 = y^2(x^2-ay)$$

ist. Lp.

A. Ameseder. Construction der Astroidentangente. Cas. XIV 46. (Böhmisch.)

Hat die Gleichung der Astroide die Form

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

so enthält der Kreis K, dessen Gleichung ist

$$x^2+y^2 = a^2,$$

die vier Rückkehrpunkte der Astroide, während der concentrische Kreis K', dessen Radius $\frac{1}{2}a$ ist, die Astroide in vier Punkten berührt.

Um von einem Punkte p die Tangenten an diese Linie zu construiren, verbinde man ihn mit dem Kreiscentrum s und ziehe durch den Halbirungspunkt dieser Verbindungslinie Parallelen zu den Coordinatenaxen: Diese auf einander senkrecht stehenden Parallelen betrachte man als Asymptoten von durch p und s gehenden Hyperbeln, welche den Kreis K' in vier Punkten q_1, q_2, q_3, q_4 schneiden; dann sind

$$pq_1, pq_2, pq_3, pq_4$$

die verlangten Astroidentangenten. Std.

A. Sucharda. Bemerkung zur Construction der Astroidentangente. Cas. XIV. 138. (Böhmisch.)

Der Verfasser reclamirt das Wesentliche der Ameseder'schen Construction (siehe das vorige Referat), die er schon 1881 in Hoppe Arch. LXVI. 321 veröffentlicht hat, wozu die Redaction bemerkt, dass Ameseder's Manuscript 2 Jahre bei ihr gelegen habe.

Std.

R. A. Roberts. On certain curves of the sixth order. Mess. XV 26-32.

Die Differentialgleichung dieser Curven ist:

$$\frac{dx_1}{(X_1)^{\frac{2}{3}}} + \frac{dx_2}{(X_2)^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

wo $X = (x-a)(x-b)(x-c)$, $x_1 = x+iy$, $x_2 = x-iy$ gesetzt ist, x und y rechtwinklige Cartesische Coordinaten bedeuten. Die Curven sind von der sechsten Ordnung, und drei Curven des Systems gehen durch einen Punkt und schneiden sich dort unter Winkeln von 60^0. Der Verfasser liefert eine vollständige Behandlung der Curven und ihrer orthogonalen Trajectorien.

Glr. (Lp.)

Fr. Machovec. Ueber eine besondere Art von Curven. Cas. XIV. 15. (Böhmisch.)

Der Verfasser entwickelt mit Hülfe der Aequipollenzen einfache Constructionen der Normalen für Curven von folgendem Entstehungsgesetze:

1. Es seien A und B zwei Curven, o ein Punkt der Ebene und a resp. b die Durchschnittspunkte eines beliebigen Strahles des Büschels o mit jenen Curven. Trägt man von jedem Punkt b aus unter einem bestimmten Winkel α zu ob die Länge $bc = oa$ auf, so liegen die Punkte c auf einer Curve C, von welcher die Konchoide einen speciellen Fall bildet.

2. Es seien A', A und B drei Curven, o ein Punkt der

Ebene, und a' resp. a und b die Durchschnittspunkte eines beliebigen Strahles des Büschels o mit jenen Curven. Trägt man von jedem Punkte b aus unter einem bestimmten Winkel α zu ob die Länge $bc = a'a$ auf, so liegen die Punkte c auf einer Curve C, welche allgemeiner ist als die früher angeführte.

Bezeichnet man die Radienvectoren der Curven A, A' und B mit ϱ_a resp. ϱ'_a und ϱ_b, so ist in der Schreibweise der Aequipollenzen:

$$\text{im ersten Falle} \quad \varrho_c = \varrho_b + e^{i\alpha}\varrho_a,$$
$$\text{im zweiten Falle} \quad \varrho_c = \varrho_b + e^{i\alpha}(\varrho'_a - \varrho_a).$$

Einen Punkt für die Normale der Curve C im Punkt c erhält man, wenn man von dem Endpunkte der polaren Subnormale der Curve B im Punkte b aus unter dem Winkel α zu dieser Subnormale im ersten Falle die polare Subnormale der Curve A im Punkte a und im zweiten Falle die Differenz der polaren Subnormalen der Curven A' und A in den Punkten a' und a aufträgt.

Zu diesen Curven gehören auch die bekannten Curven von folgendem Entstehungsgesetze:

Es seien A und B zwei Curven, o ein Punkt der Ebene und a, b die Durchschnittspunkte eines beliebigen Strahles des Büschels o mit jenen Curven. Teilt man die Strecke ab nach einem bestimmten Verhältnis ν, so erhält man als Ort der Teilungspunkte eine mit den unter 1 angeführten in enger Beziehung stehende Curve. Ihr Radiusvector wird nämlich durch die Gleichung

$$\varrho_c = \frac{1}{1-\nu}\varrho_a + \frac{\nu}{\nu-1}\varrho_b$$

ausgedrückt. Die Construction ihrer Normalen folgt also aus der früher angeführten Regel. Std.

J. Richard. Solution de question 1518. Nouv. Ann. (3) IV. 526.

Es ist eine ebene Curve zu finden derart, dass die Projection des Krümmungshalbmessers in einem Punkte M auf eine

feste Gerade dem Teil der Tangente proportional ist, welcher zwischen M und der festen Geraden enthalten ist. Die Gleichung der Curve wird aufgestellt und der Hinweis hinzugefügt, dass man zu derselben Curve bei der Behandlung der folgenden Frage gelangt: Ein Punkt durchläuft in gleichförmiger Bewegung eine Gerade; ein zweiter Punkt bewegt sich in jedem Momente auf den ersten beweglichen Punkt zu mit constanter Geschwindigkeit; welche Bahn beschreibt der zweite bewegliche Punkt? (Lehmus in Crelle J. I. 61). Schn.

J. NEUBERG. Question 257. Mathesis V. 89-92.

Theorie der Kochleoide $\rho\omega = a \sin\omega$, der inversen Curve der Quadratrix, die Herr Catalan im Jahre 1857 ersonnen hat, und mit der die Herren Bentheim und Falkenburg sich auch beschäftigt haben. (F. d. M. XV. 1883. 618). Mn. (Lp.)

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

L. GEISENHEIMER. Näherungsformeln für Inhalt und Oberfläche niedriger Flächenabschnitte. Schlömilch Z. XXX. 25-35.

Um einen Punkt einer krummen Fläche, Anfangspunkt der xyz, herum wird ein beliebig begrenztes Flächenstück von unendlich kleiner Ausdehnung betrachtet, zwei conjugirte Tangenten sind Axen der x, y, die z beliebig gerichtet. Das Flächenstück wird auf die Berührungsebene in der z-Richtung projicirt. Dann ergiebt sich als Inhalt des Körpers zwischen der Fläche, ihrer Projection und den Grenzstrahlen der Ausdruck

$$I = \tfrac{1}{4}K(T_{xx}\varrho_x + T_{yy}\varrho_y).$$

wo K die Krümmung der Fläche, ϱ_x, ϱ_y die Krümmungsradien der Normalschnitte in den x- und y-Richtungen, T_{xx} und T_{yy} die Trägheitsmomente der Projection bedeuten. Ausser diesem Körper wird das sog. Zweieck, welches durch die Fläche und zwei sich in einer Sehne schneidende Ebenen begrenzt wird, berechnet. Es ist annähernd $\frac{4}{15}$ des umschriebenen Prismas, genau für parabolische Querschnitte. Die Oberfläche O des erstern Körpers wird, wenn F ihre normale Projection bezeichnet, ausgedrückt durch

$$O = F + \frac{1}{2\sin^2(xy)}\left\{\frac{T_{xx}}{\varrho_x^2} - 2\cos xy\,\frac{T_{xy}}{\varrho_x\varrho_y} + \frac{T_{yy}}{\varrho_y^2}\right\},$$

die Oberfläche des Zweiecks durch

$$O = F\left(1 + \frac{1}{40\sin^2(xy)}\,\frac{g^2}{\varrho_y^2}\right),$$

wo g die Sehne bedeutet. Es folgen dann die Berechnungen eines flachen Kreuzgewölbes und Klostergewölbes. H.

R. v. Lilienthal. Allgemeine Eigenschaften von Flächen, deren Coordinaten sich durch die reellen Teile dreier analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen darstellen lassen. Kronecker J. XCVIII. 131-147.

Sind U, V, W drei analytische Functionen der complexen Variabeln $u = (p+qi)$, welche durch Uebergang zum conjugirten Argument $v = (p-qi)$ die conjugirten Werte U_1, V_1, W_1 annehmen, so sind

$$x = \tfrac{1}{2}(U+U_1),\quad y = \tfrac{1}{2}(V+V_1),\quad z = \tfrac{1}{2}(W+W_1)$$

die Coordinaten eines mit den reellen Parametern p und q variirenden reellen Flächen-Punktes, und

$$\frac{1}{2i}(U-U_1),\quad \frac{1}{2i}(V-V_1),\quad \frac{1}{2i}(W-W_1)$$

die Coordinaten eines mit denselben Parametern variirenden Punktes einer zweiten Fläche. Diese soll als mit der ersten verwandt bezeichnet werden. Es ist aber möglich, dass ein und

dieselbe Fläche sich in verschiedener Form auf die angegebene Art darstellen lässt, dass sie also auch mehrere verwandte Flächen besitzt. Die Untersuchung erstreckt sich nun auf folgende Punkte. Es wird zuerst die Bedeutung der p und q für eine Fläche festgestellt, dann werden die Beziehungen zwischen verwandten Flächen betrachtet. Endlich werden die Bedingungen aufgestellt, unter denen sich eine Fläche in der betrachteten Weise darstellen lässt.

Zum Behuf der bequemen Durchführung der Betrachtung werden ausser den bekannten Gauss'schen Fundamentalgrössen, bezogen auf die Parameter p und q, welche bezeichnet werden mit

$$A, B, C, \quad D, D', D'', \quad E, F, G,$$

die analogen Ausdrücke für die Parameter u und v eingeführt, für welche die Zeichen

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}, \mathfrak{D}'', \quad \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$$

gebraucht werden. Es ist also

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{C} \text{ analog},$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \mathfrak{B} \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \mathfrak{C} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \quad \text{etc.},$$

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad \text{etc.}$$

Nur die Grösse

$$\mathfrak{A} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \mathfrak{B} \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \mathfrak{C} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

welche der Analogie nach mit $\mathfrak{D}'$ bezeichnet werden müsste, wird nicht betrachtet. Alsdann ergeben sich die Relationen

$$A = -2i\mathfrak{A} \quad \text{etc.},$$
$$D = -2i(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}''), \quad D' = 2(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}''), \quad D'' = 2i(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}''),$$
$$E = \mathfrak{E} + 2\mathfrak{F} + \mathfrak{G}, \quad F = i(\mathfrak{E} - \mathfrak{G}), \quad G = -(\mathfrak{E} - 2\mathfrak{F} + \mathfrak{G}),$$
$$EG - F^2 = 4(\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G}).$$

Aus diesen Relationen lassen sich einige einfache Folgerungen ziehen, z. B.

Sind p und q orthogonale Parameter, so ist $\mathfrak{E}$ reell.

Sind die Parameter zugleich isometrisch (also Abbildungsparameter) ($E = G$), so ist $\mathfrak{E} = 0$.

Sind p und q Krümmungsparameter, so ist $\mathfrak{E}$ reell, $\mathfrak{D}$ rein imaginär.

Sind p und q asymptotische Parameter, so ist $\mathfrak{D}$ reell. Die Krümmung eines Normalschnittes wird gegeben durch die Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}}\,\frac{\mathfrak{D}\,du^2+\mathfrak{D}''\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2+2\mathfrak{F}\,du\,dv+\mathfrak{G}\,dv^2}.$$

Bedeuten ferner ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien, so wird

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{i(\mathfrak{E}\mathfrak{D}''+\mathfrak{G}\mathfrak{D})}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \varkappa = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''}{(\mathfrak{F}^2-\mathfrak{E}\mathfrak{G})^2}.$$

Das Krümmungsmass $\varkappa$ ist bei diesen Flächen stets negativ. Demselben lassen sich noch die bekannten Formen geben, in welchen nur die Fundamentalgrössen erster Ordnung vorkommen. Besonders einfach wird, wenn $\mathfrak{E} = 0$ ist, die Fläche also zu den Minimalflächen gehört,

$$\varkappa = -\frac{1}{\mathfrak{F}}\,\frac{\partial^2 \ln \mathfrak{F}}{\partial u\,\partial v}.$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien ist

$$\mathfrak{F}\mathfrak{D}\,du^2+(\mathfrak{G}\mathfrak{D}-\mathfrak{E}\mathfrak{D}'')\,du\,dv-\mathfrak{F}\mathfrak{D}''\,dv^2 = 0,$$

die der asymptotischen Linien

$$\mathfrak{D}\,du^2+\mathfrak{D}''\,dv^2 = 0.$$

Bei dem Uebergange zu den verwandten Flächen zeigt sich, dass, wenn man für sie die entsprechenden Grössen durch den Index 1 unterscheidet,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1,\quad \frac{1}{i}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1,$$

$$-\frac{1}{i}\mathfrak{D}'' = \mathfrak{D}''_1,\quad \mathfrak{E} = -\mathfrak{E}_1,\quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1,\quad \mathfrak{G} = -\mathfrak{G}_1$$

ist.

Man kann also leicht für die verwandten Flächen die analogen Folgerungen aufstellen wie für die ursprünglichen und u. a. folgende Schlüsse ziehen. Sind p und q auf der Urfläche orthogonale Parameter, so sind sie es auch auf der verwandten.

Sind sie auf der Urfläche Krümmungsparameter, so sind sie auf der verwandten asymptotische und orthogonale Parameter. Die verwandten Flächen sind also alsdann Minimalflächen.

Das Krümmungsmass ist auf verwandten Flächen gleich.

Die Normalen in entsprechenden Punkten sind parallel, die Tangenten der Parametercurven sind alternirend parallel, so dass die Tangente an $p =$ const. in der einen Fläche der Tangente von $q =$ const. der andern parallel ist, die entsprechenden Winkel aber Supplemente sind. Entsprechende Flächenstücke sind gleich (die Abbildung ist also äquivalent) und sie haben gleiche Total-Krümmung (Curvatura integra). Zum Schlusse des zweiten Teiles wird die Aufgabe besprochen, die Form der erzeugenden Functionen so zu bestimmen, dass die Fläche eine gegebene Linie enthalte, wofür eine sehr einfache Lösung gegeben wird.

Soll nämlich auf der Fläche die Curve

$$x = f(u), \quad y = f_1(u), \quad z = f_2(u)$$

liegen, so setze man

$$U = f(u) + i\varphi(u), \quad V = f_1(u) + i\varphi_1(u), \quad W = f_2(u) + i\varphi_2(u).$$

Im dritten Teil handelt es sich um die Frage, unter welchen Bedingungen eine Fläche sich in der angegebenen Weise darstellen lässt. Diese Frage kommt darauf hinaus:

Sind x, y, z als Functionen der Parameter p_1 und q_1 gegeben, so müssen diese so als Functionen von p und q bestimmt werden, dass

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = 0 \quad \text{etc.}$$

Diese drei Gleichungen sind gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$D + D'' = 0, \qquad G - E + 2iF \text{ ist Function von } p + qi.$$

Die Ausführung der nötigen Transformationen führt dann auf die etwas verwickelte Bedingung, von welcher noch einige Anwendungen gemacht werden. A.

J. N. Hazzidakis. Flächenerzeugung durch Krümmungslinien. Kronecker J. XCVIII. 49-67.

Die Abhandlung behandelt die Aufgabe: Unter welchen Bedingungen ist eine bewegte Curve von unveränderlicher Gestalt stets Krümmungslinie der von ihr erzeugten Fläche?

Es ergiebt sich folgendes Resultat:

I. Soll die Curve eine (nicht sphärische) Raumcurve sein, so muss die erzeugte Fläche eine beliebige Schraubenfläche sein, also eine Fläche, die bestimmt ist durch die Gleichungen

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = kv + f(u).$$

Umgekehrt erfüllt jede Krümmungslinie einer Schraubenfläche diese Bedingung. (Jede sphärische Curve dagegen ist Krümmungslinie der Kugel, auf welcher sie liegt, und bleibt es bei einer beliebigen Bewegung auf der Kugel.)

II. Soll die erzeugende Curve eine ebene Curve sein, so ergeben sich verschiedene Lösungen, nämlich:

1. Die ebene Curve

$$x = \frac{b\cos^2\varphi}{1-B\cos\varphi} + b\sin\varphi\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-B\cos\varphi)^2},$$

$$y = \frac{b\sin\varphi\cos\varphi}{1-B\cos\varphi} + b(B-\cos\varphi)\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1-B\cos\varphi)^2}$$

bleibt Krümmungslinie der von ihr erzeugten Fläche, wenn sich ihre Ebene so bewegt, dass die x-Axe Hauptnormale, die y-Axe Tangente einer Leitcurve mit constanter erster Krümmung (aber beliebiger Torsion) bleibt. Die erzeugte Fläche hat die Gleichungen

$$X = b\int\frac{\alpha}{\varrho}\,ds + \varrho\alpha' x + \alpha y,$$

$$Y = b\int\frac{\beta}{\varrho}\,ds + \varrho\beta' x + \beta y,$$

$$Z = b\int\frac{\gamma}{\varrho}\,ds + \varrho\gamma' x + \gamma y.$$

Hierin bedeuten α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente der Leitcurve, ds das Bogen-Element derselben, die Accente die Ableitungen nach s.

2) Die ebene Curve

$$x = \frac{1}{B}(a\sin\varphi - b\cos\varphi),$$

$$y = -\frac{1}{B}\left(a\cos\varphi + b\sin\varphi - b\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}\right)$$

bleibt Krümmungslinie der erzeugten Fläche, wenn sie sich so bewegt, dass die durch die y-Axe hindurchgehende und auf der Ebene der Curve lotrechte Ebene stets eine beliebige Cylinderfläche berührt, so dass die Berührungslinie und y-Axe parallel bleiben. Die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ um die Berührungslinie und die Gleitungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ stehen in der Beziehung $\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{b}{a}R$, wo R den Abstand der Berührungslinie von der y-Axe bedeutet.

3) Jede ebene Curve bleibt Krümmungslinie der von ihr erzeugten Fläche, wenn ihre Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt. [Die erzeugte Fläche ist dann eine sogenannte Kanalfläche.]

4) Der Kreis bleibt auch dann Krümmungslinie der von ihm erzeugten Fläche, wenn eine durch einen seiner Durchmesser zur Kreisebene senkrecht gelegte Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt.

Die Erweiterung dieser Resultate hat folgenden Ausgangspunkt.

Jede unendlich kleine Bewegung eines starren Systems kann angesehen werden als Schraubenbewegung um eine Axe.

Seien

$$\frac{x-P}{p} = \frac{y-Q}{q} = \frac{z-R}{r}$$

die Gleichungen dieser Axe, dann sind die Componenten der Verrückung eines beliebigen Punktes dargestellt durch

$$\begin{vmatrix} y-Q, & q \\ z-R, & r \end{vmatrix} d\omega + p\,d\eta$$

und die Analogen, wo $d\omega$ die unendlich kleine Drehung, $d\varphi$ die unendlich kleine Verschiebung bedeutet. Soll nun eine Curve Krümmungslinie der erzeugten Fläche sein, so muss die Verschiebung jedes ihrer Punkte senkrecht stehen zu der Normale der Fläche. Alle Normalen längs einer Krümmungslinie aber liegen auf einer abwickelbaren Evolutenfläche der Curve. Hierdurch lässt sich die Bedingung aufstellen. Doch lassen sich die weiteren Entwickelungen nicht ohne ausgedehnte Rechnungen wiedergeben. A.

A. Brill. Bemerkungen über pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen. Klein Ann. XXVI. 300-303.

Herr Suworoff hat (Darb. Bull. (1) IV. 180. 1873) für einen Raum von drei Dimensionen den Differentialausdruck für das Linienelement untersucht und gefunden, dass bei Transformation der Variabeln gewisse aus den Coefficienten des Linienelementes gebildete Ausdrücke invariante Eigenschaften haben, entsprechend dem Krümmungsmass in einem Raume von zwei Dimensionen. Der dritte dieser invarianten Ausdrücke ist nun, wie Herr Brill zeigt, wesentlich positiv, wenn die Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch eine Gleichung $f(x, y, z, t) = 0$ ausgeschieden wird. Der Verfasser schliesst hieraus, dass es hiernach unmöglich ist, solche Räume, für welche vermöge der eigentümlichen Beschaffenheit ihres Linienelementes die fragliche Invariante eine wesentlich negative Grösse wird, aus einem ebenen Raume von vier Dimensionen durch eine Gleichung zwischen vier Variabeln auszusondern. Insbesondere können demnach Räume von constantem negativem Krümmungsmass nicht in einem ebenen Raume von vier Dimensionen enthalten sein; dagegen steht nichts im Wege, einen pseudosphärischen Raum durch zwei Gleichungen aus einer ebenen Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen auszuscheiden. Letzteres wird am Schlusse ausgeführt.

V.

E. Selander. Ytors bugtighet. Helsingfors. Inauguraldissertation. IV u. 68 S. 4°.

Zusammenstellung der wichtigsten Sätze über die Krümmungsverhältnisse der Flächen. E.

L. Geisenheimer. Beziehungen zwischen den Krümmungen reciproker räumlicher Gebilde. Schlömilch Z. XXX. 129-168.

Die Arbeit schliesst sich an eine frühere Veröffentlichung des Herrn Verfassers, Beziehung zwischen den Krümmungsradien collinearer ebener Curven (Schlömilch Z. XXV. 214-215, Ref. F. d. M. XII. 1880. 643) an, und dehnt die Untersuchungen auf den Raum aus. Es handelt sich um polar reciproke Gebilde in involutorischer Lage. Als Specialfälle ergeben sich Beziehungen zwischen den Krümmungen einer Curve auf einer Fläche zweiter Ordnung und ihrer Abwickelungsfläche, ferner Eigenschaften der Krümmungslinien und der Centrafläche einer Fläche zweiter Ordnung, insbesondere eine Construction für das Centrum der zu einer Krümmungslinie gehörigen Schmiegungskugel.

A.

E. Catalan. Sur les ombilics des surfaces. Mathesis V. 73-74.

Abänderung der Poisson'schen Methode zur Aufstellung der Gleichungen $r:(1+p^2) = s:pq = t:(1+q^2)$.

Mn. (Lp.)

G. Pirondini. Rettifica di un teorema e dimostrazione di alcuni teoremi geometrici. Batt. G. XXIII. 222-230.

Diese Note enthält mehrere nicht direct mit einander zusammenhängende Mitteilungen, durch deren erste zugleich eine im § 9 einer früheren Arbeit des Herrn Verfassers (Sulle linee di curvatura e sulle superficie che ammettono una evoluta commune

Batt. G. XXII., F. d. M. XVI. 1884. 672] ausgesprochene Behauptung berichtigt wird. Die erste Mitteilung betrachtet die sogenannten Helices, d. h. kürzeste Linien auf Cylinderflächen. Es handelt sich um die Aufsuchung aller derjenigen Helices E, deren Hauptnormalen sämtlich eine feste Gerade R durchschneiden. Durch sehr einfache geometrische Betrachtungen ergiebt sich als notwendige und hinreichende Bedingung die, dass der senkrechte Schnitt der zugehörigen Cylinderfläche die Eigenschaft besitzen muss, dass ihre Normalen auf einer Geraden der Ebene Stücke begrenzen, welche dem zwischen den Fusspunkten der Normalen liegenden Bogen proportional sind.

Ist ein solcher Cylinder bestimmt und auf demselben eine beliebige Helix E gezeichnet, so hat es keine Schwierigkeit, die Gerade R zu construiren.

Die oben erwähnte charakteristische Eigenschaft kann nun zur analytischen Bestimmung des senkrechten Querschnittes e dienen, und zwar vermittelst einfacher Quadraturen. Indessen wählt der Herr Verfasser zu dieser Bestimmung einen sehr umständlichen Weg, der hier nicht weiter auseinandergesetzt werden möge, weil sich die Sache wesentlich einfacher behandeln lässt.

Lässt man nun die Helix E um die Gerade R rotiren, so ist E in jeder ihrer Lagen Kürzeste der entstandenen Rotationsfläche S.

Das System der Tangenten dieser wie jeder Schar Kürzester einer Fläche bildet aber nach einem bekannten Satze ein Normalensystem (vergl. Bianchi Batt. G. XVII. 9-48, F. d. M. XI. 1879. 546 und die Arbeiten von Hoppe und August, Hoppe Arch. LXVIII. 256-273 und 315-352, Ref. F. d. M. XIV. 1882, 653 und 656) einer Flächenschar, welche dann zur einen Mitt[illegible]ktsfläche S hat, und bei der das zugehörige System der K[illegible] linien in diesem Falle, wie leicht erkannt wird, eben [illegible]

Es giebt also, entgegen einer früheren Behauptung [illegible] Verfassers, Flächen mit einem System von ebenen K[illegible] linien, für welche die zu diesem System gehörige Mitt[illegible] fläche (Evolutenfläche) eine Rotationsfläche ist.

Diese Flächen F sind übrigens di[illegible] Rotationsfl[illegible]

welche in Bezug auf parallel auffallende Lichtstrahlen, die aber im allgemeinen schief zur Axe sind, zur Schattengrenze kürzeste Linien haben.

Die zweite Mitteilung giebt die Entwickelung des folgenden Satzes:

Die Strictionslinie L der geradlinigen Fläche der Hauptnormalen einer Helix E, welche letztere auf einem Cylinder liegt, dessen senkrechter Querschnitt eine Evolvente Σ eines Kreises S mit dem Radius k ist, und welche die Erzeugenden des Cylinders unter dem Winkel $\omega = \operatorname{arctg} m$ schneidet, entsteht aus einer Parabel mit dem Parameter $2mk$, indem ihre Ebene auf einen Kreiscylinder gewickelt wird, dessen senkrechter Schnitt S ist; der Scheitel der Parabel liegt in dem Punkte, in welchem die Helix E die Rückkehrkante ihres Cylinders schneidet, und diese selbst ist die Axe der Parabel.

Die dritte Mitteilung ist folgende: Die sphärischen Curven, welche, wenn sie schraubenförmig um einen festen Durchmesser der Kugel bewegt werden, Kürzeste des erzeugten Helikoids und ausserdem orthogonale Trajectorien ihrer Schraubenlinien sind, sind die Loxodromien, welche derselben Axe entsprechen, und es existirt die Relation $m = R \operatorname{tg} \vartheta$, wo R den Kugelradius bedeutet, m den Parameter der Schraubenbewegung, ϑ den Curswinkel der Loxodromien.

Die vierte Mitteilung endlich betrifft folgenden Satz. Die sphärischen Curven, welche Kürzeste der abwickelbaren Flächen sind, deren Erzeugende den Seiten eines geraden Kegels parallel sind, sind identisch mit den sphärischen Evolventen der sphärischen Helices. A.

L. Bianchi. Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono un sistema di elicoidi aventi a comune l'asse ed il passo. Brioschi Ann. (2) XIII. 39-52.

Nachdem Herr Bianchi in einigen vorhergehenden Arbeiten (Batt. G. XXI., XXII.) die cyklischen Orthogonalsysteme unter-

sucht hat, wendet er sich in der vorliegenden Note zu denjenigen orthogonalen Systemen, denen je ein Helikoidensystem angehört.

Die zwei folgenden Bemerkungen liegen der ganzen Untersuchung zu Grunde:

a) Ist S eine Fläche eines Systems, das einem orthogonalen Tripel angehören kann, und ist

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

das Quadrat des auf die Krümmungslinien bezogenen Linienelementes von S, so genügt der unendlich kleine Abstand ϱ zwischen S und der darauf folgenden Fläche des Systems der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v};$$

und umgekehrt, wenn ϱ dieser Gleichung genügt, so gehört das System, von welchem S ein Element ist, einem orthogonalen Tripel an.

b) Ist das Quadrat des Linienelementes einer Drehungsfläche

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2 = Edu^2 + Gdv^2,$$

wo α den Meridianbogen, r den Radius des Parallelkreises, β die Länge im geographischen Sinne, u, v irgendwelche krummlinigen Coordinaten bezeichnen, so genügt die Function $\psi = \int r d\alpha$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

Da (1) und (2) identisch sind, so sieht man ein, da
eine auf einer Drehungsfläche abwickelbare Fläche .
Lösung der Differentialgleichung (1) unmittelbar liefer

Ist S insbesondere ein Helikoid, also (wegen des
Satzes) auf einer Drehungsfläche abwickelbar, deren Para
von den Schraubenlinien von S gede ist
jeder Schraubenlinie constant; worau

so erhält man:

(2) für $K = -1$: $H_1 = \cos\theta,\quad H_2 = \sin\theta,\quad H_3 = \frac{\partial\theta}{\partial w}$

(3) für $K = +1$: $H_1 = \mathrm{ch}\,\theta,\quad H_2 = \mathrm{sh}\,\theta,\quad H_3 = \frac{\partial\theta}{\partial w}$

θ ist eine Function von u, v, w, welche drei partiellen Differentialgleichungen genügt, nämlich:

Für $K = -1$ den Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \sin\theta\cos\theta, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) = \cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w} - \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}, \end{cases}$$

für $K = +1$ den Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right) + \mathrm{ch}\,\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial w} + \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^3\theta}{\partial u\,\partial v\,\partial w} + \dfrac{\mathrm{sh}\,\theta}{\mathrm{ch}\,\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} + \dfrac{\mathrm{ch}\,\theta}{\mathrm{sh}\,\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt, genügt θ den Gleichungen (4) bezw. (5), so existirt immer ein einziges Weingarten'sches Tripel, für welches das Linienelement die Form (1) annimmt mit den Werten (2) bezw. (3).

Ist

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$$

das Quadrat des Linienelements einer Fläche S von constanter Krümmung, bezogen auf ein System von geodätischen Parallelkreisen $\alpha =$ const. und auf die geodätischen Orthogonallinien $\beta =$ const., so lautet der Weingarten'sche Satz:

Schneidet man auf jeder Normale zu S eine Strecke von der Länge $\varepsilon\dfrac{dr}{d\alpha}$ aus, wo ε eine unendlich kleine Constante ist, so ist der Ort der Endpunkte der ausgeschnittenen Strecken eine neue Fläche S' mit derselben constanten Krümmung wie S. Indem

man so fortfährt, erhält man ein System von Flächen mit derselben constanten Krümmung, das einem Weingarten'schen Tripel angehören kann.

Von diesem wichtigen Satze werden zwei Beweise gegeben; der zweite beruht auf dem Ribaucour'schen Satze. Dieser Satz lautet, wie folgt:

Ist (u, v, w) ein orthogonales Tripel, und zieht man in jedem Punkte einer der Flächen $w =$ const. den Schmiegungskreis zur Durchschnittslinie der zwei übrigen, durch denselben Punkt gehenden Flächen, so existirt zu dem dadurch erzeugten Systeme von ∞^2 Kreisen ein orthogonales System von ∞^1 Flächen.

Indem man nach den charakteristischen Eigenschaften der Weingarten'schen Tripel sucht, gelangt man zu den beiden folgenden Sätzen:

A. Nimmt man willkürlich eine Anfangsfläche Σ_0 von constanter Krümmung und eine von einem Punkte P von Σ_0 normal ausgehende Curve C_0, so giebt es immer ein einziges Weingarten'sches Tripel von der Beschaffenheit, dass Σ_0 dem Tripel angehört und C_0 die Flächen des Systems Σ rechtwinklig schneidet.

B. Zwei willkürliche, sich rechtwinklig schneidende Curven C_0, Γ_0 bestimmen ein einziges Weingarten'sches Tripel von der Beschaffenheit, dass Γ_0 unter den Krümmungslinien des Flächensystems von constanter Krümmung, C_0 unter den orthogonalen Trajectorien desselben Systems enthalten ist.

Sind C die orthogonalen Trajectorien des Flächensystems von constanter Krümmung eines Weingarten'schen Tripels, und bezeichnet man als „Flexion eines Weingarten'schen Tripels in einem Punkte P" die Flexion der durch P gehenden C-Curve in P, so sind diejenigen Weingarten'schen Tripel bemerkenswer[t], welche constante Flexion haben. Für solche Tripel werde[n] manche Sätze aufgestellt, auf welche wir nicht eingehen könne[n].

Darauf werden zwei besondere Weingarten'sche Tripel unte[r]sucht, nämlich das helikoidale Tripel (über diese Tripel findet sich eine frühere Note des Verfassers in Brioschi Ann. (2) XIII. 39-52 (siehe das vorhergehende Referat S. 729), und das Tripel, welches ein System von Enneper'schen Flächen enthält [illegible] neper

schen Flächen (Flächen mit ebenen Krümmungslinien) siehe ausser den in Bianchi's Abhandlung angeführten Arbeiten, einen Aufsatz von Pirondini in Batt. G. XXII. 118-129. Referat darüber in F. d. M. XVI. 1884. 671-672.

Auf die Betrachtung der allgemeinen Weingarten'schen Tripel zurückkommend, erinnert der Verfasser an eine von ihm in seiner Habilitationsschrift (und nachher in Klein Ann. XVI.) eingeführte geometrische Operation, die er als „complementare Transformation" bezeichnet hat. Durch Anwendung dieser Operation auf eine pseudosphärische Fläche erhält man eine neue Fläche von derselben Beschaffenheit und mit derselben Krümmung. Uebt man die complementare Transformation auf ein zu einem Weingarten'schen Tripel gehörendes System von pseudosphärischen Flächen nach und nach aus, so erhält man ohne jede Integration unendlich viele Weingarten'sche Systeme von derselben Beschaffenheit.

Die zwei oben betrachteten besonderen Weingarten'schen Tripel gehen durch die complementare Transformation in Tripel von derselben Beschaffenheit über; dasselbe findet für die Tripel von constanter Flexion statt.

Als eine Verallgemeinerung der complementaren Transformation mag die „Bäcklund'sche Transformation" angesehen werden, welche wie die vorige, eine pseudosphärische Fläche in eine andere mit gleicher Krümmung überführt. Durch die Bäcklund'sche Transformation geht ein, ein System von pseudosphärischen Flächen enthaltendes Weingarten'sches Tripel in ein neues Weingarten'sches Tripel, insbesondere ein Tripel von constanter Flexion in ein anderes von derselben Beschaffenheit über.

Endlich wendet der Verfasser seine Aufmerksamkeit auf diejenigen Flächensysteme, von denen je zwei zusammen mit je einem Flächensystem von constanter Krümmung Weingarten'sche Tripel bilden, er beschränkt sich aber bei dieser Untersuchung auf die Weingarten'schen Tripel mit constanter Flexion. Die Flächen der zwei Systeme, welche zusammen mit einem Systeme von pseudosphärischen Flächen ein solches Tripel bilden, werden „hypercyklische Flächen" genannt. Unter den in der vorliegenden

Abhandlung bezüglich der hypercyklischen Flächen aufgestellten Sätzen möge der folgende hervorgehoben werden:

Jede hypercyklische Fläche bestimmt ein einziges Weingarten'sches Tripel mit constanter Flexion, welchem sie angehört.

Ein kurzer Anhang ist der gleichzeitigen Anwendung der complementaren und der Bäcklund'schen Transformation gewidmet.

Wie der Verfasser selbst bemerkt, sind die Beweise in §§ 3, 5 nicht ganz streng, da die Existenz einer Grenze für eine geometrische infinitesimale Operation von vornherein angenommen wird. Vi.

H. Molins. De la détermination des surfaces de révolution, dont les trajectoires des méridiennes sous un angle constant ont pour perspective des spirales logarithmiques. Toul. Mém. (8) VII$_2$. 293-322.

Bekanntlich nennt man auf der Kugel und dem Rotationsellipsoide die Curven, welche die Meridiane unter constantem Winkel schneiden, Loxodromien oder loxodromische Linien. Dieser Name wird hier auf die analogen Curven auf beliebigen Rotationsflächen übertragen. Projicirt man von einem der beiden Pole aus die Kugel perspectivisch auf eine zur Axe lotrechte Ebene, so erhält man die sogenannte stereographische Projection, und dies ist eine conforme Abbildung, d. h. eine solche, bei welcher sich die Winkel erhalten. Es ist bekannt und leich
einzusehen, dass hierbei die Loxodromien der Kugel sich
logarithmische Spiralen projiciren, welche die Vectoren u
demselben constanten Winkel, wie die Loxodromien die
ridiane, schneiden. Der Herr Verfasser beschäftigt sich
mit dem Problem, allgemeiner diejenigen Rotationsflächen a
zusuchen, für welche die Loxodromien, welche die Meridia
unter einem constanten Winkel ω schneiden, sich perspectivis
von einem Punkte der Axe aus auf eine zur
in hyperbolische Spiralen projiciren, deren

unter einem anderen constanten Winkel ω' schneiden. Er findet eine Differentialgleichung, deren Integration sich ausführen lässt, und welche nur den Parameter $h = \frac{\operatorname{ctg}\omega}{\operatorname{ctg}\omega'}$ enthält. Aus diesem letzteren Umstande folgt aber sofort, dass jede Loxodrome der gefundenen Flächen sich von demselben Pol aus auf dieselbe Ebene in eine logarithmische Spirale projicirt, und zwar so, dass $\operatorname{ctg}\omega' = \frac{\cot\omega}{h}$ ist. Die Form, in welcher der Herr Verfasser das Problem behandelt, giebt ihm Veranlassung zur Besprechung und Anwendung einer geschickten Methode zur Berechnung des bekannten Integrals

$$\int \frac{-hu_1 + \sqrt{h^2u_1^2 + c^2(h^2-1)}}{u_1^2 + c^2}\, du_1,$$

welche durch die Substitution $hu_1 + \sqrt{h^2u_1^2 + c^2(h^2-1)} = z$ vermittelt wird.

Was das Resultat betrifft, so sei bemerkt, dass die rechtwinkligen Coordinaten der Meridiancurve sich algebraisch durch einen Parameter z ausdrücken lassen, doch so, dass der Parameter h auch im Exponenten von z vorkommt.

Wenn h rational ist, sind die Flächen im gewöhnlichen Sinne algebraisch.

Eine eingehende Discussion der Meridiancurve liefert eine Reihe zum Teil sehr interessanter geometrischer Resultate.

Was die Gestalten der Curven anbetrifft, so sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem $h > 1$ oder $h < 1$ ist. Von diesen hat der Herr Verfasser nur den ersten ins Auge gefasst. Die Meridiancurve, welche im Projectionscentrum stets die Axe senkrecht durchschneidet, trifft sie, wenn $h > 1$ ist, noch an einer, resp. mehreren anderen Stellen. Ist aber $h < 1$, so schneidet sie die Axe nicht wieder, sondern besitzt eine Spitze, die nicht auf der Axe liegt, und geht so ins Unendliche, dass sie zur Asymptote die Tangente im Projectionscentrum hat. A.

Demartres. Sur les surfaces à génératrice circulaire. Ann de l'Éc Norm (3) II. 123-182.

Diese ausgedehnte Arbeit giebt eine eingehende Theorie der klischen Flächen, d. h. der Flächen, welche von einem be-gten und veränderlichen Kreise beschrieben werden. Sie zer-llt in drei Hauptteile.

Der erste Teil enthält die kinematische Grundlage der Be-chtung, die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen der cykli-hen Flächen und der Linien auf denselben.

Wenn ein rechtwinkliges Coordinatensystem $oxyz$ sich in gend einer bestimmten Weise bewegt, so dass seine Lage im ume von einem Parameter t abhängt, so kann man sich die samte Bewegung zusammengesetzt denken aus der Bewegung s Punktes o (der Translation) und einer Drehung um eine xe, welche durch o geht, diese letzere aber kann wieder zerlegt erden in eine Drehung um die z-Axe und um eine in der xy-bene gelegene Axe, welche die Charakteristik dieser Ebene ge-nnt wird. Nimmt man an, das ox parallel dieser Charakteristik t, so können die Componenten einer unendlich kleinen Ver-hiebung durch

$$udt, \quad vdt, \quad wdt$$

d die Componenten der Drehung durch

$$pdt, \quad 0 \quad rdt$$

rgestellt werden, wo u, v, w, p, r Functionen von t sind.

(Die hier gemachte Annahme beschränkt zwar die Allge-inheit der Bewegung, aber in einer für den vorliegenden Zweck stattetcn und nützlichen Weise, da man einerseits durch sie, orauf es ankommt, der z-Axe jede beliebige Bewegung erteilen kan, andererseits aber eine Unbestimmtheit vermieden wird, elche sonst in das Problem hinein käme. Anm. d. Ref.)

Denkt man sich nun in der Ebene der xy einen Kreis um o, ssen Radius R ebenfalls Function von t ist und auf demselben nen Punkt m, dessen Lage durch den Centriwinkel mox bestimmt ird, so ist der Ort der Kreise eine cyklische Fläche. Die ge eines Punktes m derselben hängt von den beiden Para-etern t und φ ab, und die drei Axencomponenten der

elementes δs in Bezug auf ein festes Axensystem lassen sich folgendermassen darstellen:

$$\delta x = (u + R'\cos\varphi - rR\sin\varphi)dl - R\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$\delta y = (v + R'\sin\varphi + R\cos\varphi)dl + rR\cos\varphi\, d\varphi,$$
$$\delta z = (w + p\sin\varphi)dl.$$

Es wird nun noch gesetzt

$$M = u\cos\varphi + v\sin\varphi + R', \quad N = rR + v\cos\varphi - u\sin\varphi,$$
$$Q = w + pR\sin\varphi, \quad H^2 = M^2 + Q^2,$$

dann erhält man

$$\delta x = M\cos\varphi\, dl - (N dl + R d\varphi)\cos\varphi,$$
$$\delta y = M\sin\varphi\, dl + (N dl + R d\varphi)\cos\varphi,$$
$$\delta z = Q\, dl.$$

Hieraus folgt weiter

$$\delta s^2 = (M^2 + Q^2)dl^2 + (N dl + R d\varphi)^2 = H^2 dl^2 + (N dl + R d\varphi)^2,$$

und

$$\delta s \sin i = H dl, \quad \delta s \cos i = N dl + R d\varphi,$$

wo i den Winkel bedeutet, welchen das Linienelement δs mit dem erzeugenden Kreise bildet.

Das Oberflächenstück zwischen zwei benachbarten Kreisen ist:

$$dS = R\, dl \int_0^{2\pi} H\, d\varphi.$$

Dies ist im allgemeinen ein elliptisches Integral. Es reducirt sich auf Elementarfunctionen, wenn M und Q, als Functionen von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ betrachtet, einen linearen Factor gemein haben. Dies ist aber zugleich die Bedingung dafür, dass zwei aufeinander folgende Kreise einen Punkt gemein haben. Hiermit ist die Grundlage für die Theorie der cyklischen Flächen gewonnen. Die weiteren Untersuchungen des ersten Teils betreffen die geodätische Krümmung, die Normalen und Tangentialebenen, die geodätische Torsion, die Krümmungslinie nebst den Nabelpunkten, die asymptotischen Linien und die Hauptkrümmungen.

Im zweiten Teile werden nun mit Hülfe der gewonnenen Formeln zunächst gewisse allgemeine Eigenschaften der cyklischen

Flächen entwickelt. Die wichtigsten sind in folgenden Sätzen ausgesprochen:

Jeder erzeugende Kreis berührt in zwei Punkten eine Krümmungslinie der Fläche; diese beiden Punkte liegen auf der Polare desjenigen Punktes, in welchem die Charakteristik von der sogenannten Radical-Axe geschnitten wird. Unter der Radical-Axe ist die (endliche) gemeinschaftliche Secante eines erzeugenden Kreises mit der Projection des Nachbarkreises auf seine Ebene verstanden.

Jeder erzeugende Kreis berührt ferner zwei asymptotische Linien der Fläche, die beiden Berührungspunkte liegen auf der Charakteristik.

Die Normalen längs eines erzeugenden Kreises gehen sämtlich durch einen Kegelschnitt (und ausserdem selbstverständlich auch durch die Axe des erzeugenden Kreises). Dieser Kegelschnitt wird in zwei Fällen zu einem Kreise, nämlich erstens, wenn die Verschiebung des Mittelpunkts des erzeugenden Kreises in Richtung der Axe stattfindet, die Ebenen beider Kreise sind alsdann parallel; zweitens, wenn der Mittelpunkt sich senkrecht zur Charakteristik verschiebt, die Ebenen beider Kreise stehen dann zu einander senkrecht.

Der Kegelschnitt kann auch in zwei Gerade aufgelöst sein, von denen nur die eine, welche die Axe des erzeugenden Kreises nicht schneidet, in Betracht kommt. Notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass entweder $\frac{dR}{dl} = 0$ sei, oder dass zwei benachbarte erzeugende Kreise einen Punkt gemein haben.

Im Anschluss an diese Sätze folgt eine Klassification der cyklischen Flächen, gegründet auf die gegenseitige Lage der benachbarten erzeugenden Kreise: Es ergeben sich hiernach vier Klassen:

1) Zwei benachbarte erzeugende Kreise haben im allgemeinen keinen Punkt gemein, die Normalen längs eines erzeugenden Kreises schneiden einen festen Kegelschnitt. Jeder erzeugende Kreis berührt in zwei getrennten Punkten je eine Krümmungslinie.

2) Jeder erzeugende Kreis schneidet den benachbarten in einem Punkte. Der Ort dieser Punkte ist eine Curve, welche sämtliche erzeugenden Kreise berührt. Die Normalen längs eines Kreises gehen ausser durch die Axe noch durch eine zweite feste Gerade; jeder erzeugende Kreis osculirt in einem Punkte eine Krümmungslinie.

3) Enveloppen einer (mit t variirenden) Kugelschar. Zwei benachbarte erzeugende Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Die erzeugenden Kreise berühren zwei feste Curven, die Normalen längs eines erzeugenden Kreises liegen auf einer geraden Kegelfläche, jeder erzeugende Kreis ist eine Krümmungslinie der Fläche.

4) Die erzeugenden Kreise sind die Krümmungskreise einer Raumcurve.

Ueber die Enveloppen der Kugeln werden dann noch einige specielle Untersuchungen angestellt, und es wird ein gewisser Satz von Bonnet besprochen. Zum Schlusse des zweiten Teiles werden die orthogonalen Trajectorien der erzeugenden Kreise untersucht, wobei ein Satz von Ribaucour verallgemeinert wird.

Im dritten Teile werden cyklische Flächen bestimmt, welche gegebene Bedingungen erfüllen.

Das erste Problem ist die Aufsuchung derjenigen cyklischen Flächen, bei denen die orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden Kürzeste sind. Es ergeben sich entweder Rotationsflächen oder Flächen von folgender Eigenschaft. Der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises beschreibt eine Curve constanter Torsion; die Ebene des Kreises ist die Schmiegungsebene dieser Curve, sein Radius ist constant und gleich dem Torsionsradius der Curve des Mittelpunktes. Das zweite Problem betrifft die Aufsuchung der cyklischen Flächen, für welche die oben erwähnte Grösse eine rationale Function von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ist; diese Flächen sind durch mancherlei einfache Eigenschaften ausgezeichnet.

Drittens werden die cyklischen Flächen gesucht, für welche die Summe der Hauptkrümmungen längs jedes erzeugenden Kreises constant ist, aber von einem erzeugenden Kreise zum andern variirt. Diese Flächen gehören als specieller Fall

zu denen des vorigen Problems. Es ergeben sich Rotationsflächen.

Ist die Summe der Hauptkrümmungen constant = 0, so ergeben sich cyklische Minimalflächen, welche schon von Riemann gefunden sind. Viertens und fünftens werden die cyklischen Flächen bestimmt, bei welchen die asymptotischen Linien (die Krümmungslinien) längs eines jeden erzeugenden Kreises constante Neigung gegen diesen Kreis haben.

Im letzteren Falle ergeben sich gewisse anallagmatische Flächen.

Zuletzt werden solche Flächen gesucht, für welche die erzeugenden Kreise Isothermen sind, welche also durch die erzeugenden Kreise und ihre Orthogonalen in unendlich kleine Quadrate zerlegt werden können. Hier ergiebt sich eine specielle Klasse der vorher bezeichneten Flächen. A.

E. Goedseels. Théorie des surfaces réglées, précédée de la démonstration des propriétés principales des limites et des infiniments petits. Louvain. Fonteyn 76 p. 8°

Einleitung: Theorie der Grenzen und der unendlich kleinen Grössen ungefähr wie in Duhamel, Calcul infinitésimal, mit denselben Eigenschaften und Mängeln. Der Satz lim(arc: Sehne) = 1 wird streng nur für einen convexen Bogen bewiesen oder für einen, dessen ebene Projection convex ist.

I. Regelflächen im allgemeinen. Der Verfasser begründet zunächst in aller Strenge den Satz, dass, wenn in einem Punkte A einer Erzeugenden eine Curve AM der Oberfläche eine Tangente AT besitzt, die Ebene der Erzeugenden und der AT die Tangente AT' an jeder anderen Curve AM' enthält, die durch den Punkt A geht; anders ausgedrückt, er beweist die Existenz der Berührungsebene der Oberfläche. Danach zeigt er, dass, wenn eine Berührungsebene in drei Punkten einer Erzeugenden vorhanden ist, auch eine Berührungsebene in einem beliebigen vierten Punkte existirt. (Dieser Beweis ist schon veröffentl

in Mathesis III. 49 ff., F. d. M. XV. 1883. 671). Ausserdem hat man

$$(1) \qquad \operatorname{cotg} \delta = \frac{P}{d} + \operatorname{cotg} \Delta,$$

wo d den Abstand zweier Punkte A und D auf einer Erzeugenden bezeichnet, P eine Constante, δ die Grenze des Winkels $D''DD'$ ($A'D'$ ist eine benachbarte Erzeugende von AD, $A'D''$ eine Parallele zu AD, DD'' eine Parallele zu AA'; AA' die Secante einer Curve AM, die als Grenze die Tangente AT in A an AM hat), Δ die Grenze des Supplements von $DD''D'$. Ist die Berührungsebene in D und in A dieselbe, so ist $\operatorname{cotg} \delta = 0$, also $P = \infty$, oder aber $\operatorname{cotg} \Delta = \infty$ oder auch $P = \infty$ und $\operatorname{cotg} \Delta = \infty$. In beiden Fällen ist die Berührungsebene dieselbe längs der Erzeugenden, und die Oberfläche heisst abwickelbar. Man kann übrigens zeigen, dass die Cylinder und Kegel, auf welche die Formel (1) nicht anwendbar ist, auch dieselbe Berührungsebene längs der Erzeugenden haben. Die Regelflächen spalten sich also in zwei Klassen, diejenigen, welche eine einzige Berührungsebene längs der Erzeugenden haben, und diejenigen, für welche die Berührungsebene veränderlich ist.

II. Windschiefe Flächen. 1) Theorem von Hachette. 2) Die Berührungsebene im Unendlichen ist die Grenze der Ebene, welche durch eine Erzeugende geht und parallel einer anderen ist, die sich der ersten immerfort nähert. (Asymptotenkegel.) 3) Existenz des centralen Punktes oder Berührungspunktes der zur Berührungsebene im Unendlichen senkrechten Berührungsebene. Gesetz der Verteilung der Berührungsebenen oder Theorem von Chasles. 4) Der centrale Punkt ist die Grenze der kürzesten Entfernung zweier Erzeugenden, von denen die zweite sich der ersten unbegrenzt nähert.

III. Abwickelbare Oberflächen. Versuch einer strengen Darstellung der Theorie der Abwickelung der Regelflächen mit einziger Tangentialebene längs jeder Erzeugenden. Der Verfasser betrachtet die Abwickelung eines der Oberfläche umbeschriebenen Polyeders und versucht es, daraus die Theorie der Oberfläche selbst abzuleiten, was bisher noch nicht geschehen ist. Der Ver-

such ist unvollkommen, aber die Schwierigkeiten des Gegenstandes sind wenigstens klar beleuchtet.

Anhang. Anwendung der Principien des zweiten Capitels auf das hyperbolische Paraboloid. Mn. (Lp.)

G. Pirondini. Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe. Batt. G. XXIII. 288-331.

Nach einigen Untersuchungen über den Wert des Verhältnisses $\frac{\varrho}{r}$ für die Raumcurven (wo ϱ und r den Krümmungs- bezw. Torsionsradius darstellen), werden einige geometrische Eigenschaften der Regelflächen aufgestellt. Drei besondere Fälle solcher Flächen werden ins Auge gefasst; die nämlich, wo die Strictionslinie eine geodätische oder eine asymptotische Linie oder eine Krümmungslinie ist. Es folgen dann einige damit verbundene geometrische Untersuchungen; die von Serret (Théorie des lignes à double courbure) aufgeworfene Frage, ob es Curven giebt, deren Hauptnormalen zwei feste, nicht in einer Ebene liegende Geraden schneiden, wird bejahend beantwortet. Die Abhandlung wird mit der Bestimmung der von einem strahlenden Punkte gleichmässig beleuchteten Flächen geschlossen. (Diese Aufgabe ist auch von Herrn R. Hoppe in einer Note behandelt: „Surfaces également illuminées.“ Upsala Act. (3) VI. 1867. Red.)

Die Fülle der in der besprochenen Abhandlung angegebenen Resultate verbietet uns, auf den Inhalt näher einzugehen; doch wollen wir zwei Sätze als Beispiele anführen.

Alle Regelflächen, welche eine und dieselbe Strictionslinie haben und sich längs dieser Linie gegenseitig berühren, werden aus einer derselben dadurch erhalten, dass man jede Erzeugende um ihren Berührungspunkt mit der Strictionslinie um einen constanten Winkel in der Tangentialebene dreht.

Unter den Regelflächen, deren Strictionslinie eine Krümmungslinie ist, werden diejenigen, für welche diese Linie auch eben und geodätisch ist, dadurch charakterisirt, dass ihr Directorkegel ein Umdrehungskegel ist.

Während der Anfertigung dieses Referates erschien (Batt. G. XXV. 25-41) der erste Teil eines neuen Aufsatzes von Herrn Pirondini, den der Verfasser als die Fortsetzung seiner früheren Abhandlung bezeichnet. Vi.

R. H. VAN DORSTEN. Theorie der kromming van lijnen op gebogen oppervlakken. Diss. Leiden. Brill 66 Seiten.

Diese Dissertation ist die preisgekrönte Antwort auf eine von der math. und naturwiss. Facultät in Leiden ausgeschriebene Preisfrage: Analytische Entwickelung der Theorie der Krümmung von Curven, welche auf einer Oberfläche gezogen werden können, mit Anwendung auf die Krümmungscurven der Oberflächen zweiten Grades. In einer kurzen Einleitung wird die Geschichte der wichtigen Aufgabe vorgeführt und auf die Untersuchungen von Monge, Lancret, de Saint-Venant und anderen hingewiesen. Die Abhandlung selbst zerfällt in fünf Abschnitte, ihre hier folgenden Ueberschriften geben den Inhalt derselben.

Abschnitt 1. Allgemeine Theorie der Krümmung von Curven auf Oberflächen.

Abschnitt 2. Besondere Curven auf Oberflächen.

Abschnitt 3. Aenderungen der Krümmungen der U- und V-Curven. Derivation von Curven.

Abschnitt 4. Curven auf bestimmten Oberflächen.

A. Curven auf Umdrehungsflächen.

B. Curven auf windschiefen Flächen.

C. Curven auf abwickelbaren Flächen.

Abschnitt 5. Krümmung von Curven auf Oberflächen des zweiten Grades.

Die Behandlung des Ganzen ist rein analytisch, während die vielen und langen Formeln in ganz symmetrische Formen gebracht werden, wodurch sie sehr bequem zu übersehen sind. Ausser vielen bekannten trifft man auch einige neue Theoreme hinsichtlich der Krümmung von Curven auf Oberflächen an. G.

R. Hoppe. Bemerkung zu einem Satze von Craig.
Hoppe Arch. (2) II. 103-106.

Herr Craig hat (J. Hopkins Circ. 1882. 178, Ref. F. d. M. XIV. 1882. 667) ohne Beweis den Satz aufgestellt: Zieht man parallel allen Hauptnormalen einer geschlossenen Raumcurve Radien vom Mittelpunkte einer Kugel, so teilt die Curve der Endpunkte die Oberfläche in zwei gleiche Teile. Herr Hoppe hat bereits in dem oben erwähnten Referat darauf aufmerksam gemacht, dass der Satz nur mit gewissen Einschränkungen richtig ist. In der hier vorliegenden Bemerkung werden die Einschränkungen genauer dahin präcisirt: Die Curve muss bis auf die zweite Ordnung stetig sein, und die Curve der Endpunkte darf keine Doppelpunkte haben. Ein Beispiel von Curven, für welche der Craig'sche Satz nicht gilt, bieten die von Herrn Hoppe in seiner analytischen Geometrie § 60 behandelten Curven cyklischer Torsion, welche der Bedingung genügen

$$\varepsilon^2 + \vartheta^2 = \operatorname{ctg} \alpha^2,$$

wo ε den Krümmungswinkel, ϑ den Torsionswinkel, α eine Constante bedeutet. Für diese ergiebt sich der Flächeninhalt des einen Teils der Kugel $\Omega = 4kR \sin\alpha$, wo k eine gewisse durch $\sin\alpha$ rational darstellbare Zahl ist. Wählt man z. B. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ dann ergiebt sich für die Raumcurve

$$x = -\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\lambda, \quad y = \frac{a}{4}(3\sin\lambda + \tfrac{1}{3}\sin 3\lambda),$$

$$z = -\frac{a}{4}(3\cos\lambda + \tfrac{1}{3}\cos 3\lambda),$$

der Bogen ist $s = a\lambda$. Die Curve schliesst sich, wenn λ um $4R$ wächst. Die sphärische Curve wird ein zweimal durchlaufener Kugelkreis, welcher die Fläche im Verhältnis 1:3 teilt.

A.

R. Hoppe. Rein analytische Consequenzen der Curventheorie. Hoppe Arch. (2) II. 417-429.

Die Aufgabe, eine Curve aus der Relation m-

mungs- und Torsionswinkel zu berechnen, ist vom Verfasser in Crelle J. LXIII. 122 auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt. Aus einer Speciallösung geht daher die allgemeine Lösung hervor und zwar auf doppeltem Wege. Den einen giebt die Theorie dieser Gleichungen, den andern eine Orthogonalsubstitution, angewandt auf die Coordinaten der entsprechenden speciellen Curve. Es werden nun die Relationen der beiderseitigen Integrationsconstanten ermittelt, durch welche die Identität der beiden Lösungen bedingt ist. Hierbei ergeben sich eine Anzahl Formeln, deren Herleitung auf anderm als geometrischem Wege wahrscheinlich schwierig sein würde, z. B.

$$\int \frac{l d\tau}{1+f} = \operatorname{arctg} \frac{h'-m}{g'+n} - \vartheta,$$

wo f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, f', g', h' die der Hauptnormale, l, m, n die der Binormale, τ, ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel bezeichnen. H.

R. Hoppe. Erweiterung des Aoust'schen Problems der Curventheorie. Hoppe Arch. (2) II. 129-137.

Das allgemein gelöste Aoust'sche Problem verlangt eine Curve so zu bestimmen, dass, wenn man von ihr die Einhüllende der Krümmungsaxe nimmt, von dieser wieder u. s. w., das letzte Resultat der Urcurve congruent wird. Fasst man den Uebergang von der ersten zur zweiten, von dieser zur dritten als eine wiederholte Operation auf, so kann man fragen, wie sich das Problem für analoge Operationen, deren Wiederholung auf die Urcurve zurückführt, gestaltet. Diese Frage wird hier untersucht.

H.

R. Hoppe. Zum Molins'schen Problem. Hoppe Arch. (2) II. 269-273.

Herr Molins hat (Toul. Mém. V. 175-199, Ref. F. d. M. XV. 1883. 672) das Problem gelöst, eine Curve durch Quadraturen

darzustellen, wenn der Radius R der osculirenden (vierpunktig berührenden) Kugel als Function des Krümmungsradius ϱ gegeben ist. Herr Hoppe hat diese Aufgabe noch einmal behandelt, aber in etwas abweichender Weise. Da nämlich zur Bestimmung einer Curve zwei Relationen nötig sind, so muss die allgemeine Lösung noch eine willkürliche Function enthalten. Während aber Molins diese willkürliche Function gleich anfangs einführt, zeigt Herr Hoppe, dass sich die erste Integration ganz unabhängig von der Wahl dieser Function ausführen lässt. Hierin liegt eine Bestätigung der von Herrn Hoppe in seiner Curventheorie aufgestellten Regel, wonach bei curventheoretischen Untersuchungen es zweckmässig ist, die Frage nach den Richtungsgrössen unabhängig von der nach den Liniengrössen zu behandeln.

A.

W. Anissimow. Einige Sätze über Curven doppelter Krümmung und ihre Evoluten. Mosk. Math Samml. XII. 42-49. (Russisch.)

Ausgehend von den bekannten Formeln, welche Serret für die Coordinaten der Linie der Krümmungsmittelpunkte und für die der Rückkehrkante der Polarfläche einer Raumcurve gegeben hat, beweist der Verfasser sehr einfach folgende Sätze:

1) Ist die erste Krümmung einer Raumcurve constant, so sind die gegebene Curve und die Curve ihrer Krümmungsmittelpunkte reciprok in Bezug auf ihre Polarflächen; die eine dieser Curven ist die Rückkehrkante der Polarfläche der anderen.

2) Für jede Raumcurve und ihre Rückkehrkante ist Product der Radien erster Krümmung gleich dem der R zweiter Krümmung.

3) Bei jeder Raumcurve ist das Verhältnis des L elementes der Linie der Krümmungsmittelpunkte zum L elemente der Curve selbst gleich dem Verhältnisse des R der osculirenden Kugel zum Radius der zw

4) Nach der Abwickelung der Polarfl. werden die Abstände der entsprechende.

formirten Rückkehrkante und der transformirten Linie der Krümmungsmittelpunkte vom gemeinschaftlichen Schnittpunkte der transformirten Evoluten entsprechend gleich dem Radius der osculirenden Kugel und dem Krümmungsradius in dem entsprechenden Punkte der ursprünglichen Curve.

5) Nach der Abwickelung der Polarfläche auf eine ihrer Tangentenebenen, die durch einen Punkt M der Raumcurve geht, fallen alle Punkte der Raumcurve mit M zusammen, und durch denselben Punkt gehen alle Evoluten der Curve. Ml.

L. Lecornu. Distance d'un point d'une courbe gauche à la sphère osculatrice au point infiniment voisin. C. R. C. 1207-1211.

Ph. Gilbert. Sur quelques formules de la théorie des courbes gauches. C. R. CI. 52.

Herr Lecornu entwickelt folgende Formeln. Bedeuten R und T die Radien der ersten und zweiten Krümmung (Torsion) im Punkte P einer Curve und werden die Ableitungen nach dem Bogen S durch Accente bezeichnet, so dass der Radius der osculirenden Kugel $\varrho = \sqrt{R^2 + R'^2 T^2}$ ist, so hat der Nachbarpunkt P', dessen Entfernung von P gleich dS ist, von der osculirenden Kugel den Abstand

$$\varepsilon = \frac{dS^4}{24\varrho}\left(\frac{R'T'}{RT} + \frac{R''}{R} + \frac{1}{T^2}\right) = \frac{dS^4}{24}\,\frac{\varrho'}{RR'T^2}.$$

Nennt man das Bogenelement der vom Mittelpunkte der osculirenden Kugel beschriebenen Curve dS_1 und bezeichnet man alle sich auf diese Curve beziehenden Grössen dementsprechend, so ist

$$\varepsilon = \frac{dS^2\,dS_1^2}{24RR_1\varrho}.$$

Setzt man noch

$$h = \frac{dS^2}{2R}, \qquad h_1 = \frac{dS_1^2}{2R_1},$$

so ist h der Abstand des Punktes P' von der Tangente in P und h_1 hat die analoge Bedeutung, und es ist

$$2\varepsilon\varrho = \frac{1}{3} h h_1 .$$

$2\varepsilon\varrho$ aber ist die Potenz des Punktes P' in Bezug auf die in P osculirende Kugel.

Herr Gilbert nimmt aus der eben besprochenen Note des Herrn Lecornu Veranlassung, auf zwei andere Formeln für dieselbe Grösse hinzuweisen, welche teils von Herrn Ruchonnet teils von ihm selbst herrühren.

Herr Ruchonnet findet

$$\varepsilon = \frac{ds^2 . ds_1}{24\varrho RT},$$

wo ds_1 das Bogenelement der Gratlinie der Polarfläche (welcher?) bedeutet (Nouv. Ann. (2) IX. p. 457).

Herr Gilbert kommt auf die Formel

$$\varepsilon = \frac{R' ds^4}{24\varrho RT^2}$$

(Nouv. Ann. (2) XII. p. 132).

Der Unterschied zwischen einem unendlich kleinen Bogen und seiner Projection auf die Schmiegungsebene in seinem Anfangspunkte ergiebt sich hieraus gleich

$$\frac{1}{40} \frac{ds^5}{R^2 T^2} .$$

A.

J. MÖLLER. Ueber den Ort des Krümmungskreiscentrums einer Raumcurve. Lund Universitet Acta XXI. (1884-1885) 18 S.

Der Herr Verfasser benutzt eine von Herrn Björling in der „Öfversigt af Vet. Akad. Forh." 1881 angegebene Methode, wodurch die Coordinaten als ganze rationale Functionen eines Parameters λ ausgedrückt werden können, und bestimmt dadurch die Coordinaten der Krümmungscurve als Functionen desselben Parameters. Er untersucht ferner die verschiedenen Fälle und wendet die Methode auf einen kubischen Kegelschnitt an.

F.

E. Cesaro. Sur la plus courte distance entre deux droites infiniment voisines. Mathesis V. 196-202.

Bestimmung dieses Abstandes und Anwendung auf die Geraden, denen man in der Theorie der Raumcurven begegnet.

Mn. (Lp.)

V. Jamet. Sur une propriété des courbes à double courbure. C. R. C 1329-1335.

Jeder Schnitt einer abwickelbaren Fläche und einer ihrer Tangentialebenen enthält ausser der berührenden Generatrix eine Curve, welche die Gratlinie berührt, und deren Krümmungsradius im Berührungspunkte gleich $\frac{4}{3}$ von demjenigen der Gratlinie in demselben Punkte ist.

A.

E. Cesaro. Sur l'hélice osculatrice. Mathesis V 32-33.

Die osculirende Schraubenlinie einer Curve ist diejenige, welche dieselbe erste und zweite Krümmung wie die gegebene Curve hat.

Mn. (Lp.)

V. Volterra. Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili. Rom. Acc. L. Rend (4) I. 274-278.

In zwei früheren Noten hatte der Herr Verfasser die Bestimmung der allgemeinen, unendlich kleinen Deformation einer in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen biegsamen, unausdehnbaren Oberfläche $z = z(x, y)$ zurückgeführt auf die Bestimmung einer Function w von x und y, welche mit einer Function ω von $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = +\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

verbunden ist. Nach Lösung der letztgenannten Aufgabe erhält

man nämlich die Variationen der Coordinaten durch folgende Gleichungen

$$\delta x = \int (wdp + \omega dy), \quad \delta y = \int (wdq - \omega dx), \quad \delta z = w.$$

Eliminirt man aus (1) die Function ω, so ergiebt sich eine partielle Differentialgleichung für w, welche besonders einfache Gestalt annimmt, wenn man ein specielles, die Gleichung (1) befriedigendes Wertsystem w_1, ω_1 (z. B. $w_1 = x$, $\omega_1 = -q$) als unabhängige Veränderliche einführt. Man erhält folgende Gleichung:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} + \dfrac{\partial}{\partial \omega_1}\left[(rt - s^2)\dfrac{\partial w}{\partial \omega_1}\right] = 0 \\ \left(r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichung wird in der vorliegenden Abhandlung für verschiedene Flächen integrirt oder wenigstens auf bekannte Differentialgleichungen reducirt. So zeigt sich, dass man die Aufgabe für Flächen zweiten Grades mit Mittelpunkt von der Länge der Axen unabhängig machen und damit auf die entsprechende Aufgabe bei der Kugel zurückführen kann, deren Lösung der Herr Verfasser giebt. Bei Flächen zweiten Grades ohne Mittelpunkt führt das Problem fast unmittelbar auf die allgemein zu lösende Differentialgleichung $\varDelta^2(w) = 0$. Bei der Pseudosphäre und der Helikoide constanter Krümmung von Dini gelangt der Herr Verfasser zu der Gleichung

$$\varDelta^2(F) = F.$$

Den Schluss der Abhandlung bildet die vollständige Lösung des Problems für Flächen der Form $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$.

F. K.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

R. A. Roberts. On the arguments of points on a surface. Lond. M. S. Proc. XVI. 238-244.

Wenn in der Ebene eine variable allgemeine Curve eines bestimmten Grades eine feste Curve durchschneidet, so bestehen zwischen den Coordinaten der Durchschnittspunkte gewisse Relationen, welche bekanntlich von Clebsch mit Hülfe von Integralen ausgedrückt sind und mit den Additionstheoremen zusammenhängen. Aehnliche Relationen bestehen zwischen den Durchschnitten einer festen Raumcurve mit einer veränderlichen Fläche.

Der Herr Verfasser will nun in analoger Weise den Zusammenhang zwischen den Durchschnitten einer festen Fläche mit einer zweifach unendlichen Schar von Curven durch Doppelintegrale darstellen. Er beschränkt sich hierbei in Bezug auf die gewählten Curvenscharen auf gewisse einfache Fälle und kommt dabei zu sehr interessanten Resultaten.

Ist $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der gegebenen algebraischen Fläche, so betrachtet er den Differentialausdruck

$$d^2u = \frac{dx\,dy}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dy\,.dz}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{dz\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$= \frac{d^2S}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

welcher sich auch in Polarcoordinaten leicht ausdrücken lässt, und welcher proportional ist dem Volumen eines dem Flächenelement entsprechenden Stückes einer Schale zwischen den Flächen $F = 0$ und $F + k = 0$, wo k unendlich klein ist.

Als Curvensystem wird zunächst ein beliebiges Strahlensystem gewählt, welches definirt ist durch die Gleichungen

$$(5) \qquad \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} = \varrho,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n$ als Functionen zweier Parameter p und q gegeben sind. Setzt man die Werte von x, y, z aus (3) in die Gleichung $F = 0$ ein, so erhält man zur Bestimmung von ϱ als Function von p und q eine Gleichung n^{ten} Grades

$$F \equiv f(\varrho) = a\varrho^n + b\varrho^{n-1} + \cdots = 0,$$

deren Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ heissen mögen.

Ist ϱ in dieser Weise bestimmt, so sind vermöge der Gleichungen (3) auch x, y, z durch die Parameter p und q dargestellt. Diese Parameter werden nun auch in den Differentialausdruck d^2u eingeführt, und es zeigt sich, dass derselbe die Form annimmt

$$(7) \qquad d^2u = L(\varrho - r_1)(\varrho - r_2)\,\frac{dp\,.\,dq}{f'(\varrho)}$$

Hierin ist

$$L = \begin{vmatrix} l & m & n \\ \dfrac{\partial l}{\partial p} & \dfrac{\partial m}{\partial p} & \dfrac{\partial n}{\partial p} \\ \dfrac{\partial l}{\partial q} & \dfrac{\partial m}{\partial q} & \dfrac{\partial n}{\partial q} \end{vmatrix},$$

r_1 und r_2 sind diejenigen Werte von ϱ, denen die Brennpunkte des Strahles p, q im gegebenen Strahlensystem entsprechen. Es sind demnach L, r_1 und r_2 unabhängig von den Wurzeln der Gleichung $f(\varrho) = 0$.

Ebenso wäre

$$x\,d^2u = L(\varrho - r_1)(\varrho - r_2)(l\varrho + \alpha)\,\frac{dp\,.\,dq}{f'(\varrho)} \quad \text{etc.}$$

Bedeutet nun $\varphi(\varrho)$ eine beliebige Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades von ϱ, so ist nach der Lagrange'schen Formel

$$\varphi(\varrho) = \frac{\varphi(\varrho_1)}{f'(\varrho_1)}\left[\frac{f(\varrho)}{\varrho - \varrho_1}\right] + \frac{\varphi(\varrho_2)}{f'(\varrho_2)}\left[\frac{f(\varrho)}{\varrho - \varrho_2}\right] \text{[illegible]}$$

Da der Ausdruck rechts vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in Bezu[illegible] $\varphi(\varrho)$ aber nur vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ist, so folgt, dass d[illegible] Term rechts identisch verschwindet, also ist

$$\frac{\varphi(\varrho_1)}{f'(\varrho_1)} + \frac{\varphi(\varrho_2)}{f'(\varrho_2)} + \cdots + \text{[illegible]}$$

Hieraus lassen sich nun die gesuchten Relationen finden:

Ist $n = 4$, also die gegebene Fläche vom vierten Grade, so folgt

$$d^2u_1 + d^2u_2 + \cdots + d^2u_4 = 0 \quad \text{oder kürzer} \quad \Sigma d^2u = 0.$$

Ist $n = 5$, so folgen ausserdem noch die Gleichungen

$$\Sigma x d^2u = \Sigma y d^2u = \Sigma z d^2u = 0$$

u. s. w.

Begrenzt man auf der Fläche irgend ein Flächenstück S_1, und legt man durch jeden Punkt desselben einen Strahl des gegebenen Systems, so schneidet dieser Strahlenbündel noch $(n-1)$ andere Flächenstücke aus, und es ist, wenn man

$$\iint d^2u_1 = u_1, \quad \iint x d^2u_1 = v_1 \text{ u. s. w.}$$

setzt,

$$\Sigma u = 0, \quad \Sigma v = 0 \text{ u. s. w.}$$

Es lassen sich aber aus der Gleichung (7) noch weitere Folgerungen ziehen. Wenden wir sie auf eine Fläche zweiten Grades an, so folgt

$$d^2u_1 = \frac{L}{a} \cdot \frac{AO_1 . AO_2 . dp\,dq}{AB},$$

$$d^2u_2 = \frac{L}{a} \cdot \frac{BO_1 . BO_2 . dp\,dq}{BA},$$

wo A und B die Schnittpunkte des Strahls mit der Fläche, O_1 und O_2 die Brennpunkte desselben sind. Also ist

$$\frac{d^2u_1}{AO_1 . AO_2} + \frac{d^2u_2}{BO_1 . BO_2} = 0.$$

Ist das Strahlensystem das System der Doppeltangenten einer Fläche vierten Grades $u = 0$, und nimmt u für die Punkte A und B die Werte U_1 und U_2 an, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{d^2u_1}{\sqrt{U_1}} + \frac{d^2u_2}{\sqrt{U_2}} = 0.$$

Ist das Strahlensystem gebildet aus den dreipunktig berührenden Tangenten einer Fläche dritter Ordnung, so ergiebt sich

$$\frac{d^2u_1}{U_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{d^2u_2}{U_2^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

ist das Strahlensystem ein Secantensystem einer Curve, welche auf einer anderen Fläche zweiter Ordnung V liegt, so findet man

$$\frac{d^2u_1}{V_1}+\frac{d^2u_2}{V_2}=0.$$

Mit Bezug auf die ersten dieser drei Relationen bemerkt der Herr Verfasser, dass man daraus nicht, wie in der Ebene, schliessen kann, dass eine doppelt unendliche Schar von Polygonen existirt, welche einer Fläche zweiten Grades eingeschrieben ist, und deren Seiten Doppeltangenten von Flächen vierten Grades sind, deren Gleichung die Form hat

$$u+SF=0,$$

wo S eine Fläche zweiten Grades ist, welche für jede Seite des Polygons anders bestimmt wird. Indessen kann mit Hülfe der obigen Relation die Existenz eines solchen Schliessungssatzes in gewissen Fällen nachgewiesen werden.

Der Herr Verfasser wendet sich alsdann zu den kubischen Flächen und zu den Flächen vierten Grades, und kommt hierbei zu vielen interessanten Resultaten.

Zum Schluss wird auf eine Verallgemeinerung der Untersuchung hingewiesen, die darin besteht, dass statt des Strahlensystems ein System von Kegelschnitten betrachtet wird. Dies ist dargestellt durch die Gleichungen

$$x=\frac{f_1}{f_4},\quad y=\frac{f_2}{f_4},\quad z=\frac{f_3}{f_4}.$$

Hierin bedeuten die f ganze rationale Functionen zweiten Grades von t, deren Coefficienten Functionen zweier Parameter p und q sind; die Methode ist im übrigen der bei den Strahlensystemen angewandten analog.

Endlich werden auch noch einige andere ähnliche Probleme kurz erwähnt. Es handelt sich um Dreiecke, die einer Fläche zweiten oder dritten Grades eingeschrieben sind, und deren Seiten einem Strahlensystem angehören, endlich um eine Cyklide mit der Gleichung

$$U\equiv(x^2+y^2+z^2+k^2)^2-4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=0,$$

welche von einem Strahlensystem geschnitten wird. A.

Brambilla. Le curve asintotiche di una classe di superficie algebriche. Torino Atti XX. 781-790.

Der Zweck dieser Note ist zu beweisen, dass die asymptotischen Curven der durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x_i = x_i'^n \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

dargestellten Oberflächen algebraisch sind, wobei die x_i' lineare Formen dreier Variabeln, n eine beliebige ganze Zahl bedeuten. Für $n = 2$, d. h. für die Steiner'sche Römerfläche, war diese Eigenschaft bekanntlich von Clebsch abgeleitet worden, und nach der Bemerkung des Herrn Brambilla erstreckt sich die Ableitung desselben auf ein beliebiges n. Der Verfasser beschäftigt sich jedoch hauptsächlich mit der Erweiterung des von Herrn Cremona für die Römerfläche gegebenen Beweises, d. h. er zeigt, dass bei der durch die Gleichungen (1) gegebenen ebenen Abbildung der Oberfläche die asymptotischen Linien, wie gross auch n ist, zu Bildern die Kegelschnitte haben, welche die vier Geraden $x_i' = 0$ berühren. Wir wollen nur bemerken, dass dieser Beweis sich durch Anwendung derjenigen Verwandtschaft zwischen zwei Räumen vereinfachen liesse, die durch Gleichungen von der Form (1) hergestellt wird. Se. (Lp.)

Sc. Rindi. Les surfaces polaires inclinées. Darb. Bull. (2) IX. 32-56.

Dieser Aufsatz ist bereits im Jahre 1883 in den Annali della Scuola Normale superiore di Pisa t. VI. erschienen.

Er enthält eine Uebertragung einer von Herrn Dewulf aufgestellten Theorie der geneigten Polaren in der Ebene auf den Raum.

Unter einer geneigten oder schiefen Polare eines Punktes P, des Poles, einer Fundamentalfläche S^n für den Winkel α wird der Ort eines Punktes M verstanden, dessen Polarebenen in Bezug auf S^n mit PM den Winkel α bildet. Die Arbeit beschäftigt sich nun mit den so erzeugten Flächen. Nachdem einige allgemeine Untersuchungen besprochen sind, namentlich in Bezug

auf die Gradzahl der erhaltenen Fläche u. dgl., werden specieller die Flächen zweiten Grades behandelt. Der Fall $\alpha = 90°$ bietet zu besonderen Vereinfachungen Anlass und führt zu einem Beweise des bekannten Satzes, dass sich von einem Punkte auf eine S^n im allgemeinen $n(n^2 - n + 1)$ Normalen fällen lassen, welche auf einem Kegel vom Grade $n(n-1)$ liegen.

Ebenso wird auch von der schiefen Polare einer Geraden t gesprochen. Darunter versteht der Herr Verfasser den Ort eines Punktes M, dessen Polarebene mit der Ebene tM einen constanten Winkel α bildet. A.

J. C. Malet, W. J. C. Sharp. Solution of question 6418. Ed. Times XLII 50-51.

Das Centrum der mittleren Entfernungen für die Berührungspunkte von n parallelen Tangentialebenen einer Oberfläche n^{ter} Klasse ist ein fester Punkt. Lp.

A. Hurwitz. Einige allgemeine Sätze über Raumcurven. Klein Ann. XXV 287-292.

Es werden in dem ersten Teile dieser Abhandlung folgende Sätze bewiesen: Zu jeder geschlossenen Curve im Raume gehört eine bestimmte Schar paralleler Ebenen von folgender Eigenschaft. Nimmt man in irgend zwei Ebenen Σ_0 und Σ_1 dieser Schar je einen Punkt P_0 resp. P_1 an, so begrenzen die Kegel, welche die geschlossene Curve von P_0 und P_1 aus projiciren, ein Raumstück, welches dasselbe Volumen hat, wo auch immer der Punkt P_0 in Σ_0 und der Punkt P_1 in Σ_1 angenommen werden mag. Die Projection der Curve auf die Ebenen der Schar hat eine grössere Fläche, als die Projection der Curve auf irgend eine nicht zu jener Schar gehörige Ebene.

In dem zweiten Teile der Abhandlung wird ein Curvenstück P_0P_1 betrachtet und das Volumen des Körpers bestimmt, das von den beiden Kegeln begrenzt wird, durch welche das Curvenstück von P_0 und P_1 projicirt wird. In Verbindung mit diesem

Volumen wird der Inhalt des Tetraeders gebracht, dessen Ecken P_0 und P_1 und die beiden Punkte sind, in welchen die Tangenten der Curve in P_0 resp. P_1 die Schmiegungsebenen derselben in P_1 resp. P_0 treffen. Lässt man P_0 fest und P_1 sich diesem Punkte nähern, so nähert sich das Verhältnis der beiden Volumina dem festen Grenzwert $\frac{3}{16}$. Dies gilt für jede beliebige Raumcurve; für die kubische Parabel ist das Verhältnis der beiden Volumina stets gleich $\frac{3}{16}$, wenn auch die Punkte P_0 und P_1 eine endliche Entfernung von einander haben.

W. St

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

O. Lüdeke. Ueber die Erzeugung von Flächen durch zwei sich schneidende veränderliche Kegel. Pr Brandenburg.

Es sei eine Kugel k mit dem Radius r gegeben und auf derselben ein Kreis, über welchem als Basis zwei Kegelflächen construirt werden mit den Scheiteln S und S_1; diese beiden Kegel haben ausser dem Kreise noch einen Kegelschnitt B gemein. Hält man die Scheitel der Kegel S und S_1 fest, während der Kreis seine Lage ändert, indem seine Ebene sich parallel mit sich selbst bewegt, so beschreibt der veränderliche Kegelschnitt B im allgemeinen eine Fläche vierten Grades, welche sich auf eine solche des zweiten Grades reducirt, wenn die Gerade SS_1 den Ebenen der Schar der parallelen Kugelkreise parallel ist. Diese Erzeugungsweise bildet den Ausgangspunkt für die in der Abhandlung enthaltenen Untersuchungen.

Die Fläche A ist ein Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder zweischaliges Hyperboloid, jenachdem die Strecke $SS_1 > 2r$, $= 2r$, oder $< 2r$ ist.

An die Discussion der besprochenen Erzeugungsweise wird die Untersuchung der Lage des Mittelpunktes der Fläche A geknüpft, und diejenigen Curven resp. Flächen, welche derselbe

beschreibt, wenn einer oder beide Kegelscheitel sich in gewisser Weise bewegen. Ferner werden die Mittelpunkte der eine Fläche A erzeugenden Kegelschnitte B betrachtet, deren geometrischer Ort wieder ein Kegelschnitt C ist, und die Lage des Mittelpunktes von C. Endlich werden die Kreisschnitte und die Hauptschnitts-Brennpunkte der Fläche A zum Gegenstande der Betrachtung gemacht. Die Untersuchungen sind durch Rechnung mit Zugrundelegung rechtwinkliger Coordinaten geführt. A.

G. Humbert. Sur la détermination des axes de l'indicatrice en un point d'une surface du second degré. S. M. F. Bull. XIII. 142-143.

Die Construction ist folgende:

Seien in einer Hauptebene einer Fläche E zweiten Grades D_1 und D_2 die Lote vom Mittelpunkt M auf die Ebenen mit Kreisschnitten, welche senkrecht zu dieser Hauptebene stehen.

Sei P eine beliebige Ebene, p der Fusspunkt des von M darauf gefällten Lotes, m_1 und m_2 die Durchschnittspunkte der Ebene P mit D_1 und D_2. Die Axen des Schnittes der Ebene P mit der Fläche E sind alsdann parallel den Geraden, welche die Winkel zwischen pm_1 und pm_2 halbiren. A.

J. Gysel. Ueber die sich rechtwinklig schneidenden Normalen einer Fläche zweiten Grades. Pr. Gymn. Schaffhausen.

Diese Arbeit knüpft an eine frühere Arbeit des Herrn Verfassers: Beiträge zur analytischen Geometrie der Curven und Flächen zweiten Grades, Pr. Schaffhausen 1877, (vergl. F. d. M. IX. 505-507) an. Die früher gewonnenen Resultate werden vervollständigt und die Beziehungen der behandelten Frag[illegible] [illegible]iner von Clebsch gegebenen Methode der eindeutigen A[illegible] wisser Flächen auf Ebenen werden untersucht. Eb[illegible] viele Resultate der Arbeit von Painvin: Lieu des s[illegible] triédres trirectangulaires dont les côtés sont normaux

face du second ordre. Nouv. Ann. (2) X. 337-359. 1871. (vergl. F. d. M. III. 382-384) von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus wieder erlangt.

Ist

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

die Gleichung eines Ellipsoids in rechtwinkligen Coordinaten, so sind die Bedingungen für einen Punkt xyz, von welchem aus sich zwei auf einander senkrechte Normalen auf das Ellipsoid fällen lassen,

$$\frac{\alpha x^2}{(\alpha+\lambda)^2} + \frac{\beta y^2}{(\beta+\lambda)^2} + \frac{\gamma z^2}{(\gamma+\lambda)^2} = 1,$$

$$\frac{\alpha x^2}{(\alpha+\mu)^2} + \frac{\beta y^2}{(\beta+\mu)^2} + \frac{\gamma z^2}{(\gamma+\mu)^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{(\alpha+\lambda)(\alpha+\mu)} + \frac{y^2}{(\beta+\lambda)(\beta+\mu)} + \frac{z^2}{(\gamma+\lambda)(\gamma+\mu)} = 0.$$

Setzt man nun

$$\lambda+\mu = \frac{s'}{t'}, \quad \lambda\mu = \frac{p'}{t'}, \quad -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = r,$$

so folgt aus diesen Gleichungen

$$x^2 = \frac{(\beta-\gamma)}{r} \cdot \frac{(p'+\alpha s'+\alpha^2 t')^2(ps'+2(\beta+\gamma)p't'+\beta\gamma s't')}{t'^2(2p'^2+(\alpha+\beta+\gamma)p's'+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)p't'+\alpha\beta\gamma s't')}$$

und die analogen, d. h., es sind die Quadrate der Coordinaten jenes Punktes als rationale Functionen vierten Grades zweier Parameter $\frac{p'}{t'}$ und $\frac{s'}{t'}$, oder homogen durch p', s' und t' dargestellt. Der gemeinschaftliche Nenner von x^2, y^2, z^2 wird bezeichnet durch $rx_4^2 = r\xi_4$, die Zähler bezüglich durch $rx_1^2 = r\xi_1$, $rx_2^2 = r\xi_2$, $rx_3^2 = r\xi_3$. Sieht man nun $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4$ als homogene Coordinaten eines räumlichen Punktes an, $p':s':t'$ als die homogenen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene, so ist vermöge der aufgestellten Gleichungen die Ebene $p's't'$ so auf die Fläche ξ abgebildet, dass jedem Punkte der Ebene ein und nur ein Punkt dieser Fläche entspricht. Einem Schnitt der Fläche ξ mit der Ebene

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0$$

entspricht hierbei die ebene Curve vierter Ordnung

$$a_1(\beta-\gamma)\varphi_1^2\psi_1 + a_2(\gamma-\alpha)\varphi_2^2\psi_2 + a_3(\alpha-\beta)\varphi_3^2\psi_3 + a_4\varphi_4^2\psi_4,$$

wo

$\varphi_4 = t', \quad \psi_4 = 2p'^2+(\alpha+\beta+\gamma)p's'+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)p't'+\alpha\beta\gamma s't',$

$\varphi_1 = -(p'+\alpha s'+\alpha^2 t'), \quad \psi_1 = ps'+2(\beta+\gamma)p't'+\beta\gamma s't',$

φ_2 und φ_3 analog φ_1, $\quad \psi_2$ und ψ_3 analog ψ_1 sind.

Es wird nun nachgewiesen, dass die sämtlichen Curven vierter Ordnung, die man durch Veränderung der Constanten a erhalten kann, sechs Punkte (Fundamentalpunkte) gemein haben, und dass demgemäss die Fläche ξ vom Grade $4.4-6=10$, also die Fläche x vom Grade 20 ist.

Den sechs Fundamentalpunkten der Ebene entsprechen nun auf der Fläche x nicht einzelne Punkte, sondern Curven, und zwar dem Punkte $p=0$, $s=0$ entspricht die Raumcurve vierter Ordnung, in welcher das gegebene Ellipsoid von dem imaginären Kegel $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=0$ geschnitten wird. Dem Punkte $p=0$, $s=\infty$ entspricht der Schnitt des gegebenen Ellipsoids mit der unendlich entfernten Ebene, welcher Doppelcurve von F_{20} ist. Dem Fundamentalpunkte $s=0$, $p=\infty$ entspricht der unendlich entfernte Kegelkreis. Dem Fundamentalpunkte $p=\alpha^2$, $s=-2\alpha$ entspricht die Ellipse

$$y^2\,\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^2}+z^2\,\frac{\gamma+\alpha}{(\gamma-\alpha)^2}=1$$

in der Hauptebene $x=0$. Den beiden noch übrigen Fundamentalpunkten entsprechen die analogen Ellipsen in den beiden andern Hauptebenen. Nach diesen Betrachtungen wendet sich der Herr Verfasser zu der Feststellung der vollständigen Schnitte der Fläche mit den Hauptebenen und mit der unendlich entfernten Ebene, sowie der dreifachen Curve 16[ter] Ordnung, welche auf der Fläche liegt, und wird dabei noch zu manchen interessanten Resultaten geführt, die hier nicht einzeln aufgeführt werden können. Endlich werden noch andere Curven der Fläche F_{20} untersucht.

V.

A. v. Braunmühl. Notiz über geodätische Linien auf Flächen zweiten Grades, die sich durch elliptische Functionen darstellen lassen. Klein Ann. XXVI. 151-153.

Wenn die sechs Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung eine Involution bilden, dann und nur dann lässt sich, wie bekannt ist, das Integral durch eine Transformation zweiten Grades auf die Summe zweier elliptischen Integrale erster Gattung zurückführen. Da nun die Kürzesten auf Flächen zweiter Ordnung durch hyperelliptische Integrale erster Ordnung dargestellt werden können, welche von zwei Parametern abhängen, so muss es unter ihnen, und zwar ausser den durch die Nabelpunkte gelegten, noch solche geben, welche sich durch elliptische Functionen darstellen lassen. Mit diesen speciellen Kürzesten beschäftigt sich die vorliegende Note.

Die Resultate sind in der Hauptsache die folgenden. Berührt eine Kürzeste eine Krümmungslinie, so berührt eine zweite Kürzeste dieselbe Krümmungslinie. Ist die eine durch elliptische Functionen darstellbar, so ist es auch die andere.

Es giebt auf einem Ellipsoid oder zweischaligen Hyperboloid zwei Arten Kürzester; die einen berühren die Krümmungslinien des einen Systems, die anderen die des anderen. Jeder dieser Arten entsprechen 15 Fälle der verlangten Art, die sich indes, wegen der Grenzen, innerhalb deren der Parameter liegen muss, auf vier reduciren. Auf jeder dieser Flächen giebt es, je nach dem Axenverhältnis, fünf oder sieben Scharen Kürzester der verlangten Art; dem einen System von Krümmungslinien entspricht eine Schar mehr als dem andern. Ist beim Ellipsoid die mittlere Halbaxe die mittlere Proportionale der beiden andern, so lassen sich die durch die Nabelpunkte gelegten Kürzesten durch elliptische Integrale erster Gattung ausdrücken, während sie im allgemeinen auf Integrale dritter Gattung führen. Aehnlich ist es beim zweischaligen Hyperboloid. Auf dem einschaligen Hyperboloid treten noch Kürzeste auf, welche keine Krümmungslinie berühren. Es giebt 11 oder 13 Scharen der verlangten Art. Wenn zwischen den Halbaxen die Gleichung besteht $\alpha\beta = (\alpha - \beta)\gamma$

so fällt eine dieser Scharen mit den Erzeugenden zusammen. Sechs Punkte auf einer Geraden lassen sich wesentlich in vier Gruppen von je drei Paaren ordnen, die so liegen, dass eine Involution stattfinden kann, aber nicht stattzufinden braucht. Wenn zwei, drei oder alle vier dieser Gruppen zugleich involutorisch sind, was Bedingungen zwischen den Halbaxen der Fläche zur Folge hat, so vereinigen sich zwei, drei oder vier Systeme derselben Art. Bestehen z. B. beim Ellipsoid die vier Involutionen gleichzeitig, so ist das Axenverhältnis

$$\sqrt{3}:\sqrt{2}:\sqrt{1}.$$

A.

G. Loria. Ueber einen von Steiner entdeckten Satz und einige verwandte Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Schlömilch Z. XXX. 291-300.

Der Satz von Steiner wurde in Crelle J. XXXI. 90 (Ges. Werke II. 357) veröffentlicht und lautet: „Wird eine gegebene Fläche F zweiter Ordnung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem XYZ bezogen, dessen Anfangspunkt A beliebig liegt, so entstehen in jeder Axe X, Y, Z zwei Abschnitte, von A bis zu den Schnittpunkten mit F genommen, die beziehlich durch x und x_1, y und y_1, z und z_1 bezeichnet werden sollen, und ferner drei Abschnitte oder Sehnen zwischen den Schnittpunkten, die α, β, γ heissen mögen. Wird das rechtwinklige Coordinatensystem um den nämlichen festen Anfangspunkt A auf beliebige Art herumbewegt, so bleibt der Ausdruck

$$\frac{\alpha^2}{x^2x_1^2}+\frac{\beta^2}{y^2y_1^2}+\frac{\gamma^2}{z^2z_1^2}$$

constant."

Herr Loria führt diese Summe in die Form über:

$$(1)\qquad \left(\frac{\Delta_1 f}{f}\right)^2-2\,\frac{\Delta_2 f}{f},$$

wo $f(x,y,z)=0$ die Gleichung der Fläche, $\Delta_1 f$ der erste, $\Delta_2 f$ der zweite Differentialparameter von f ist. Hierdurch ist der S

bewiesen, wenn man noch den Hülfssatz benutzt, dass f, Δ, f, Δ, f bei einer Coordinatentransformation ungeändert bleiben. Der Ort der Punkte, für welche der Ausdruck (.) constant bleibt, ist eine Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt. Die weiteren Betrachtungen zeigen, wie der Steiner'sche Satz verallgemeinert werden kann, ebenso auch diejenigen Eigenschaften der conjugirten Durchmesser, die von Livet und Binet entdeckt sind. Lp.

A. Bieler. Körper zwischen zwei Rotationsellipsoiden. Hoppe Arch. (2) II. 439-442.

Es werden zu Grunde gelegt zwei Ellipsen mit den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0.$$

Dieselben sollen zuerst beide um die x-Axe rotiren, alsdann jede um ihre kleine Axe. In beiden Fällen werden die verschiedenen zwischen beiden Rotationsflächen liegenden Körper berechnet. A.

A. Thaer. Zur Gleichung von Kegel und Cylinder. Schlömilch Z. XXX. 59-64.

Es werden in verschiedenen Formen Bedingungen zwischen den Coefficienten zweier in x, y, z linearen Gleichungen aufgestellt, in Folge deren der geometrische Ort der Geraden, deren Punkte beiden Gleichungen genügen, ein Kegel resp. ein Cylinder ist.

A.

R. Lachlan. The equation of a small circle on a sphere. Mess. XIV 145-152.

Wenn die Sinus der Lote zu den Seiten eines Fundamentaldreiecks die Coordinaten sind, so stellt die lineare Gleichung $ax+by+cz=d$ einen kleinen Kreis dar, und wenn x, y, z die

Coordinaten irgend eines Punktes P sind, dessen Winkelabstand vom Pole dieses Kreises gleich φ ist, so hat man

$$ax+by+cz=d\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varrho},$$

wo ϱ der Radius des Kreises ist. Es folgen die Ausdrücke für die Coordinaten des Pols und Beweise bekannter Sätze.

Glr. (Lp.)

G. Loria. Nuovi studi sulla geometria della sfera.

Torino Atti XX 505-526.

Diese Arbeit, welche etwa eine Fortsetzung der „Ricerche intorno alla geometria della sfera“ (Mem. (2) XXXVI; F. d. M. XVI. 1884. 710) desselben Verfassers bildet, enthält elegante analytische Beweise (mit Hülfe ganz allgemeiner Coordinaten einer auf fünf beliebige Kugeln bezogenen Kugel) von teils bekannten und teils neuen, auf die Geometrie der Kugeln bezüglichen Sätzen. So findet man die Coordinaten der Orthogonalkugel zu vier gegebenen Kugeln, den Radius der Orthogonalkugel zu einem linearen Kugelncomplexe etc.; einige bekannte Sätze über die Kugeln, welche gegebene Kugeln unter gegebenen Winkeln oder unter gleichen Winkeln schneiden, werden auf eine neue Weise abgeleitet. Zwischen zwei beliebigen Gruppen von fünf oder mehr Kugeln bestehen Relationen, von denen wir nur die folgende anführen wollen: Sind $R_1, \ldots, R_5$ und $S_1, \ldots, S_5$ die Radien zweier Gruppen von fünf Kugeln, t_{ik} die Länge der gemeinschaftlichen äusseren (oder auch [illegible]) Tangente der Kugeln mit den Radien R_i, S_k, so hat [illegible]

$$\begin{vmatrix} t_{ik}^2 & R_i \\ S_k & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Auch der folgende Satz scheint bemerken[illegible] liebige Kugeln gegeben sind, so ist das Pr[illegible] desjenigen Tetraeders, wel[illegible] vier unter ihnen besitzt, un[illegible] fünften und der Orthogonal[illegible] beliebigen Permutation der g[illegible]

Nur der besondere Fall, bei welchem die fünf Kugeln sich auf Punkte reduciren, war vordem bekannt (vgl. Schumann in Schlömilch Z. XXVII. 368, F. d. M. XIV. 1882. 531.). Die Note schliesst mit einigen Bemerkungen inbetreff der Transformationen mittels reciproker Radien. Se. (Lp.)

R. A. Roberts, J. P. Johnstone, B. Chakravarti. Solution of question 7898. Ed. Times XLIII. 37-38.

Ein veränderlicher Kreiscylinder ist einem festen Tetraeder umgeschrieben. Der Ort einer Geraden durch einen festen Punkt parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist ein kubischer Kegel, der die sechs Parallelen durch den Punkt zu den Kanten des Tetraeders als Erzeugende besitzt. Lp.

J. S. Vaněček. Sur les réseaux de surfaces du second ordre. Liège Mém. (2) XI. 8 S.

Untersuchungen über die Bündel von Flächen zweiter Ordnung, eine Erweiterung der früheren Arbeit des Verfassers über die Büschel. (Liège Mém. (2) X. 1883; F. d. M. XV. 557.) Mn. (Lp.)

G. A. Gibson. Gilbert's method of treating tangents to confocal conicoids. Edinb. M. S. Proc. III. 61-70.

Ein Bericht über Gilbert's Artikel in den Nouv. Ann. 1867, mit Erweiterungen auf Paraboloide und Kegelschnitte. Gbs. (Lp.)

A. Cayley, W. J. C. Sharp. Solution of question 7804. Ed. Times XLII. 85-86.

Es seien a, b, c, f, g, h die sechs Coordinaten einer Erzeugenden der Fläche $x^2+y^2+z^2+w^2=0$; dann ist entweder $a=f$, $b=g$, $c=h$ oder $a=-f$, $b=-g$, $c=-h$, je nach-

dem die Gerade der einen oder der andern Schar der Erzeugenden angehört. Trifft eine Ebene den Durchschnitt der beiden Flächen $Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2=0$ und $A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'w^2=0$ in vier Punkten, und sind $a, \dots, h$ und $a', \dots, h'$ die Coordinaten zweier Geraden durch die Punkte 1, 2 und 3, 4, so hat man $af'+a'f=0$, $bg'+b'g=0$, $ch'+c'h=0$. Die Lösung des Herrn Sharp erfolgt durch Anwendung der einfachsten Mittel der analytischen Geometrie. (Vgl. die Lösung von Herrn Cayley in Klein Ann. XXV. 152; Referat in diesem Bande S. 464.)

Lp.

J. Larmor. On the extension of Ivory's and Jacobi's distance-correspondences for quadric surfaces. Lond. M. S. Proc. XVI. 189-200.

Ueber die Theoreme von Ivory und Jacobi, um welche es sich handelt, findet man zusammenhängende Darstellungen in den nachgelassenen Arbeiten von Jacobi und Joachimsthal, mitgeteilt von Herrn O. Hermes, und in einer Arbeit von Herrn O. Hermes selbst, (Borchardt J. LXXIII. 179-206, 207-209, 209-273. Ref. F. d. M. III. 1871. 376-381). In neuerer Zeit hat Herr Darboux ebenfalls eine eingehende Untersuchung über diesen Gegenstand veröffentlicht (Bord. Mém. VIII. 197-280. Ref. F. d. M. IV. 1872. 420). Auch die Verallgemeinerung des Theorems, bei welcher statt der Flächen zweiter Ordnung Darboux'sche Cykliden auftreten, ist bereits von Herrn Darboux behandelt, wie dies dem Herrn Verfasser erst beim Druck seiner Arbeit bekannt geworden ist.

Die vorliegende Arbeit unterscheidet sich von den früheren Bearbeitungen des Problems durch die mehr algebraische Behandlungsweise und durch eine Anzahl neuer specieller Resultate und Beziehungen.

A.

F. Meyer. Ueber das einer Fläche zweiter Ordnung ein- und zugleich einer kubischen Raumcu[rve] beschriebene Tetraeder. Böklen Mitt. II.

Es giebt im allgemeinen immer ein und nur ein eigentliches, einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung ein- und zugleich einer eigentlichen Raumcurve dritter Klasse umbeschriebenes Tetraeder, wo umbeschrieben heisst, dass die vier Ebenen des Tetraeders Schmiegungsebenen der kubischen Raumcurve sein sollen. Giebt es aber im besonderen mehr als ein einer solchen Fläche einbeschriebenes und einer solchen Raumcurve umbeschriebenes Tetraeder, so giebt es zugleich eine zweistufige, lineare Schar solcher Tetraeder. Dieser Satz und einige unmittelbar damit zusammenhängende Sätze werden analytisch bewiesen.

Scht.

G. Loria. Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all' infinito. Nap. Rend. XXIV. 298-309.

Einige von Schröter (Klein Ann. XXV, vergl. diesen Band S. 651) aufgestellte, sich auf die kubische Parabel beziehende Sätze werden in dieser Note analytisch bewiesen, und manche neuen Eigenschaften jener Curve durch dieselbe Methode abgeleitet.

Von der bekannten Parameterdarstellung

$$x = \lambda^3, \quad y = \lambda^2, \quad z = \lambda$$

ausgehend, erinnert der Verfasser an die Ausdrücke der laufenden Coordinaten der Tangente und an die Gleichung der Schmiegungsebene. Sind nun L, M zwei Punkte der Curve, zu denen die Parameter λ bezw. μ gehören, so bestimmen sich leicht die Coordinaten des Punktes L', in dem die Tangente in L die Schmiegungsebene in M, sowie die des Punktes M', in dem die Tangente in M die Schmiegungsebene in L schneidet. Dadurch erhält man den Ausdruck des Inhalts des Tetraeders $LML'M'$ (welches als „das zur Sehne LM gehörende Schmiegungstetraeder" bezeichnet wird), nämlich:

$$V = \frac{\Omega}{54}(\lambda-\mu)^6,$$

wo Ω eine bekannte Constante ist. Es folgt daraus der wichtige Satz:

Zwischen den sechsten Wurzeln der Inhalte der Schmiegungstetraeder, die verschiedenen Sehnen einer kubischen Parabel angehören, bestehen dieselben Relationen, welche zwischen verschiedenen Strecken einer Geraden stattfinden.

Die Abhandlung schliesst mit der Aufstellung einiger eleganter geometrischer Sätze, die teils als Folge des obigen Hauptsatzes anzusehen sind, teils aber sich auf verwandte Gegenstände beziehen. Vi.

G. Pittarelli. Le curve di 3° ordine e di 4ª classe. Nap. Rend. XXIV. 216-233.

Diese Abhandlung zerfällt in zwei Teile.

Der erste Teil ist der Anwendung der allgemeinen Parameterdarstellung der Curven dritter Ordnung durch elliptische Functionen für den besonderen Fall der rationalen Curven gewidmet. Hier ist die Untersuchung gesondert zu führen, jenachdem man es mit einem isolirten Punkte oder mit einem Doppelpunkte zu thun hat. Im ersten Falle arten die elliptischen Functionen in Kreisfunctionen, im zweiten in Hyperbelfunctionen aus. Im zweiten Teil wird das ausgeartete elliptische Integral durch Anwendung der Parameterdarstellung

$$x_1:x_2:x_3 = a_1^3:b_1^3:c_1^3$$

transformirt und dann unter die endliche Form $\log \frac{p}{q}$ gesetzt. Es folgen weitere Umformungen desselben Integrales, die zur Theorie der typischen Formen eine enge Beziehung haben.

Ueber eine frühere, denselben Gegenstand betreffende Abhandlung des Verfassers siehe oben S. 708. Vi.

A. Cayley. On the twisted cubics upon a quadric surface. Mess. XIV. 129-134.

Die kubischen Raumcurven auf einer gegebenen Oberfläche

zweiten Grades zerfallen in zwei Arten, nämlich solche, welche jede Erzeugende der ersten Schar in zwei Punkten und jede der zweiten in einem Punkte schneiden, und solche, die umgekehrt jede Gerade der ersten Schar in einem Punkte, jede der zweiten in zwei schneiden. Zwei kubische Raumcurven derselben Art schneiden sich in vier Punkten, zwei von verschiedenen Arten dagegen in fünf und bilden den vollständigen Durchschnitt einer Oberfläche zweiten Grades und einer dritten Grades, während die fünf Punkte Berührungspunkte beider Flächen sind.

Glr. (Lp.)

F. Meyer. Wann besitzt eine kubische Parabel eine Directrix? Schlömilch Z. XXX. 345-349.

Referat siehe F. d. M. XVI. 1884. Abschn. IX. Cap. 3 p. 700.

C. le Paige. Ueber die Hesse'sche Fläche der Flächen dritter Ordnung. Wien. Ber. XCI. 1-6.

Ueber jeder Seitenfläche eines einer Fläche dritter Ordnung einbeschriebenen, fundamentalen Pentaeders kann man acht Tetraeder construiren, von denen jedes mit jener Seitenfläche zusammen ein der Hesse'schen Fläche eingeschriebenes Pentaeder darstellt. Dieser vom Verfasser gefundene, hier analytisch bewiesene Satz führt ihn auch zu einer interessanten Erzeugung der Hesse'schen Fläche.

Scht.

A. de Saint-Germain. Sur certaines surfaces du troisième ordre qui ont une infinité d'ombilics. C. R. CI. 1240-1248.

Eine Fläche dritter Ordnung kann unendlich viele auf einer Linie liegende Nabelpunkte besitzen. Diese Linie, Nabellinie, kann eine Gerade oder eine Parabel sein. Im ersteren Fall kann die Gleichung der Fläche geschrieben werden

$$y^3 + xF = 0,$$

wo F eine ganze rationale Function zweiten Grades von x, y, z bedeutet. Die Nabellinie ist die z-Axe.

Im zweiten Falle seien $x = 0$, $y^2 = 2mz$ die Gleichungen der Nabellinie in rechtwinkligen Coordinaten. Dann hat die Gleichung der Fläche die Form

$$(2z+m)(y^2-2mz)+mx^2+\lambda x^2 = 0.$$

Dieselbe ist noch mit dem beliebigen Parameter λ behaftet. Es giebt demnach einen Büschel von Flächen dritter Ordnung, welche dieselbe Parabel zur Nabellinie haben. In der Note finden sich noch einige Angaben über diese letztere Gattung von Flächen.

A.

D. Andere specielle Raumgebilde.

PABST. Die Cono-cunei. Ein Beitrag zur Lehre von den geradlinigen Flächen. Hoppe Arch. (2) II. 281-319, 337-382.

Die hier behandelten Flächen bilden einen besonderen Fall derjenigen geradlinigen Flächen vom Grade $2n$, bei welchen die erzeugende Gerade zwei gegebene windschiefe Gerade und eine gegebene Curve vom Grade n schneidet.

Gegeben sei eine Ebene, die Director-Ebene, eine auf dieser Ebene senkrecht stehende Gerade, und eine ebene Curve, deren Ebene auf der Director-Ebene senkrecht steht. Die erzeugende Gerade bewegt sich längs dieser Curve so hin, dass sie stets der Director-Ebene parallel bleibt (also die Gerade im Unendlichen auf dieser Ebene schneidet) und durch die gegebene feste Gerade geht. Es wird nun der besondere Fall angenommen, dass die ebene Curve, Leitlinie genannt, ein Kegelschnitt sei, und dass die feste Gerade, durch welche alle erzeugenden Geraden gehen, singuläre Kante genannt, einer Axe des Leitkegelschnitts parallel sei. Die entstehenden Flächen vierten Grades werden Cono-cunei genannt; und zwar, je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, elliptischer, parabolischer, hyperbolischer Cono-cuneus. Weiterhin werden noch gerade und

schiefe Cono-cunei unterschieden; ist nämlich die Ebene, welche durch die singuläre Kante und durch die entsprechende Axe des Leitkegelschnitts geht, zur Ebene des Leitkegelschnitts senkrecht, so haben wir den geraden, sonst den schiefen Cono-cuneus. Von den letzteren werden die noch näher untersucht, bei denen die Projection der singulären Kante auf die Ebene des Leitkegelschnitts mit einer Scheiteltangente des Leitkegelschnitts zusammenfällt; diese heissen Scheitel-Cono-cunei. Die Cono-cunei werden nun in Folge weiterer geometrischer Betrachtung noch mehr klassificirt, so dass endlich acht verschiedene Arten der Untersuchung vorliegen. Nach einer voraufgehenden Behandlung allgemeinerer Flächen wird dann zur analytischen Untersuchung der Cono-cunei übergegangen. Mz.

R. A. Roberts. On a locus connected with a certain surface. Mess. XIV. 132-134.

Die Oberfläche hat in Cartesischen Coordinaten die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{1}{2}}=1,$$

ist also eine Steiner'sche Römerfläche, welche eine singuläre Tangentialebene im Unendlichen, die drei andern rechtwinklig zu einander hat. Es wird gezeigt, dass von irgend einem Punkte des Kegels

$$bcyz+caxz+abxy=0$$

drei zu einander senkrechte Tangentialebenen an die Oberfläche in einer unendlichen Zahl von Arten gelegt werden können.

Glr. (Lp.)

F. Schur. Sur la surface tétraédrale symétrique du quatrième ordre. Liège Mém (2) XI. 7 p.

Verschiedene Aufgaben über 48 auf dieser Oberfläche liegende Geraden; vollständige Lösung der Aufgabe: Wie oft trifft

es zu, dass diese Geraden in Gruppen von 8 (oder von 12) einer Oberfläche zweiter (oder dritter) Ordnung angehören?

Mn. (Lp.)

F. Hofmann. Reduction der Gleichung des Tetraedroids auf die Form $\sqrt{x\xi}+\sqrt{y\eta}+\sqrt{z\zeta}=0$. Kronecker J. XCVIII. 264.

Durchführung einer von Cayley für die allgemeine Kummer'sche Fläche angegebenen Transformation (F. d. M. XV. 1883. 708).

Lp.

A. Legoux. Sur une nouvelle propriété d'un système triple des surfaces quartiques homofocales, comprenant comme cas particulier la surface des ondes. Nouv. Ann. (3) IV. 393-405.

Die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{x^2}{r^2+\varrho-a^2}+\frac{y^2}{r^2+\varrho-b^2}+\frac{z^2}{r^2+\varrho-c^2}=1,$$

in welcher $r^2=x^2+y^2+z^2$ ist und ϱ einen beliebigen Parameter bedeutet, stellt ein System von Flächen vierter Ordnung dar. Durch einen Punkt des Raumes gehen drei dieser Flächen, denen die Parameter $\varrho<\varrho_1<\varrho_2$ entsprechen mögen. Der kleinste dieser Werte, ϱ, ist kleiner als die kleinste der Constanten a^2, b^2, c^2, und ihm entspricht eine Wellenfläche im eigentlichen Sinne, abgeleitet von dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2-\varrho}+\frac{y^2}{b^2-\varrho}+\frac{z^2}{c^2-\varrho}\text{ [illegible]}$$

Die Enveloppe des Systems ist eine abwickelbare [illegible] Ordnung und vierter Klasse, dieselbe, wie für das [illegible] confocalen Flächen zweiter Ordnung

$$\frac{x^2}{\lambda-a^2}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{[illegible]}=1.$$

(Das wäre auch noch der Fall, wen[illegible] andere Function von x, y, z stände.)

Die Hauptschnitte der Flächen 1 sind zusammengesetzt aus Kreisen, deren Mittelpunkte im Anfangspunkt liegen, und aus confocalen Kegelschnitten.

Drückt man x, y, z durch $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ aus, und lässt man ϱ constant, so hat man die Coordinaten eines auf der Wellenfläche ϱ variirenden Punktes durch die Parameter ϱ_1 und ϱ_2 dargestellt. Diese Darstellung der Wellenfläche, welche ganz analog der eines Ellipsoids durch Krümmungsparameter ist, ist ein sehr bequemes Hülfsmittel zur Betrachtung der Curven auf der Wellenfläche, und hiermit beschäftigt sich der Herr Verfasser.

Es ergeben sich, wenn man zur Abkürzung setzt

$$\lambda = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\varrho-\varrho_1-\varrho_2}{2},$$

$$\mu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\varrho_1-\varrho-\varrho_2}{2},$$

$$\nu = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\varrho_2-\varrho-\varrho_1}{2},$$

die Formeln

$$x^2 = \frac{(\lambda-a^2)(\mu-a^2)(\nu-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(\lambda-b^2)(\mu-b^2)(\nu-b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(\lambda-c^2)(\mu-c^2)(\nu-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Setzt man endlich noch

$$(\lambda-u)(\mu-u)(\nu-u) = -\varphi(u),$$

$$(u-a^2)(u-b^2)(u-c^2) = f(u),$$

so hat man

$$x^2 = -\frac{\varphi(a^2)}{f'(a^2)}, \quad y^2 = -\frac{\varphi(b^2)}{f'(b^2)}, \quad z^2 = -\frac{\varphi(c^2)}{f'(c^2)}.$$

Für das räumliche Linienelement ds erhält man die Formel

$$16\,ds^2 = \frac{\varphi'(\lambda)}{f(\lambda)}(d\varrho-d\varrho_1-d\varrho_2)^2 + \frac{\varphi'(\mu)}{f(\mu)}(d\varrho_1-d\varrho_2-d\varrho)^2$$

$$+ \frac{\varphi'(\nu)}{f(\nu)}(d\varrho_2-d\varrho-d\varrho_1)^2.$$

Hieraus lässt sich das Linienelement auf jeder der drei Flächen ϱ = const., ϱ_1 = const. oder ϱ_2 = const. leicht ableiten. Man erkennt, dass die Flächen nicht orthogonal sind.

Hiermit ist die Grundlage für die weiteren Untersuchungen gewonnen, die sich nun in der That sehr einfach vollziehen.

Setzt man $\varrho_1 = \varrho_2 = C$, so erhält man die Enveloppe der Flächen ϱ_1 und ϱ_2.

Die Gratlinie der dem System umschriebenen abwickelbaren Focalen erhält man, wenn man setzt $\varrho = \varrho_1 = \varrho_2$ u. s. w.

Zuletzt werden für eine der Flächen die Fundamentalgrössen der zweiten Ordnung entwickelt, und alsdann die Differentialgleichungen der Krümmungslinien und der asymptotischen Linien aufgestellt, sowie die Hauptkrümmungsradien berechnet.

Den Schluss der ganzen Arbeit bildet der Hinweis auf eine Verallgemeinerung gewisser Resultate, soweit sie descriptive Eigenschaften betreffen, durch Uebertragung auf das Cayley'sche Tetraedroid unter Anwendung einer homographischen Transformation, und weiter auf die Kummer'sche Fläche, welche nach J. Plücker als Singularitätenfläche eines Complexes zweiten Grades betrachtet werden kann, und welche die Wellenfläche und überhaupt das Tetraedroid, wie bekannt, als Special-Fall enthält. A.

C. Segre. Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de Kummer. Kronecker J. XCVIII. 301-303.

Auszug eines Briefes an Herrn Th. Reye, in welchem bezüglich der Arbeit des letzteren „Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven" (Kronecker J. XCVII. 242-262, Ref. F. d. M. XVI. 1884. 714) bemerkt wird, dass ein darin enthaltener Satz, für welchen Herr Reye einen ziemlich langen und verwickelten analytischen Beweis gegeben hatte, sich sehr einfach synthetisch beweisen lässt. A.

W. R. Roberts, W. J. C. Sharp. Solution of question 6428. Ed Times XLIII. 23-24.

Die Tangenten der Schnittcurve der beiden Flächen

$$U \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2, \quad V \equiv a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2$$

bilden eine abwickelbare Oberfläche, deren Gleichung in die Form gesetzt werden kann:

$$x\{(da')(bc')(aV-a'U)\}^{\frac{1}{3}} + y\{(db')(ca')(bV-b'U)\}^{\frac{1}{3}} + z\{(dc')(ab')(cV-c'U)\}^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Lp

A. Brambilla. Ricerche analitiche intorno alle curve gobbe razionali del 4° ordine. Ven. Ist. Atti (6) III 1471-1490.

Die von den Doppelsehnen der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species C_2^4 gebildete Regelschar und die von ihren äquianharmonischen Ebenen umhüllte Fläche zweiter Ordnung bestimmen einen F^2-Büschel. Letzterer specialisirt sich für verschiedene Unterarten der C_2^4; so zerfällt z. B. seine Grundcurve bei der C_2^4 mit einer stationären Tangente in eine Raumcurve dritter Ordnung und einen Strahl, bei der C_2^4 mit zwei stationären Tangenten in vier Strahlen und bei der C_2^4 mit einem Doppelpunkte in zwei Kegelschnitte. Js.

A. Brambilla. Sopra alcuni casi particolari della curva gobba razionale del quarto ordine. Nap. Rend XXIV 279-298.

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit der Untersuchung der Knotenlinie der abwickelbaren Schmiegungsfläche einer Raumcurve vierter Ordnung. Es werden aber nur einige besondere Fälle einer solchen Curve ins Auge gefasst, nämlich die folgenden:

a) Raumcurve vierter Ordnung mit zwei Schmiegungslinien;

b) Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte, oder harmonische Curve;

c) Raumcurve vierter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte, oder harmonisch-äquianharmonische Curve;

d) Aequianharmonische Curve. Vi.

H. M. Jeffery. On the foci of spherical curves of the fourth order. Quart. J. XXI 130-141

Diese Arbeit ist eine abermalige Fortführung einer langen Reihe von Untersuchungen des Herrn Verfassers, welche zu keiner weiteren Bemerkung Veranlassung geben, da die Natur des behandelten Problems und die angewandten Methoden bereits in früheren Referaten besprochen sind. A.

H. M. Jeffery. On Sphero-Cyclides. Lond. M. S. Proc. XVI. 109-142.

Eine eingehende Discussion der Sphäro-Cykliden, d. h. der Durchschnitte einer Kugel mit Cykliden oder Flächen zweiter Ordnung. A.

R. A. Roberts. On unicursal curves. Lond. M. S. Proc. XVII. 25-79.

Die Untersuchungen des Verfassers über rationale Curven einfacher und doppelter Krümmung sind bereits mehrfach besprochen (F. d. M. XV. 1883. 717, XVI. 1884. [illegible]

Vorliegende Abhandlung giebt eine weiter[illegible] reicher einzelner Eigenschaften. Der Verfasser [illegible] gende Inhaltsangabe:

§§ 1-4 beziehen sich auf gewisse Bedingungen, [illegible] auf ebenen Curven verbinden.

§§ 5-8 betreffen Kegelschnitt[illegible] Flächen zw[illegible] welche die Curve n^{ter} Ordnung [illegible] berühr[illegible]

§§ 9-19 enthalten vermischt[illegible] über [illegible] Raumcurve vierter Ordnung.

§§ 20-42 enthalten Eigenschaften der Sehnen dieser Curve.

§§ 43-64 beziehen sich auf Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung, welche Sehnen von Curven dritter oder vierter Ordnung harmonisch teilen.

§§ 65-68 enthalten Eigenschaften gewisser Raumcurven fünfter und sechster Ordnung.

§§ 69-72 beziehen sich auf gewisse rationale Curven, welche geodätische Linien auf einer Fläche zweiter Ordnung sind.

R. M.

F. Meyer. Ueber die elliptische Curve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen. Klein Ann. XXVI. 154-156.

Herr F. Klein war in seiner Arbeit „Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe" (Leipz. Ber., F. d. M. XVI. 1884. 397) auf das Gleichungssystem zurückgekommen, welches Herr Bianchi (Math. Ann. XVII. 253) für die elliptische Normalcurve fünfter Ordnung aufgestellt hatte. Der Verfasser knüpft hieran an und leitet die Gleichung des einzigen Tetraeders ab, das einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung ein- und einer eigentlichen Raumcurve dritter Ordnung umbeschrieben ist. Es ergiebt sich dann, dass gewisse fünf Flächenräume zweiter Ordnung eine Curve fünfter Ordnung gemein haben, deren Gleichungen für specielle Werte in die Bianchi'schen Gleichungen übergehen.

Scht.

H. A. Schwarz. Ueber ein die Flächen kleinsten Inhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. Helsingfors. 44 S.

Wie Herr Weierstrass nachgewiesen hat, ist bei den Problemen der Variationsrechnung überhaupt die Untersuchung der zweiten Variation allein im allgemeinen nicht ausreichend, um mit Sicherheit auf das Eintreten eines Maximums oder Minimums schliessen zu lassen. Der Herr Verfasser setzt ein Beweisver-

fahren auseinander, mittels dessen sich der Nachweis führen lässt, dass ein vorliegendes (gewissen Bedingungen genügendes) Minimalflächenstück (unter Minimalfläche eine analytische Fläche verstanden, welche die Eigenschaft besitzt, dass in jedem Punkte derselben die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind,) wirklich kleineren Flächeninhalt besitzt, als jedes andere aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen bestehende, von derselben Randlinie begrenzte, demselben unendlich benachbarte Flächenstück. Hierbei sind mehrere (drei) Fälle zu unterscheiden; um nachzuweisen, dass damit die Gesamtheit aller Fälle erschöpft ist, muss der Verfasser auf eine ausführliche Untersuchung derjenigen reellen Functionen zweier Argumente überhaupt eingehen, welche der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + p(\xi, \eta) u = 0$ genügen, wo $p(\xi, \eta)$ eine gegebene Function ist, welche in dem betrachteten Bereiche nur positive Werthe annimmt.

T.

O. Bonnet. Sur la surface réglée minima. Darb. Bull. (2) IX. 14-15.

Die Note enthält einen einfachen geometrischen Beweis des bekannten Satzes, dass die einzige geradlinige Minimalfläche die gewöhnliche Schraubenfläche ist.

Der Gedankengang ist etwa folgender: Die beiden Haupttangenten in einem beliebigen Punkte einer Minimalfläche schneiden sich rechtwinklig. Enthält die Minimalfläche eine Gerade, so ist diese für jeden ihrer Punkte eine Haupttangente. Der Ort der zweiten Haupttangenten längs dieser Geraden, welcher im allgemeinen, wenn die Fläche nicht Minimalfläche wäre, ein Hyperboloid wäre, ist also ein hyperbolisches Paraboloid, welches die Minimalfläche längs dieser Geraden osculirt, so dass drei benachbarte Erzeugende der Minimalfläche auf das Paraboloid fallen. Alle Geraden einer Schar eines hyperbolischen Paraboloides schneiden eine gewisse Gerade der andern Schar rechtwinklig.

also gilt dasselbe von drei benachbarten Erzeugenden der Minimalfläche. Daraus folgt, dass die kürzesten Abstände zwischen drei benachbarten Erzeugenden in dieselbe Gerade fallen, oder da diese Gerade durch zwei Erzeugende bestimmt ist, dass alle kürzesten Abstände benachbarter und auch beliebiger Erzeugender in eine Gerade fallen, oder dass die Strictionslinie der geradlinigen Minimalfläche eine Gerade ist; diese wird von allen Generatrices senkrecht geschnitten. Schneidet man nun die Minimalfläche durch einen Cylinder, dessen Axe jene Strictionslinie ist, so steht die Durchschnittslinie auf allen Erzeugenden der Minimalfläche senkrecht, ist also asymptotische Linie derselben. Die Schmiegungsebene dieser asymptotischen Linie ist Tangentialebene der Minimalfläche, steht also normal auf dem Cylinder. Deshalb ist diese asymptotische Linie der Minimalfläche Kürzeste der Cylinderfläche, also eine Schraubenlinie. Hiermit ist die Behauptung erwiesen. A.

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

J. Weingarten. Note über die Brennlinie eines unendlich dünnen Strahlenbündels. Kronecker J. XCVIII. 281-283.

Während in den Arbeiten von Hamilton, Ch. Sturm und Herrn Kummer von den Brennlinien unendlich dünner Strahlenbündel gesagt ist, dass sie rechtwinklig auf dem Hauptstrahl stehen, hat Herr Matthiessen (Acta Math. Bd. IV. 179 und Münch. Ber. 1883 I. Man vergl. auch Schlömilch Z. XXIX. 96-100, Ref. F. d. M. XVI. 1884. 722. Anm. d. Ref.) auf die Existenz von schief gerichteten Brennstrahlen bei optischen Strahlenbündeln aufmerksam gemacht, und Einwürfe gegen die oben genannten Theoreme erhoben.

Der Herr Verfasser der vorliegenden Note führt diesen

scheinbaren Widerspruch auf eine verschiedene Definition der Brennlinie zurück. Will man nämlich unter Brennlinie eines unendlich dünnen Strahlenbündels eine Gerade verstehen, welche von jedem Strahl des Bündels im geometrischen Sinne geschnitten wird, so existiren im allgemeinen überhaupt keine Brennlinien, sondern nur bei gewissen Bündeln. Legt man dagegen einer solchen Linie die Bedeutung einer Geraden bei, welche den mittleren Strahl des Bündels durchschneidet und an welcher jeder Strahl des Bündels mit einem kürzesten Abstande vorbeigeht, welcher verschwindend klein ist gegen die unendlich kleinen Dimensionen des Bündels, so besitzt jedes Bündel mit reellen Brennpunkten unbegrenzt viele Brennlinien.

Bezeichnet man als erste (resp. zweite) Focalebene eines Strahles diejenige Ebene, in welcher dieser Strahl selbst und der ihn im ersten resp. zweiten Brennpunkte schneidende enthalten ist, so ist jede den Strahl in dem ersten (resp. zweiten) Brennpunkte schneidende und in der zweiten (resp. ersten) Focalebene liegende Gerade eine Brennlinie.

Dieser, für jedes Bündel geltende Satz wird hier speciell für ein Bündel von Flächen-Normalen bewiesen. A.

R. d'Emilio. **Le superficie rigate di una congruenza lineare.** Ven. Ist. Atti (6) III. 1255-1275.

Nimmt man zu Coordinaten einer zu einer linearen Congruenz gehörigen Geraden die Abstände λ, μ zweier festen Punkte der Axen von den beiden Punkten, wo diese von der Geraden getroffen werden, so stellt eine Gleichung zwischen λ, μ eine Regelfläche der Congruenz dar. Der Verfasser betrachtet besonders die durch einige einfache Gleichungen dargestellten Regelflächen. Die Ergebnisse erscheinen nicht gerade neu und bedeutend. Sc. (Lp.)

R. d'Emilio. **Le superficie rigate di una congruenza lineare.** Ven. Ist. Atti (6) III. 1911-1915.

In dieser Fortsetzung der unter gleichem Titel erschienenen und soeben besprochenen Arbeit, beschäftigt sich der Verfasser insbesondere mit der in Cartesischen Coordinaten ausgedrückten Gleichung der Regelfläche, die einer linearen Congruenz angehört, deren Gleichung in den im vorangehenden Referate definirten Coordinaten λ, μ man kennt. Die Ergebnisse, zu denen der Verfasser gelangt, haben keine grosse Wichtigkeit, und die von ihm angewandten Methoden bieten nicht Bemerkenswertes.

La. (Lp.)

A. Porchiesi. Una rappresentazione del complesso lineare sullo spazio ordinario. Rom. Acc. L. M. (4) I. 610-621.

Es handelt sich um eine neue Abbildung eines linearen Complexes C von Geraden in dem Punktraume S. Der Verfasser stellt sich die Bedingung, dass den Ebenen von S in C quadratische Congruenzen entsprechen; bei der Abbildung, zu der er gelangt, haben diese letzteren fünf Strahlenbüschel gemeinsam, nämlich die von den Paaren auf einander folgender Seiten eines einfachen windschiefen Fünfecks bestimmten. Unter besonderer Benutzung von Resultaten des Herrn Caporali über die Abbildung der quadratischen Congruenzen von C auf den entsprechenden Ebenen von S gewinnt der Verfasser mehrere Eigenschaften seiner Abbildung, unter anderen die, dass man es durch eine collineare Transformation von S bewirken kann, dass jeder Punkt auf dem correspondirenden Strahle von C liegt. Es findet nämlich folgender Satz statt: Die ∞^1 Kegelschnitte, welche sich auf die fünf Schnittgeraden der nicht sich folgenden Seitenflächen eines einfachen windschiefen Fünfecks stützen, dessen Seiten zu C gehören, und welche in den verschiedenen Ebenen liegen, welche durch eine Gerade r von C gehen, schneiden diese letztere in einem festen Punkte P: dieser Punkt ist es, der bei der betrachteten Abbildung zu r zugeordnet ist.

Da die Methode des Verfassers durchaus synthetisch ist, so erlaubt sich der Referent hier, die der Abbildung entsprechenden analytischen Formeln zuzufügen. Wir nehmen für die Folgeflächen

des Grundfünfecks die Gleichungen

$$x_1 = 0, \ldots, x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

und bezeichnen durch x und p einen Punkt und eine Gerade von C, die sich entsprechen. Dann hat man als Gleichung des Complexes C:

$$p_{13} + p_{23} - p_{43} = 0,$$

und als Transformationsformeln:

$$y_1 = -p_{13}p_{14}, \qquad y_2 = p_{43}(p_{12} + p_{13}),$$
$$y_3 = p_{13}(p_{42} - p_{24}), \quad y_4 = p_{14}p_{43}.$$

Se. (Lp.)

G. Lazzeri. La rappresentazione dello spazio rigato sopra un piano connesso e sua applicazione allo studio dei connessi lineo-lineari. Ven. Ist. Atti (6) III. 247-268, 437-474.

Nach einer analytischen Untersuchung der Connexe (1, 1) von Punkten und Geraden, bezw. zweier Ebenen π, π' (ternäre Collineationen) und besonders ihrer linearen Systeme und der in diesen enthaltenen „singulären" Connexe beschäftigt sich der Verfasser mit einer neuen Abbildung des Raumes von Geraden. Diese Abbildung wird geometrisch auf folgende Art definirt. Es seien π, π' und π_1, π_2 vier beliebige Ebenen; man setze zwischen π und π_1 eine Collineation, zwischen π' und π_2 eine Reciprocität fest; ferner ordne man jeder Geraden r des Raumes das aus dem Punkte von π und aus der Geraden von π' zusammengesetzte Paar zu, die bezw. den Schnittpunkten von r mit π_1 und π_2 entsprechen. (Nach dem Referenten wäre es einfacher für die geometrischen Schlüsse, der r das Paar zweier Punkte von π_1 und π_2 zuzuordnen). Man durchschaut sofort die Eigenschaften dieser Abbildung. So entspricht einem beliebigen linearen Complexe von Geraden ein „lineo-linearer" Connex, der einen festen Büschel von Elementen enthält, und umgekehrt; somit entsprechen allen bekannten Eigenschaften der ∞^3 linearen G
radencomplexe zum Teil neue Eigenschaften der ∞^3 Con

(I, 1), die einen gegebenen „Büschel" von Elementen enthalten. Man erhält so Eigenschaften inbetreff „des Schnittes" zweier oder mehrerer dieser Connexe, zweier „involutorischen Connexe" (Bilder zweier linearen, involutorischen Complexe), etc. Der Verfasser verweilt endlich bei dem Systeme von sechs paarweise involutorischen Connexen, und da seine Eigenschaften zur Betrachtung von sechs Punkten eines Kegelschnittes führen, so werden die Eigenschaften des correspondirenden Systems von sechs linearen involutorischen Complexen mit denen des Hexagrammum mysticum in Verbindung gebracht. Wir wollen bemerken, dass diese Methode im Grunde von der bekannten nicht verschieden ist, bei der man die sechs Complexe mit den sechs Punkten in Beziehung setzt, welche jene einer festen Ebene zuordnen.

Se. (Lp.)

R. de Paolis. Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari. Rom. Acc. L. M. (4) I 206-231.

Um eine analytische Geometrie unabhängig vom Begriffe des Messens aufzubauen, hat v. Staudt den von ihm eingeführten „Wert eines Wurfes" angewandt; er zeigte nämlich, dass zur Lagenbestimmung eines Elementes in einem geometrischen Grundgebilde erster, zweiter oder dritter Stufe es genügt, sich ein-, zwei-, oder dreimal auf die eindeutige Correspondenz zu stützen, welche zwischen den reellen Zahlen und den Werten der Würfe vorhanden ist, welche durch die Elemente eines Gebildes erster Stufe mit dreien seiner Elemente gebildet werden. Zum Aufbau der analytischen Geometrie des von den linearen Complexen erzeugten Raumes schlägt Herr de Paolis in der zu besprechenden Arbeit einen analogen Weg ein.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile.

Der erste (§§ I-VI) umfasst eine methodische synthetische Untersuchung des von den linearen Complexen erzeugten Raumes. Der lineare Complex wird vom Verfasser als der Ort der Doppelgeraden eines Nullsystems definirt (§ I); die Congruenzen, die Regelflächen zweiter Ordnung und die Geradenpaare als Durch-

nitte von Complexen (§ II). Auf den Begriff der Involution weier linearen Complexe (§ III) gründet Herr de Paolis die heorie der linearen Systeme von Complexen (§ IV), welche ihn dem Schlusse führt (§ V), dass der von ihm erforschte Raum ear ist; ferner zu der Aufstellung des Begriffes (§ VI) „Doppelrhältnis von vier Complexen eines Büschels“ oder von vier earen Systemen, die einem Büschel angehören; schliesslich r folgerechten Erweiterung der Theorie der Projectivität.

Der zweite Teil (§§ VII-XIV) hat die Grundlagen der anaischen Geometrie für den Raum der linearen Complexe zum ele. Um ein Element dieses Raumes durch Coordinaten zu stimmen, nimmt der Verfasser (§ VII) sieben Complexe, nämlich ($h = 1, \dots, 6$), die „Grundcomplexe“, und E, den „Einheitsmplex“, als gegeben an. Bezeichnet man mit α_i die sechs bilde vierter Stufe, welche durch die Combinationen der Comxe A_i zu je fünf bestimmt werden, so bestimmen zwei unter en, α_i und α_k, einen Büschel, von welchem ein Element durch , eins durch A_k, eins durch E und eins endlich durch einen iebigen Complex C geht. Man bezeichne mit $\alpha_i\alpha_k(A_i A_k E C)$ ihr ppelverhältnis: fünf von den Zahlen $\frac{x_i}{x_k} = \alpha_i\alpha_k(A_i A_k E C)$ gegen, wenn passend gewählt, zur Bestimmung des Complexes und können mithin als „Coordinaten“ von C genommen werden, sechs Zahlen x_i sind dann die „homogenen Coordinaten“ n C. In analoger (correlativer) Art bestimmt man durch ordinaten ein Grundgebilde vierter Stufe. Mit Hülfe dieses ordinatensystems durchforscht der Verfasser im § VIII die undgebilde des Raumes, mit welchem er sich beschäftigt. Im IX behandelt er die Aufgabe der Coordinaten-Verwandlung; § X stellt er die Bedingungsgleichung für die Involution eier Complexe auf, und er folgert daraus, dass die Geraden ne quadratische Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen bilden, in den Raum der linearen Complexe eingetaucht ist: Das te Glied ihrer Gleichung ist eine völlig willkürliche quadrahe Form mit sechs Unbestimmten. (§ XI).

Die anderen Paragraphen sind einigen besonderen bemerkenswerten Fällen des vorbeschriebenen Coordinatensystems gewidmet. Bei der Bestimmung der Punkte und Geraden einer Ebene durch projectivische Coordinaten ist die Annahme von Nutzen, dass die Grundelemente ein und dasselbe Dreieck bilden, bezüglich dessen die Einheitselemente polar sind. Das Gleiche findet für unsern Raum statt. Um ähnliche Vorteile für den hier behandelten Raum zu erzielen, trifft der Verfasser eine analoge Wahl, nachdem er § XII das lineare Polarsystem vierter Stufe eines Complexes bezüglich eines Systems von sechs Complexen definirt hat. Im § XIII beschäftigt er sich mit dem Coordinatensystem, dessen Grundcomplexe involutorische Paare haben, und welches dasjenige des Herrn Klein (Math. Ann. II.) in sich begreift; die Klein'schen Coordinaten erhalten somit eine neue Deutung. Die beiden letzten Paragraphen endlich behandeln das durch solche sechs besonderen Complexe bestimmte System, deren Axen die Kanten eines Tetraeders sind: dieses System ist das wohlbekannte Cayley-Plücker'sche.

Zum Schlusse wollen wir nach Herrn de Paolis eine interessante geschichtliche Notiz anführen. Das „Nullsystem" ist sechs Jahre vor Möbius durch Giorgini, den glücklichen Nebenbuhler Chasles' auf der École Polytechnique, untersucht worden in der Arbeit: „Sopra alcune proprietà dei piani principali e delle coppie di forze equivalenti". Dieselbe steht im XX. Bande der Memorie della Società italiana delle Scienze (1827). (Nach dem Bericht des Herrn Reinhardt in Möbius' Ges. Werken IV. 712 fand Möbius das Nullsystem am 5. Febr. 1828. Red.)

La. (Lp.)

C. Segre. Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires. Kronecker J. 106. 169-172.

Sind k und k' die Parameter zweier linearen Complexe c und c', x und x' ihre Axen, und Δ und φ die Distanz und der Winkel zwischen diesen Axen, so hat Herr F. Klein als das

gegenseitige Moment der Complexe den Ausdruck:

$$(k+k')\cos\varphi - \Delta\sin\varphi$$

definirt. Der Verfasser giebt diesem eine einfachere Gestalt, indem er für die linearen Complexe als absolute Massmannigfaltigkeit in dem Cayley'schen Sinne die Mannigfaltigkeit der speciellen Complexe einführt. Ist deshalb ϱ das anharmonische Doppelverhältnis von c und c' und der beiden speciellen Complexe ihres Büschels, so ist der Winkel (cc') definirt durch

$$cc' = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\varrho.$$

Nach einiger Umformung ergiebt sich die Beziehung:

$$2\sqrt{kk'}\cos(cc') = (k+k')\cos\varphi - \Delta\sin\varphi.$$

W. St.

G. Koenigs. Sur la théorie des surfaces définies par une propriété des droites ou des sphères qui leur sont tangentes. C. R. C. 847-849.

In dieser Note wird die Anwendung von Resultaten, welche der Herr Verfasser vor kurzem der Akademie in Paris vorgelegt hatte, auf gewisse geometrische Theorien besprochen. Unter dem Moment zweier Geraden versteht der Herr Verfasser mit anderen das Product aus dem kürzesten Abstand und dem Sinus ihres Winkels. Das elementare Moment zweier unendlich nahen Geraden eines Complexes stellt sich dar als eine quadratische Form der Differentiale der drei Parameter, von denen der Complex abhängt.

Damit der Complex ein singulärer sei, also seine Geraden eine Enveloppe haben, ist notwendig und hinreichend, dass die Discriminante dieser Form identisch verschwinde, wie dies aus Arbeiten von Herrn F. Klein und aus früheren Arbeiten des Herrn Verfassers folgt. Es fragt sich aber, zu welchem F typus alsdann das Elementarmoment gehört. Hier erge folgende Fälle:

1) Im allgemeinen, wenn nämlich die Enveloppe eine nicht abwickelbare Fläche ist, gehört das Moment zum Typus der „lineo-involutiven Formen."

2) Wenn die Enveloppe eine Curve oder eine abwickelbare Fläche ist, ist der eine der Factoren, in welche das Moment zerfällt, integrabel.

Das elementare Moment lässt sich also nur auf eine der beiden kanonischen Formen bringen, nämlich im ersten Falle auf die Form

$$Ad\xi^2 + Bd\eta^2,$$

im zweiten auf die Form

$$(Ad\xi + Bd\eta)\,d\eta,$$

aber in beiden Fällen ist $\frac{B}{A}$ unabhängig von ξ und η.

Die Reduction des Momentes auf die kanonische Form entspricht im ersten Falle der Bestimmung der asymptotischen Linien der Enveloppe.

Im zweiten Falle giebt sie die Lösung des Problems: Unter welchen Bedingungen ist ein Complex aus den Secanten einer Curve gebildet?

Dieselben Betrachtungen können auch auf Complexe von Kugeln übertragen werden durch die von Herrn Lie gefundene merkwürdige Transformation der Geraden in eine Kugel.

A.

E. Jaggi. Sur les complexes de droites du premier degré et sur leurs congruences. Nouv. Ann. (3) IV. 80-87.

E. Jaggi. Sur les complexes linéaires. Nouv. Ann. (3) IV. 334-337.

Meist bekannte Sätze über unendlich kleine Verrückungen resp. über den Gleichgewichtszustand eines starren Systemes werden mit Hülfe der Theorie der Complexe ersten Grades bewiesen.

Js.

A. Weiler. Ueber die Kummer'sche Darstellung der Strahlensysteme zweiter Ordnung. Wolf Z. XXIX. 366-369. (1884.)

Es handelt sich in dieser Mitteilung um eine Methode, mittels deren man, ausgehend von der Kummer'schen Darstellung, die Gleichungen zweier Complexe in Strahlencoordinaten finden kann, die neben anderen das betrachtete Strahlensystem gemeinsam haben. E. K.

Th. Reye. Ueber die Hauptarten der allgemeinen quadratischen Strahlencomplexe und Complexengewebe. Kronecker J. XCVIII. 284-300.

Die Einteilung der quadratischen Strahlencomplexe in 49 Gattungen, von welchen die erste den allgemeinen Complex, die übrigen solche mit Doppelstrahlen enthalten, ist nach Anregung von Herrn F. Klein von den Herren Weiler und Segre ausgeführt worden. Der Verfasser behandelt die Aufgabe, eine weitere Einteilung der Complexe in Arten aufzustellen, welche sich nicht durch ihre Constantenzahl, sondern durch die Realitätsverhältnisse ihrer Strahlen, Kegel und Complexcurven, die Form ihrer Singularitätsverhältnisse etc. von einander unterscheiden. Die Einteilung in Hauptarten wird auf den allgemeinen Complex zweiten Grades beschränkt, die durch Specialisirung von dessen Eigentümlichkeiten auf die analogen Arten besonderer Complexe übertragen werden können. Die Arbeit schliesst sich an zwei frühere des Verfassers an. (Kronecker J. XCV. 330 und XCVII. 242).

Da die Strahlen eines quadratischen Complexes Γ_2 die Axen specieller Complexe sind, welche in einem quadratischen Complexengewebe Γ enthalten sind, so werden zunächst in dem ersten Abschnitte die Hauptarten der quadratischen Complexengewebe aufgestellt. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_6$ die homogenen Coordinaten eines linearen Complexes und $(x) = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6$ seine Invariante. Es stellt dann die Gleichung $(x) =$ [illegible] nt-gewebe H, d. h. die Gesamtheit aller speciellen

Jede andere für die x_i homogene quadratische Gleichung

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$$

giebt ein quadratisches Complexengewebe vierter Stufe Γ. Nun kann die letzte Gleichung auf unendlich viele Arten auf die Form:

$$k_1 P_1^2 + k_2 P_2^2 + k_3 P_3^2 + k_4 P_4^2 + k_5 P_5^2 + k_6 P_6^2 = 0$$

gebracht werden, wenn mit P_i eine reelle lineare Function der Complexcoordinaten x_i und mit k_i eine reelle nicht verschwindende Constante bezeichnet wird. Die linearen Complexe $P_i = 0$ sind bezüglich Γ paarweise conjugirt, und die k_i können gleich ± 1 gesetzt werden. Es ergeben sich so vier Hauptarten der allgemeinen quadratischen Complexengewebe vierter Stufe:

a) Das hyperbolische:

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_4^2 - P_5^2 - P_6^2 = 0,$$

welches unendlich viele reelle Complexenbündel enthält.

b) Das parabolische:

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 - P_5^2 - P_6^2 = 0,$$

welches unendlich viele reelle Complexenbüschel, aber keinen reellen Bündel besitzt.

c) Das elliptische:

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + P_5^2 - P_6^2 = 0,$$

welches keine reellen Complexenbüschel hat.

d) Das imaginäre

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + P_5^2 + P_6^2 = 0,$$

welches überhaupt keine reellen Complexe enthält.

Es werden diese Arten näher untersucht und insbesondere ihr Verhalten gegenüber den linearen Geweben näher dargelegt.

Im zweiten Abschnitte der Abhandlung wird zur Aufstellung der Hauptarten der allgemeinen Strahlencomplexe zweiten Grades übergegangen. Die Gleichung:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda [x] = 0$$

mit dem willkürlichen Parameter λ repräsentirt einen Büschel quadratischer Complexengewebe Γ, welche alle denselben quadratischen Complex Γ_0 enthalten. Der durch Γ_0 gehende Γ-Büschel enthält stets unendlich viele hyperbolische Complexengewebe, wie das Hauptgewebe eines ist, kann aber ausserdem parabolische, elliptische und imaginäre Gewebe enthalten. Ein quadratischer Complex Γ_0 heisst „hyperbolisch", wenn alle ihn enthaltenden Gewebe Γ hyperbolisch sind, dagegen „parabolisch", wenn sie teils hyperbolisch, teils parabolisch sind; wir nennen ihn „imaginär", wenn er auch imaginäre und „elliptisch", wenn er in elliptischen, nicht aber in imaginären Geweben enthalten ist.

Jeder hyperbolische oder parabolische Complex enthält unendlich viele reelle Strahlen, welche eine beliebig angenommene Gerade treffen; für den elliptischen ist eine weitere Untersuchung notwendig, der imaginäre Complex enthält überhaupt keine reellen Strahlen.

Nun werden die sechs Fundamentalcomplexe hinzugefügt. Die Gleichung:

$$\Sigma a'_{ik} x_i x_k + 2\lambda [x] = 0$$

hat für sechs Werthe von λ, welchen singuläre Gewebe entsprechen, eine verschwindende Discriminante. Jedes dieser sechs singulären Gewebe, die der Annahme nach alle verschieden sind, hat einen besonderen Doppelcomplex d, von welchen auch keiner ein specieller ist. Diese sechs Doppelcomplexe können nun teilweise imaginär sein. Die in dem Büschel der Gewebe enthaltenen verschiedenartigen reellen Gewebe, werden von einander getrennt durch die reellen singulären, und der Büschel besteht aus eben vielen Teilen, als reelle Fundamentalcomplexe oder Doppelcomple vorhanden sind. Es lassen sich somit acht Hauptarten von Co plexen Γ_0 von einander unterscheiden.

Alle sechs Fundamentalcomplexe sind imaginär, alle Geweb des Büschels sind hyperbolisch: Γ_0 ist ein Complex erster Art.

Vier Fundamentalcomplexe sind imaginär. [illegible] von der zweiten Art und parabolisch.

Zwei Fundamentalcomplexe sind imaginär. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden. a) Zwei Teile des Büschels enthalten nur parabolische, zwei andere nur hyperbolische Gewebe; Γ_0 ist dritter Art und parabolisch. b) Zwei Teile des Büschels enthalten parabolische, ein Teil nur hyperbolische, der letzte elliptische Gewebe; Γ_0 ist vierter Art und elliptisch.

Die sechs Fundamentalcomplexe sind reell. Der Büschel besteht aus sechs Teilen. Vier Fälle sind zu unterscheiden. a) Die sechs Teile des Büschels bestehen abwechselnd aus hyperbolischen und parabolischen Geweben; Γ_4 ist fünfter Art und parabolisch. b) Drei nicht benachbarte Teile enthalten parabolische Gewebe, zwei andere bestehen aus hyperbolischen, einer aus elliptischen Geweben; Γ_0 ist sechster Art und elliptisch. c) Drei Teile des Büschels enthalten parabolische Gewebe, zwei elliptische, einer hyperbolische Gewebe; Γ_4 ist siebenter Art und elliptisch. d) Ein Teil des Büschels besteht aus hyperbolischen, zwei aus parabolischen, zwei aus elliptischen, einer aus imaginären Geweben; Γ_0 ist achter Art und imaginär, enthält also keine reellen Strahlen.

Eine weitere Frage ist die, ob quadratische Complexe verschiedener Art dieselbe Singularitätenfläche haben können. Dies ist der Fall, und es zeigt sich, dass die Complexe dritter, fünfter und sechster Art noch je in zwei verschiedene Arten mit Rücksicht auf die Singularitätenfläche geteilt werden müssen. Es ergeben sich somit zum Schlusse elf verschiedene Hauptarten von quadratischen Complexen. W. St.

F. Mertens. Die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraeders zweier Flächen II. Ordnung schneidenden Geraden besteht. Wien. Ber. XCI. 519-526.

Diese Gleichung wird als sechsreihige Determinante, deren Glieder die nach Strahlencoordinaten genommenen partiellen Ab-

leitungen von sechs einfachen invarianten Gebilden zweiter Ordnung in diesen Coordinaten sind, dargestellt.

W. St.

A. Hirst. On congruences of the third order and class. Lond. M. S. Proc. XVI. 232-237.

Die Congruenz, welche hier betrachtet wird, ist ein Specialfall derjenigen, welche Herr Kummer in den Monatsber. d. Berl. Akad. Jan. 1878 studirt hat. Sie ist auch als Specialfall einer Cremona'schen Congruenz der fünften Ordnung und dritten Klasse anzusehen, welche durch Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier in kubischer eindeutiger Verwandtschaft stehenden ebenen Punktfelder α und β erhalten wird. Die Punktfelder haben hier zwei sich selbst entsprechende Punkte. Die Congruenz besitzt in den Ebenen α und β Strahlenbüschel zweiter Ordnung und in zwei Punken A_1 und B_1 dieser Ebenen Kegel zweiter Ordnung. Die Brennfläche ist achter Ordnung und Klasse, wird von den Ebenen α und β längs Curven dritter Ordnung berührt und hat in den Punkten A_1 und B_1 dreifache Punkte. Durch diese Singularitäten unterscheidet sich die hier betrachtete Congruenz von der Kummer'schen. Die Hirst'sche Congruenz kann beschrieben werden durch die Regelschar eines Flächensystems zweiter Ordnung, und es ergiebt sich somit durch die Leitstrahlen eine zweite Congruenz dritter Ordnung und Klasse, welche der ersten conjugirt ist. Letztere kann aber nicht als Cremona'sche Congruenz angesehen werden. Zum Schlusse wird angenommen, dass zwei entsprechende Hauptpunkte der kubischen Verwandtschaft zwischen α und β auf der Schnittgeraden zusammenfallen, und diese hierdurch specialisirte Congruenz betrachtet.

W. St.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

L. Autonne. Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. Prem. Mém. Généralités et groupes quadratiques. Jordan J. (4) I. 431-454.

Den Gegenstand der Abhandlung bilden die birationalen oder Cremona'schen Substitutionen für drei homogene Variable z_1, z_2, z_3, welche eine endliche Gruppe ausmachen. Die Ordnung einer Gruppe ist die grösste Ordnung einer Substitution der Gruppe. Daher wird eine quadratische Gruppe gebildet allein aus linearen und quadratischen Substitutionen, eine kubische Gruppe enthält nur kubische, quadratische und lineare Substitutionen. Nach Aufstellung einiger Sätze über die Fundamentalpunkte einer zusammengesetzten Substitution, geht der Verfasser über zur Bestimmung der quadratischen Gruppen von endlicher Ordnung. Es werden drei Typen derselben aufgestellt.

Erster Typus. Die Gruppe setzt sich zusammen aus einer quadratischen Σ und drei linearen Substitutionen A, B, C von folgender Form:

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & -z_3 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 z_3 \\ z_2 & z_3 z_1 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix}.$$

Zweiter Typus: Die Gruppe setzt sich zusammen aus

$$T = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 + \lambda z_3) \\ z_2 & z_2(z_1 + \mu z_3) \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \qquad (\lambda, \mu = \text{const})$$

und Substitutionen der Form:

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)(Q_1 z_1 + Q_2 z_2) \\ z_2 & (q_1 z_1 + q_2 z_2)(P_1 z_1 + P_2 z_2) \\ z_3 & (P_1 z_1 + P_2 z_2)(Q_1 z_1 + Q_2 z_2) \end{vmatrix},$$

wobei die Coefficienten p, P, q, Q so beschaffen sind, dass die lineare Substitution mit zwei Variabeln

$$\begin{vmatrix} z_1 & p_1 z_1 + p_2 z_2 \\ z_2 & P_1 z_1 + P_2 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} z_1 & q_1 z_1 + q_2 z_2 \\ z_2 & Q_1 z_1 + Q_2 z_2 \end{vmatrix}$$

beide von endlicher Ordnung sind.

Dritter Typus: Die Gruppe entsteht aus Substitutionen der Form:

$$\begin{vmatrix} z_1 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)(q_1 z_1 + q_2 z_2) \\ z_2 & (p_1 z_1 + p_2 z_2)^2 \\ z_3 & R z_1 z_3 + r_{11} z_1^2 + 2 r_{12} z_1 z_2 + r_{22} z_2^2 \end{vmatrix},$$

wo R eine Einheitswurzel ist und die lineare Gruppe mit zwei Variabeln

$$\begin{vmatrix} z_1 & q_1 z_1 + q_2 z_2 \\ z_2 & p_1 z_1 + p_2 z_2 \end{vmatrix}$$

von endlicher Ordnung ist.

Diese Typen werden erhalten mit Hülfe des Satzes: „Je zwei Fundamentaldreiecke der quadratischen Substitutionen müssen zwei gemeinsame Ecken haben". Dies ist nur möglich auf zwei Arten:

1) Alle Fundamentaldreiecke haben zwei gemeinsame Ecken.

2) Die Ecken aller Fundamentaldreiecke fallen zusammen mit den Ecken eines festen Vierseits, welches das „erzeugende Vierseit" genannt wird.

Die erste Annahme liefert den zweiten Typus, die zweite den ersten. Es werden dann quadratische Substitutionen betrachtet, bei welchen zwei oder drei Ecken des Fundamentaldreiecks sich vereinigen. Im letzten Falle erhält man den dritten Typus. W. St.

L. Cremona. An example of the method of deducing a surface from a plane figure. Edinb. Trans. XXXII. 411-443.

L. Cremona. Esempio del metodo di dedurre una superficie da una figura piana. Edinb. Proc XII. 599-601.

Mit Rücksicht auf sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer Ebene π giebt es ein dreifach lineares System von Curven sechster Ordnung k, von denen jede die sechs Punkte zu Doppelpunkten hat und gewissen anderen Bedingungen genügt. Die Ebene π wird als Abbildung einer Oberfläche Φ angesehen, deren ebene Schnitte die Curven k zu Bildern haben. Da die Oberfläche Φ von der zwölften Ordnung und dritten Klasse ist, ausserdem 27 gerade Knotenlinien und eine Cuspidalcurve von der 24ten Ordnung besitzt, so ist sie die reciproke Polare einer allgemeinen kubischen Oberfläche. Dies war leicht vorauszusehen, aber der Verfasser wünschte ein Beispiel für die Methode zu geben, eine (unicursale) Oberfläche aus einer ebenen Figur abzuleiten, die als ihre Abbildung angenommen ist.

Cly. (Lp.)

G. B. Guccia. Sur les transformations Cremona dans le plan. C. R. CI. 805-809.

Ist in einer Ebene eine Cremona'sche Transformation gegeben, so hat Herr de Jonquières den Ort P derjenigen Punkte einer Figur, deren Verbindungsgeraden mit den ihnen entsprechenden durch den Punkt p gehen, die isologe Curve des Punktes p genannt. Der Verfasser dieser Arbeit beschäftigt sich mit diesen isologen Curven und deren Netzen und teilt eine Reihe von Sätzen mit über den besonderen Charakter, welchen diese Curven haben können.

W. St.

E. de Jonquières. Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre n. C. R. CI. 720-724.

B. Guccia. Sur les transformations géométriques planes birationnelles. C. R. CI. 808-809.

E. de Jonquières. Solution d'une question d'analyse indéterminée qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. C. R. CI 857-861.

E de Jonquières. Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona. C R CI. 921-922.

Um alle möglichen Cremona'schen Transformationen von vorgegebener Ordnung n aufzustellen, hat man bekanntlich, wenn durch α_i die Anzahl der Fundamentalpunkte i^{ter} Ordnung der einen der beiden in Beziehung gesetzten Ebenen bezeichnet wird, vor allem die Gleichungen

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + (n-1)\,\alpha_{n-1} = 3(n-1), \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \cdots + (n-1)^2\alpha_{n-1} = n^2 - 1 \end{cases}$$

zu befriedigen; zu dieser Bedingung arithmetischer Natur kommt die Forderung geometrischer Möglichkeit hinzu; ausserdem muss die zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ conjugirte Lösung, d. h. das System $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{n-1})$ der Anzahlen der Fundamentalpunkte der verschiedenen Ordnungen der inversen Transformation denselben Bedingungen wie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ genügen, und

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_{n-1}$$

sein. Zu den bisher bekannten speciellen von Cremona, Cayley und de Jonquières selbst herrührenden Lösungen fügt dieser in der ersten Note eine ganz neue hinzu; dieselbe lautet, wenn $n = kl$ ist, wo k und l irgend welche positiven ganzen Zahlen bedeuten:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2(l-1), \quad \alpha_{l-1} = 1, \quad \alpha_l = 2(k-1), \quad \alpha_{l(k-1)} = 1, \quad (T_{kl}), \\ \alpha'_1 = 2(k-1), \quad \alpha'_{k-1} = 1, \quad \alpha'_k = 2(l-1), \quad \alpha'_{k(l-1)} = 1, \quad (T'_{kl}), \end{cases}$$

während die übrigen α, α' verschwinden. Diese Lösung enthält als speciellen Fall ($l = 1$) die schon von Cremona und de Jonquières angegebene

$$\alpha_1 = 2(n-1), \quad \alpha_{n-1} = 1, \quad \alpha'_1 = 2(n-1), \quad \alpha'_{n-1} = 1.$$

Bezeichnet man diese letztere mit T_n, resp. T'_n, so geht Herr Guccia von der Bemerkung aus, dass die Lösung (B) formal auch so gebildet werden kann:

$$T_{kl} = [T_k + T_l^{(l-k)}], \qquad T'_{kl} = [T'_k + T_l'^{(l-k)}];$$

hierin bedeutet z. B. $[T_i + T_k^{(i=ki)}]$, dass man zu den Elementen von T_i die Elemente T_k hinzuschreibe, nachdem man jeden Index der letzteren mit i multiplicirt hat. Herr Guccia hat nun gefunden, dass dasselbe Gesetz der Zusammensetzung auch dann eine neue Lösung liefert, wenn für T_k, T'_k und T_i, T'_i je zwei ganz beliebige Lösungen genommen werden. Z. B. folgt so aus

$$T_2 \equiv (\alpha_1 = 3), \quad T_5 \equiv (\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 1)$$

die bekannte Lösung:

$$T_{10} \equiv (\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_4 = 3,\ \alpha_6 = 1),$$
$$T'_{10} \equiv (\alpha_1 = 3,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_5 = 3).$$

Die dritte und vierte der obigen Arbeiten verfolgen allgemeinere Ziele. Cremona hat bekanntlich für die Werte $n = 2$ bis $n = 10$ alle annehmbaren Lösungen ermittelt, deren gegenseitiger Zusammenhang bisher ganz unentwirrbar erschienen war. Herrn de Jonquières ist es nun gelungen, indem er zunächst alle beschränkenden Voraussetzungen geometrischer Natur fallen lässt, ein recurrirendes Verfahren zu entdecken, welches gestattet, aus der Gesamtheit der ganzzahligen (aus positiven, negativen Zahlen und der Null zusammengesetzten) Lösungssysteme T_n von der Ordnung n der Gleichungen (A) die Gesamtheit der Lösungssysteme T_{n+1} von der Ordnung $n+1$ und allgemeiner aus irgend einer Lösung von beliebiger Ordnung irgend eine andere von beliebiger Ordnung abzuleiten. Die hierzu dienenden Regeln gestatten eine kurze Wiedergabe nicht. Der Herr Verfasser beabsichtigt eine detaillirtere Darstellung nebst den Beweisen zu veröffentlichen. T.

M. Lerch. Ebene Abbildungen auf Grund von realen Kegelschnitten. Prag. Ber. 1884. 90-94 (Böhmisch.)

Enthält Bemerkungen und Verwendungen, betreffend analoge Untersuchungen von Laguerre, Bellavitis, Chasles.

Std.

V. Martinetti. Sopra una classe di trasformazioni involutorie dello spazio. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII 132-142.

Es handelt sich um die rationalen involutorischen Transformationen des Raumes, bei denen die den Ebenen entsprechenden Oberflächen Monoide sind, d. h. Oberflächen von der Ordnung n mit einem $(n-1)$-fachen Knotenpunkte. Dieser Punkt wird zu einem festen Grundpunkte O; die durch ihn gehenden Geraden und Ebenen entsprechen sich unter einander. Mithin sind zwei Arten von Transformationen zu unterscheiden, je nachdem dieses Entsprechen in dem Bündel O eine Identität oder aber eine harmonische Homologie ist. Bei der ersten Art ordnet die räumliche Transformation zwei beliebige Punkte einander zu, die in einer durch O gehenden Geraden liegen und durch die beiden neuen Schnittpunkte dieser Geraden mit einer festen Oberfläche von der Ordnung n harmonisch getrennt sind, welche O zum $(n-2)$-fachen Punkt hat. Bei der zweiten Art befindet sich auf der Ordnungsebene π der Homologie ein Büschel O von Doppelstrahlen; die Ordnungslinie p ist ebenfalls doppelt, aber sie ist ausserdem ein Ort von Doppelpunkten, wenn n ungerade ist. Es giebt mehrere besondere Fälle dieser zweiten Art, die man unter der Voraussetzung erhält, dass die Strahlen des Büschels $O\pi$ Oerter von Doppelpunkten, oder aber dass sie fundamentale sind (d. h. solche, dass jeder einem seiner Punkte entspricht), dass p selbst aus Doppelpunkten bestehe, oder auch dass sie fundamental ist, etc. Der Verfasser prüft alle diese möglichen Fälle, indem er besonders bei der Untersuchung der fundamentalen Elemente und bei der Construction der verschiedener erhaltenen Transformationen verweilt. Se. (Lp.)

R. de Paolis. Le trasformazioni doppie dello spazio. Rom. Acc. L. Mem (4) I. 576-608.

Eine „ein-zweideutige" Transformation" [illegible] one doppia) zwischen zwei d-dimensionalen Manni[illegible] (die wir linear voraussetzen wollen) ist eine [illegible]

schaft, bei welcher jedem Elemente P' der einen von beiden S' („einfache Mannigfaltigkeit“) ein Element P der anderen S („zweifache Mannigfaltigkeit“) entspricht, während jedem Elemente P von S ein Paar P', $\overline{P'}$ von (unter einander „conjungirten“) Elementen von S' entspricht. Die „Ordnung“ der Transformation ist der Grad der Oberflächen (Mannigfaltigkeiten von $d-1$ Dimensionen) aus der einfachen Mannigfaltigkeit, welche den linearen Mannigfaltigkeiten von $d-1$ Dimensionen aus der zweifachen Mannigfaltigkeit entsprechen; ihr „Geschlecht“ ist das Geschlecht der Curven aus der einfachen Mannigfaltigkeit, welche den linearen Mannigfaltigkeiten von einer Dimension aus der anderen entsprechen.

Aus dieser Definition ergeben sich, ganz unabhängig von der Zahl d, leicht zahlreiche Begriffe und Aufgaben. Wir führen folgende Beispiele an.

Wie auch d beschaffen ist, so giebt es immer zwischen den conjugirten Punkten des einfachen Raumes eine eindeutige involutorische Verwandtschaft; sie heisst die zur ein-zweideutigen Transformation „conjugirte Transformation“. Ihre Erforschung hat eine grosse Bedeutung und anziehenden Reiz. – Im zweifachen Raume tritt eine Oberfläche Ω hervor, der Ort derjenigen Punkte, deren entsprechende unendlich nahe liegen, und im einfachen Raume eine Oberfläche Ω', der Ort der conjugirten Punkte, deren Abstand verschwindet. Ω erhält den Namen „Uebergangsfläche“, Ω' „Doppelfläche“. Auch die Erforschung dieser Flächen ist von grosser Wichtigkeit. Auserdem hat man die Systeme der Mannigfaltigkeiten von $d-1$, $d-2$,... Dimensionen aus S' (oder S) zu betrachten, welche den linearen Mannigfaltigkeiten von $d-1$, $d-2$,.. Dimensionen aus S (oder S') entsprechen und ihre Beziehungen zu den Oberflächen Ω, Ω' aufzusuchen. – Endlich treten in S und S' gewisse Grundgebilde (Punkte, Linien, Flächen, u. s. w.) auf, deren Eigenschaften man erforschen muss, und in S sind ferner noch die Grundgebilde der conjugirten Transformation zu beachten.

Allein, ausser diesen Elementen, die den Theorien der ein-zweideutigen Transformationen aller linearen Mannigfaltigkeiten

gemeinsam sind, giebt es auch noch solche, die jedem Werte von d eigentümlich angehören. Mit wachsendem d erheben sich neue Fragen, während andere sich compliciren; ferner wird es notwendig, andere Gebilde einzuführen und die Beziehungen derselben unter einander und zu den alten zu erforschen. Uebrigens ähneln die Umstände durchaus den wohl bekannten, welche sich bei den eindeutigen Transformationen darbieten.).

Will man sich von der Richtigkeit dieser Bemerkungen überzeugen, so genügt der Vergleich zwischen der Abhandlung „Le trasformazioni piane doppie“ (Rom. Acc. L. Mem. 1876-77, F. d. M. IX. 1877. 581), welche Herr de Paolis vor zehn Jahren den ein-zweideutigen Transformationen zwischen zwei Ebenen widmete, und derjenigen, durch welche er jüngst die ein-zweideutigen Transformationen zwischen zwei Räumen begründet hat, und mit welcher der vorliegende Artikel sich beschäftigt. Beschränken wir uns auf zwei Beispiele. In dem Falle zweier Ebenen ist die Erforschung der Eigenschaften der Grundgebilde weder lang noch gerade schwierig, während dieselbe im Falle zweier Räume äusserst verwickelt und heikel ist. Im Falle zweier Ebenen bilden die Verbindungsgeraden der Paare conjugirter Punkte die Gesamtheit der Geraden in der Ebene, während sie im Raume einen Complex bilden, der bemerkenswerte Eigenschaften besitzt.

Die Schrift des Herrn de Paolis ist kaum eines Auszuges fähig. Die eben angestellten Betrachtungen genügen indessen vielleicht zur Kennzeichnung der in ihr behandelten Fragen. Die zur Lösung angewandte Methode ist synthetisch, ähnlich wie bei der Arbeit desselben Verfassers, die oben citirt wurde. Wir wollen noch die Titel der sieben Capitel, aus denen die Abhandlung sich zusammensetzt, hinzufügen und verweisen im übrigen wegen des näheren Inhaltes auf die Arbeit selbst; ihr gründliches Studium empfehlen wir allen denen an, welche einen Teil der Geometrie kennen zu lernen wünschen, der wie die Theorie der ein-zweideutigen Transformationen des Raumes wichtiger Anwendungen fähig scheint.

I. Allgemeines. Doppelfläche, Uebergang

laritäten der Curven und Flächen des einen der Räume, die den Curven und Flächen des anderen entsprechen.

II. Flächen und Curven, die im einfachen Raume den Ebenen und Geraden des zweifachen Raumes entsprechen

III. Flächen und Curven, die im zweifachen Raume den Ebenen und Geraden des einfachen Raumes entsprechen.

IV. Grundgebilde der beiden Räume.

V. Eigenschaften der Uebergangs- und der Doppelfläche.

VI. Complex der durch die Paare conjugirter Punkte des einfachen Raumes bestimmten Geraden. (Seine Eigenschaften und seine eindeutige Abbildung auf den Punktraum).

VII. Methode zur Auffindung unendlich vieler ein-zweideutiger Transformationen des Raumes. (Aehnlich der Methode, welche Herr Cremona, Brioschi Ann. (2) V. zur Construction aller birationalen Transformationen zwischen zwei Räumen angegeben hat, dient dieselbe zur Aufstellung aller ein-zweideutigen Transformationen, bei denen die Oberflächen des einfachen Raumes, die den Ebenen des zweifachen Raumes entsprechen, homaloïdal sind. La. (Lp.)

P. Visalli. Memoria sulle trasformazioni geometriche *N*-ple. Messina. Tip. Filomena. 1884. 55 p

Nach den klassischen Arbeiten, in welchen Herr Cremona die Principien der eindeutigen ebenen geometrischen Transformationen aufgestellt hat (Bologna Mem. (2) II u. V), haben die Geometer sich bekanntlich das allgemeinere Problem gestellt, die vieldeutigen Verwandtschaften zwischen zwei Grundgebilden der zweiten Stufe zu erforschen. Die erste Arbeit, die nach unserer Kenntnis von der Sache ex professo diese Verwandtschaften behandelt hat, rührt von Herrn Chr. Wiener her (Math. Ann. III.; F. d. M. II. 375.). Aber die in ihr entwickelten Gedanken sind den späteren Gelehrten nicht bedeutend genug erschienen, um zu tiefer gehenden Betrachtungen zu führen. Dagegen machte Clebsch gewisse Bemerkungen in seiner Abhandlung: „Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächen-

abbildungen mit der Zweiteilung der Abel'schen Functionen" (Math. Ann. III.; F. d. M. II. 1870. 637) bezüglich des Gebrauchs der zweideutigen Transformation bei der eindeutigen Abbildung der Oberflächen auf einer Ebene, welche bald in ihrer grossen Bedeutung erkannt wurden, (vergl. Math. Ann. VII. 35) und zur Entstehung der allgemeinen Theorie der zweideutigen ebenen Transformationen Veranlassung gaben, deren hauptsächlichste Eigenschaften Herr de Paolis aufgestellt (Rom. Acc. L. Mem. (3) I.; F. d. M. IX. 1877. 581), und von denen er glückliche Anwendungen gemacht hat (ibid. (3) II.; F. d. M. X. 1878. 551). Indem man diesen Weg weiter verfolgt, kann man die Erweiterung dieser Ergebnisse auf die „(1, ν)-deutige Verwandtschaft" vornehmen, bei welcher jedem Punkte einer Ebene π (der „einfachen Ebene") ein Punkt einer anderen Ebene π' (der „ν-fachen Ebene") entspricht, und jedem Punkte der Ebene π' eine Gruppe von ν Punkten („associirten Punkten") von π. Aber wie natürlich auch diese Verallgemeinerung erscheinen mag, so ist sie nach unserm Wissen noch nicht gemacht worden, bevor Herr Visalli dieselbe zum Gegenstande der Untersuchungen machte, die in der zu besprechenden Arbeit niedergelegt sind.

Zur Charakterisirung dieser Forschungen bemerken wir, dass der vom Verfasser gewählte Gesichtspunkt eine Verallgemeinerung dessen von Herrn de Paolis bildet und dass seine Schlüsse grösstenteils mit denen dieses Gelehrten übereinstimmen, zuweilen identisch sind.

In der Theorie der ein-zweideutigen Transformation[illegible] der Ordnung n entspricht den Geraden der einfachen Eb[illegible] System von ∞^2 rationalen Curven von der Ordnung [illegible] aus zwei Reihen mit dem Index 2 besteht, während den [illegible] der Doppelebene ein Netz von hyperelliptischen Curven [illegible] Ordnung n und dem Geschlechte p entspricht (dem „Geschl[illegible] der ein-zweideutigen Transformation). In ähnlicher Weise ents[illegible] bei den (1, ν)-deutigen Transformationen vo[illegible]nung n [illegible] Geraden der einfachen Ebene π ein Syst[illegible] Curven Φ', das aus ν Reihen mit dem In[illegible] den Geraden der ν-fachen Ebene π' ein [illegible]

von der Ordnung n und dem Geschlechte p entspricht (dem „Geschlechte" der $(1, \nu)$-deutigen Transformation). Die allen Curven Φ oder Φ' gemeinschaftlichen Punkte („Grundpunkte" von π oder π') und die Jacobi'sche Curve der Φ spielen bei den $(1, \nu)$-deutigen, gerade wie bei den $(1, 2)$-deutigen Transformationen eine bemerkenswerte Rolle. Nennt man x_r (oder x'_r) die Anzahl der r-fachen (oder r'-fachen) Grundpunkte der Ebene π (oder π'), so ist für jedes beliebige ν:

$$(1) \qquad n^2 - \nu = \sum r^2 x_r,$$

$$(2) \qquad p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_r \tfrac{1}{2} r(r-1) x_r.$$

Bei den $(1, \nu)$-deutigen, gerade wie bei den $(1, 2)$-deutigen Transformationen, ist es von Wichtigkeit, die Verwandtschaft (die mit der gegebenen „conjugirte" Transformation) zwischen den ν Punkten von π zu betrachten, die einem und demselben Punkte von π' entsprechen. Der Verfasser weist nach, dass ihre Ordnung N durch $n^2 - 1 - \sum_r r' x'_r$ und ihre Klasse α (d. i. die Zahl der variabeln Doppelpunkte einer Curve Φ') durch

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_r \tfrac{1}{2} r'(r'-1) x'_r$$

ausgedrückt wird. Von grosser Bedeutung ist auch der Ort der unendlich nahen vereinigten Punkte („Doppelcurve" von π) und der Ort, der ihm in π' entspricht (die „Uebergangscurve"). Diese beiden Curven haben offenbar dasselbe Geschlecht, die erstere ist von der Ordnung $3(n-1) - \sum_r r' x'_r$, die letztere von der Ordnung $2(\nu + p - 1)$. Es ist zu beachten, dass ausserhalb der Doppelcurve eine gewisse Anzahl vereinigter zusammenfallender Punkte (Doppelpunkte von π) vorhanden sein kann.

Diese Begriffe und die Unterscheidung der Grundpunkte der einfachen Ebene sowie der entsprechenden (Grund)-Curven in verschiedene Arten (ähnlich wie bei Herrn de Paolis) bilden die Grundlagen der von Herrn Visalli im ersten Teile seiner Schrift dargelegten Untersuchungen. Es ist uns nicht möglich, sie in wenige Zeilen zusammenzudrängen; es genüge die Andeutung, dass sie die Eigenschaften der Grundpunkte und der Grund-

curven Φ oder Φ' behandeln, die mit Besonderheiten behaftet sind, ferner gewisse Oerter und Hüllcurven, die Covarianten der Transformationen sind, und ihre Beziehungen zu den geometrischen Figuren, die früher besprochen sind. Bedauerlicher Weise machen einige wenig genaue oder nicht recht klare Redewendungen und der Mangel einer Einteilung die Lectüre des im übrigen sehr guten Teiles der besprochenen Arbeit etwas mühselig.

Im zweiten Teile erforscht der Verfasser zuerst die durch die folgenden Zahlen definirten Verwandtschaften:

$n = 2,\ p = 0,\qquad \nu = 4$ oder 3;
$n = 3,\ p = 0$ oder $1,\qquad \nu = 3$;
$n = 3,\ p = 0,\ 1$ oder $2,\qquad \nu = 3$;
$n = 4,\ p = 2,\qquad \nu = 4$;
$n = 4,\ p = 3,\qquad \nu = 3$.

Danach zählt er die Verwandtschaften auf, deren Geschlecht 0 oder 1 ist, und deren Ordnung nicht über 10 steigt, und bestimmt die Vielfachheit der Grundpunkte der Transformationen vom Geschlechte 0 und 1, deren Ordnung nicht über 9 steigt. Endlich findet er einige Lösungen der Gleichungen (1) und (2) für solche Transformationen, deren Geschlecht 0 und deren Ordnung beliebig ist.

Zum Schlusse beweist der Verfasser den Satz: „Wenn Ebenen π und π' zusammenfallen, so giebt es $n+\nu+1$ Punkte von π', die mit einem ihrer entsprechenden Punkte von π zusammenfallen“, welcher nur ein besonderer Fall des allgemein bekan[...] von Herrn Salmon entdeckten Correspondenz-Princips der [...]gebilde zweiter Art ist. La. (I[...]

P. Visalli. Sopra le diverse classi delle trasform[...] geometriche piane ν-ple. Messina. Tip. Filomena. 188[...].

Diese Abhandlung ist eine Fortsetzung [...] eben bespr[...]nen, deren Bezeichnungen und Benennun[...] werden. Das Ziel des Verfassers im ers[...]

Arbeit ist die Bestimmung der vieldeutigen Transformationen, deren conjugirte Transformation eine bestimmte Klasse d hat. Er zeigt, dass dieses geometrische Problem jenem analytischen gleichkommt, die zwei unbestimmten Gleichungen zu lösen:

$$\sum_{r'} \tfrac{1}{2} r'(r'-1)x'_{r'} = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-d, \quad \sum_{r} r'^2 x'_r = n^2-N-1,$$

und hierauf erforscht er die Transformationen, bei denen die Zahlen n, d, N folgende Werte haben:

$$\begin{aligned}
n &= 3, & d &= 0, & N &= 4, \ 3, \ldots, 0;\\
n &= 3, & d &= 1, & N &= 8, \ 7, \ldots, 2;\\
n &= 4, & d &= 0, & N &= 6, \ 5, \ldots, 0;\\
n &= 4, & d &= 1, & N &= 7, \ 6, \ldots, 2;\\
n &= 4, & d &= 2, & N &= 11, \ 10, \ldots, 4.
\end{aligned}$$

Im zweiten Teile des Aufsatzes beschäftigt sich der Verfasser besonders mit den Transformationen, deren Klasse Null ist, und richtet vorzugsweise seine Aufmerksamkeit auf die Beziehungen, die zwischen der Ordnung r, der Vielfachheit ν, der Transformations-Ordnung n und den Zahlen vorhanden sind, welche die Arten der Grundpunkte und Grundcurven ausdrücken.

La. (Lp.)

J. S. Vaněček. Sur la transformation des figures polaires réciproques. Liege Mem. (2) XI. 21 p.

Ausführungen von Notizen, die in den C. R. 1882 und 1883 veröffentlicht sind. Die Transformation wird vermittelst eines zu einer Fläche zweiter Ordnung polaren Tetraeders bewerkstelligt. Eine Curve oder eine Oberfläche L von der Ordnung l verwandelt sich, auf eine andere Curve M von der Ordnung m und auf eine Hülfsfläche P von der Ordnung p bezogen, in eine andere Curve oder Oberfläche von der Ordnung $4lmp$. Diese Ordnung erniedrigt sich in gewissen Fällen. In der gegenwärtigen Note ermittelt der Verfasser die Fälle, in denen eine der gegebenen Figuren die reciproke polare der anderen ist oder durch ihren Pol geht.

Mn. (Lp.)

G. SFORZA Il campo ternario completo rappresentato sullo spazio rigato. 90 p. Reggio-Emilia, Stabil. degli Artigianelli.

Wenn ein reeller oder imaginärer Punkt einer Ebene zu homogenen Coordinaten drei beliebige complexe Zahlen $a_r + ib_r$ hat ($r = 1, 2, 3$), ohne dass die Gleichung

$$\Sigma (a_r + ib_r)^2 = 0$$

stattfindet, so giebt es im Raume zwei wohl bestimmte reelle Gerade s, deren Plücker'sche Coordinaten den Proportionen genügen:

$$s_{mn} + is_{r4} = a_r + ib_r \qquad (m, n, r = 1, 2, 3);$$

diese beiden Geraden sind reciprok bezüglich der elliptischen Oberfläche zweiter Ordnung

$$X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Mithin hat man eine Abbildung der vollständigen Ebene, d. h. mit allen ihren reellen und complexen Punkten, in Paaren von reellen Geraden des Raumes, oder auch einfach in den reellen Geraden, welche die Oberfläche X schneiden (oder die sie nicht schneiden). Diese Abbildung könnte auch dadurch erhalten werden, dass man in der Ebene einen Kegelschnitt fest annimmt und seine (reellen oder imaginären) Tangenten den reellen Punkten der Fläche zweiter Ordnung X zuordnet: sie ist also nicht neu; denn z. B. Herr F. Klein hat sich ihrer schon bei seiner Ausdehnung des Pascal'schen Satzes auf den Raum bedient. Nachdem Herr Sforza dieselbe durch die obigen Gleichungen definirt hat, macht er eine analytische Untersuchung über sie, die uns ein wenig zu lang scheint und keine neuen geometrischen Resultate von einiger Bedeutung enthält. Die jedes Hinweises auf frühere Arbeiten entbehrende Darstellung lässt ebenfalls manches zu wünschen übrig.

Se. (Lp.)

B. Conforme Abbildung.

Bock. Ueber verschiedene Constructionen zur Uebertragung von Figuren von einer gegebenen Oberfläche auf eine andere. II. Pr. Gymn. Lyck. 26 S. 4°. u. 1 Tafel.

Diese Programmabhandlung bildet den zweiten Teil einer Arbeit, von deren erstem Teile im vorangehenden Jahrgange des Jahrbuchs S. 480 nur der Titel angegeben werden konnte, da die Schrift selbst der Redaction nicht zugegangen war. Die Uebertragung, um welche es sich handelt, geschieht, so weit dies aus der meist blosse Rechnungen darbietenden jetzigen Fortsetzung erhellt, durch analytische Transformationen, an welche die Anforderung gestellt wird, gewisse Curven der einen krummen Oberfläche in vorgeschriebene einer anderen überzuführen. Die durchgerechneten Beispiele beziehen sich auf die Abbildung einer Kugelfläche auf einer Ebene, so dass dem Systeme von Meridianen und Parallelkreisen in der Bildebene entsprechen 1) zwei Systeme gerader Linien, 2) zwei Systeme von Kreisen; sodann werden die nämlichen Probleme für die Erdoberfläche behandelt, wenn dieselbe als abgeplattetes Rotationsellipsoid angesehen wird. Lp.

Th. Sanio. Die Abbildung des Aeussern eines Kreisbogenpolygons auf einer Kreisfläche. Hoppe Arch. (2) III. 1-14.

Der Herr Verfasser behandelt die Aufgabe: Gegeben sei ein überall einblättriger, ebener, einfach zusammenhängender Bereich, dessen Begrenzung von einer endlichen Anzahl von (geradlinigen Strecken oder) Kreisbogen gebildet wird, und dessen Inneres den unendlich fernen Punkt der Ebene enthält. Es handelt sich darum, diesen Bereich zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich auf die Fläche einer Halbebene oder auf eine Kreisfläche abzubilden.

In einer allgemeinen Einleitung stellt der Herr Verfasser die Hauptergebnisse, zu denen die ihm bekannt gewordenen Untersuchungen anderer Schriftsteller über die erwähnte Aufgabe oder specielle Fälle derselben geführt haben, mit Angabe der Quelle zusammen und erläutert die Art und Weise der Herleitung einiger dieser Ergebnisse durch zweckdienliche Betrachtungen.

Die allgemeine Lösung der betrachteten Aufgabe hängt ab von dem Quotienten zweier von einander linear unabhängigen particulären Integrale einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variabeln sind.

Wenn der Herr Verfasser (S. 15) die Meinung ausspricht, dass die für die Umgebung der singulären Stellen geltenden Lösungen dieser Differentialgleichungen nur wie Potenzen unstetig werden oder sich verzweigen dürfen, so ist dieser Ausspruch nur für denjenigen singulären Punkt im Innern der Halbebene ausnahmslos richtig, welchem der unendlich ferne Punkt der von dem Kreisbogenpolygon begrenzten Fläche entspricht. Für die auf der Begrenzung der Halbebene liegenden singulären Punkte trifft der erwähnte Ausspruch nicht zu, wenn zwei Kreise, denen zwei benachbarte Seiten des betrachteten Kreisbogenpolygons angehören, einander berühren, ohne zusammenzufallen. In diesem Falle enthält das allgemeine Integral der erwähnten Differentialgleichung notwendig ein logarithmisches Glied.

Der Herr Verfasser führt die Lösung der angegebenen Aufgabe für den Fall, in welchem das Kreisbogenpolygon ein von geraden Strecken oder von Kreisbogen gebildetes Dreieck ist, vollständig durch.

Eine Erörterung, welche der Herr Verfasser bezüglich der Zahl der bei dem allgemeineren Probleme in Betracht kommenden Constanten anstellt, führt denselben zu einer grundsätzlichen Unterscheidung des Falles, in welchem die Seitenzahl des Kreisbogenpolygons eine gerade Zahl $N = 2m$ ist, von demjenigen, in welchem diese Zahl eine ungerade Zahl $N = 2m + 1$ ist. Diese

Unterscheidung ist jedoch in der Natur der behandelten Aufgabe nicht begründet. Die Gesamtheit aller derjenigen Kreisbogenpolygone, welche durch gebrochene Substitutionen ersten Grades in einander übergeführt werden können, hängt in beiden Fällen von $3N-6$ Parametern ab. Für den ersten Fall zählt nun der Herr Verfasser nur $6m-7$ Parameter auf und bemerkt: „uns fehlt in diesem Falle ein von den vorigen unabhängiger invarianter Parameter; sei es, dass ein solcher überhaupt nicht existirt, oder wir ihn nur nicht kennen.“

In Bezug hierauf sei bemerkt, dass als fehlender Parameter beispielsweise eine geeignete unter denjenigen Invarianten gewählt werden kann, welche durch zwei nicht benachbarte Seiten des Kreisbogenpolygons bestimmt sind.

Sz.

O. Fischer. Conforme Abbildung sphärischer Dreiecke auf einander mittels algebraischer Functionen. Leipzig. Metzger u. Wittig.

Die vorliegende, als Inaugural-Dissertation erschienene Arbeit beschäftigt sich ausführlicher mit demselben Gegenstand, welchen der Herr Verfasser in den Leipziger Ber. 1884. p. 17-31 behandelt hat. Da in dem Referat über diese Arbeit (F. d. M. 1884. XVI 740) der Inhalt derselben bereits besprochen ist, so verweisen wir auf dasselbe und fügen nur einige Bemerkungen hinzu.

Sind $z = \frac{z_1}{z_2}$ und $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ complexe Variable, durch welche Punkte auf je einer Kugel dargestellt werden, und setzt man

$$f(z_1, z_2) = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 + z_2^{10}),$$

$$H(z_1, z_2) = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228 z_1^5 z_2^5 (z_1^{10} - z_2^{10}) - 494 z_1^{10} z_2^{10},$$

so geben die Gleichungen $f=0$ und $H=0$ die Eckpunkte eines regulären Dodekaeders und die des entsprechenden Ikosaeders auf der z-Kugel an, und durch die Gleichungen

$$\Phi(z) = \frac{H^3(z_1, z_2)}{12^3 f^5(z_1, z_2)} = Z, \quad \Phi(\eta) = \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{12^3 f^5(\eta_1, \eta_2)} = R$$

ist die z-Kugel auf die Z-Ebene, die η-Kugel auf die R-Ebene so abgebildet, dass jedem Ikosaederdreieck, z. B. einem Dreieck mit den Winkeln $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$, eine Halbebene entspricht, und zwar den drei Eckpunkten entsprechen die Werte $Z = 0, \infty, 1$. Ist dann $R = R(Z)$ eine gewisse rationale Function von Z, so sind die z-Kugel und die η-Kugel so auf einander abgebildet, dass dem Fundamentaldreieck der η-Kugel ein Ikosaederdreieck der z-Kugel entspricht. Es handelt sich nun um die Ermittelung der rationalen Function $R(Z)$ für die verschiedenen möglichen Fälle. Diese hat der Herr Verfasser in einfacher Weise durchgeführt, teilweise nach dem Vorgang von Herrn Schwarz durch Riemann'sche P-Functionen, teilweise durch eine von Herrn Klein herrührende Methode (Cap. I.) Durch eine dieser Methoden wird er dann weiter zu der Darstellung von z_1 und z_2 als Functionen von Z geführt. Diese Untersuchungen bilden den Gegenstand des zweiten Capitels. Im dritten Capitel wird die Frage beantwortet, wann die Gleichung $R = R(z)$, d. h.

$$\Phi(z) - R(\varphi(\eta)) = 0,$$

welche in Bezug auf z vom 60ten Grade ist, sich reduciren lässt. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Nenner des abzubildenden Ikosaederdreiecks n_1, n_2, n_3 (also eines Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\alpha\pi}{n_1}, \frac{\beta\pi}{n_2}, \frac{\gamma\pi}{n_3}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, n_1, n_2, n_3$ ganze Zahlen sind) gleich denen des Fundamentaldreiecks 3, 5 und 2 sind. Alsdann zerfällt die genannte Gleichung in 60 lineare Factoren von der Form $z - r(\eta)$, wo r eine rationale Function bedeutet. Das vierte Capitel beschäftigt sich mit der Darstellung der rationalen Functionen $r(\eta)$. Durch jede Gleichung $z = r(\eta)$ wird die η-Kugel eindeutig so auf die z-Kugel abgebildet, dass dem Fundamentaldreieck $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ ein gewisses Ikosaederdreieck entspricht.

In einer Schlussbemerkung wird gezeigt, wie sich die analogen Aufgaben bezüglich der Oktaeder-, Tetraeder-, Dieder-Dreiecke durchführen lassen.

Die übersichtliche und verhältnismässig einfache Darstellung des immerhin verwickelten Gegenstandes muss anerkennend hervorgehoben werden. A.

Pizzetti. Sulle rappresentazioni geografiche conformi. Rom. Acc. L. Rend. (4) 1, 599-605, 628-632.

Es handelt sich um die Untersuchung, ob und in welcher Weise es möglich ist, eine Fläche, auf welcher sich eine gewisse Gattung von Linien befindet, auf einer anderen gegebenen Fläche conform so abzubilden, dass das Abbildungsmass (Vergrösserungsverhältnis) längs jeder dieser Linien constant ist.

Werden bei jeder Fläche die Punkte auf zwei orthogonale Isothermenscharen bezogen, und sind

$$ds^2 = \lambda^2(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad ds_1^2 = \lambda_1^2(d\alpha_1^2 + d\beta_1^2)$$

die Quadrate der Linienelemente auf beiden Flächen, wenn $\varphi(\alpha, \beta) =$ const. die Gleichung der Liniengruppe auf der ersten Fläche ist, so besteht unter der Voraussetzung, dass die gesuchte conforme Abbildung möglich ist, zunächst die Beziehung:

$$\alpha_1 + i\beta_1 = f(\alpha + i\beta).$$

Werden mit f'_1, f'_2 bezüglich die Abgeleiteten der conjugirten complexen Functionen $f(\alpha + i\beta)$, $f(\alpha - i\beta)$ in Bezug auf $\alpha + i\beta$ und $\alpha - i\beta$ bezeichnet, so ist das Quadrat des Abbildungsmasses ausgedrückt durch

$$m^2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} \cdot f'_1 f'_2.$$

Infolge der gestellten Bedingung muss m^2 eine Function von φ sein, d. h. zur Lösung der gestellten Aufgabe ist es nötig und ausreichend zu untersuchen, ob der Function $f(\alpha + i\beta)$ eine solche Form gegeben werden kann, dass der Ausdruck $\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} f'_1 f'_2$ eine Function von $\varphi(\alpha, \beta)$ wird. In der ersten Abhandlung (S. 599-605) ist diese Untersuchung näher für die Abbildung auf einer Ebene ausgeführt, wobei sich zwei Fälle unterscheiden lassen, von denen jeder eine unendliche Zahl unter sich ähnlicher Abbildungen gestattet. Die Annahme, dass die abzubildende Fläche eine Rotations-

fläche ist, führt in speciellen Fällen zu Mercator's Projection und zur stereographischen Polarprojection. In der zweiten Abhandlung (S. 628-632) ist die Aufgabe so gefasst: Es ist mittels einer conformen Projection eine Fläche auf einer Ebene so abzubilden, dass längs einer bestimmten Linie l jener Fläche das Abbildungsmass einen bestimmten constanten Wert hat und in einem beliebigen Punkte dieser Linie die Abgeleitete dieses Masses in Bezug auf den zu l rechtwinkligen Trajectorienbogen gleich Null ist. Diese Untersuchung führt beim Rotationsellipsoid als abzubildender Fläche zu den Formeln der Gauss'schen Projection der hannoverschen Landesaufnahme. P.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

BRESSE. Cours de mécanique et machines professé à l'École Polytechnique. T. I. Cinématique. Dynamique d'un point matériel. Statique. T. II. Dynamique des systèmes matériels en général. Mécanique spéciale des fluides. Études des machines à l'état de mouvement. Paris. Gauthier-Villars

Beim Tode des Verfassers (1883) hatte der Druck seiner Vorlesungen kaum begonnen; das vorhandene Manuscript erwies sich aber als sehr sorgfältig gearbeitet und durchaus druckfertig. Die Herren Collignon und Leauté haben die Ueberwachung des Druckes übernommen. Herr M. d'Ocagne rühmt in der Revue des questions scientifiques (IX. 3e livr.) die peinliche Genauigkeit der Darstellung. Lp.

J. CH. WALBERER. Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Fünfte durchgesehene Auflage. München Th. Ackermann. VI u. 166 Seiten

In der neuen Auflage des durch seinen Titel genügend gekennzeichneten Werkchens sind keine nennenswerten Aenderungen vorgenommen. Doch möchte der Berichterstatter über einen Punkt der zahlreichen Uebungsaufgaben (125 aus der Statik, 150 aus der Dynamik) bei dieser Gelegenheit eine Bemerkung machen, die eine ungenaue Ausdrucksweise nicht bloss des vorliegenden Buches, sondern sehr vieler Sammlungen elementarer Aufgaben trifft. Die reibungslose Bewegung eines materiellen Punktes auf der schiefen Ebene wird als Aufgabe über eine auf der schiefen Ebene „rollende Kugel" ausgesprochen. Dabei wird ausser Acht gelassen, dass das Rollen eines Umdrehungskörpers auf der schiefen Ebene eine Aufgabe höherer Natur ist und die vorgängige Erledigung der Trägheitsmomente erfordert. Bekanntlich erfährt z. B. der Mittelpunkt einer von der schiefen Ebene hinabrollenden homogenen Kugel eine Beschleunigung, die nur fünf Siebentel von derjenigen Beschleunigung ist, mit welcher ein Körper ohne Reibung auf derselben schiefen Ebene hinabgleitet. Lp.

O. J. Lodge. Elementary mechanics including hydrostatics and pneumatics. London and Edinburgh. W. and R. Chambers. 208 S. 8°.

J. Finger. Elemente der reinen Mechanik, als Vorstudium für die analytische und angewandte Mechanik und für die mathematische Physik an Universitäten und technischen Hochschulen, sowie zum Selbstunterricht. Wien. A. Hölder. XVI u. 792 S. gr. 8°.

Der Bericht über dies Werk ist bereits gegeben in F. d. M. XVI. 1884. 743 ff. Lp.

F. Kraft. Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zur Uebung für die Studirenden der theoretischen Mecha-

nik an Universitäten und technischen Hochschulen. Bd. II. Stuttgart. J. B. Metzler'sche Buchhandlung. VIII u. 656 S. gr. 8°.

Der Bericht über diesen Band ist mit dem über den ersten vereinigt gegeben in F. d. M. XVI. 1884. 745 ff. Lp.

J. WEISBACH. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 5te Aufl. bearbeitet von G. Herrmann. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. (Drei Bände.) Ref. Wiedemann Beibl. X. 210.

M. RÜHLMANN. Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik sowie der damit in Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften. Leipzig. Baumgartner. XII. 553 S. 8°. Ref. Wiedemann Beibl. X. 213.

W. KILLING. Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen. Kronecker J. XCVIII. 1-49.

Von der Bemerkung ausgehend, dass die Bewegungsgleichungen der gewöhnlichen Mechanik sich auf das n-dimensionale Gebiet ausdehnen lassen, stellt sich der Verfasser die Aufgabe, für dieses Gebiet aus den mechanischen Principien die vom Parallelenaxiom unabhängigen Bewegungsgleichungen abzuleiten. Es werden demnach in einer $(n+1)$-fach ausgedehnten Euklidischen Raumform die Bewegungsgleichungen für Punkte aufgestellt, deren Bewegung auf ein n-fach ausgedehntes Kugelgebilde beschränkt ist. Aus diesen allgemeinen Gleichungen werden dann diejenigen, welche für besondere Raumformen gelten, durch specielle Annahmen hinsichtlich des Kugelradius und der Coordinaten gewonnen. In der Methode und den Hülfsmitteln der Untersuchung schliesst sich diese Arbeit genau an die bekannten früheren Arbeiten des Verfassers auf dem Gebiete der nichteuklidischen Raumformen an. Im einzelnen giebt der Verfasser

in der Einleitung einen die Wahl des Stoffes motivirenden Ueberblick über das Ganze. Sodann wird zuerst die Bewegung eines freien Punktes im dreidimensionalen Raum untersucht. Da die Grundbegriffe der Mechanik: Masse, Dichtigkeit, Geschwindigkeit und Kraft, von der Unendlichkeit der Geraden, d. h. vom Parallelenaxiom, unabhängig sind, und selbst das Parallelogramm der Kräfte für ein unendlich kleines Gebiet in Geltung bleibt, so werden die verlangten Bewegungsgleichungen einfach durch Einführung der Weierstrass'schen Coordinaten in die gewöhnlichen Gleichungen erhalten. Als Beispiel dienen die Gesetze der Planetenbewegung. Es folgt die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche mit Anwendung auf das Pendel, und die Bewegung eines Punktsystems im Raume. Unter den Resultaten ist hervorzuheben, dass von den Kepler'schen Gesetzen das erste gar nicht, das dritte nur unwesentlich verändert wird, während im zweiten der doppelte Radius an die Stelle des einfachen tritt. Ebenso bleibt der Isochronismus kleiner Pendelschwingungen, das Hamilton'sche Princip und der Satz von der lebendigen Kraft unverändert. Hingegen werden die Sätze vom Schwerpunkt ungültig. Da die krümmungslose Beschaffenheit unseres Weltraumes neuerdings in Zweifel gezogen worden ist, so gewinnen diese Anwendungen auf physische Erscheinungen dadurch ein besonderes Interesse, dass sie zeigen, nach welchen Richtungen hin die Entscheidung über diese Fragen gesucht werden könnte. In den folgenden Abschnitten wird die Ausdehnung der vorangehenden Untersuchungen auf das n dimensionale Gebiet durchgeführt. Als Beispiele werden u. a. behandelt die kürzesten Linien auf einem Gebilde und die Bewegung eines von einem festen Punkte nach einer beliebigen Function der Entfernung angezogenen Punktes. Hieran schliesst sich eine Erweiterung des Newton'schen Gesetzes, die Theorien der unendlich kleinen und endlichen Bewegung eines Körpers und die der Trägheitsmomente. Schg.

J. Schlesinger. Ueber die Notwendigkeit der Aufstellung eines neuen Kraftbegriffes. Wien. Anz. 10. 13.

„Kräfte sind unvergängliche, verschwindend kleine Wesenheiten der Natur, welche ihr Bestehen einander durch ununterbrochen constante, gegenseitige Wirkung, jedoch nur dann anzeigen, wenn sie sich berühren oder durchdringen.“

Lp.

J. Schlesinger. Die mathematische Formulirung des Gesetzes der Erhaltung der Kraft ist unrichtig. Wien. Anz. 54-56.

Hirn. La notion de force dans la science moderne. Rev. sc. (3) XXXVI. 129-141.

Barlow. New theories of matter and of force. London. S. Low, Marston, Searle and Rivington. XII. 395 S. 8°.

Ludw. Lange. Ueber das Beharrungsgesetz. Leipz. Ber. 333-351.

Dasselbe Thema ist vom Verfasser in W. Wundt's „Philosophischen Studien“ (1884) vorwiegend aus methodologischen Gesichtspunkten behandelt; hier geht er näher auf die mathematisch-physikalische Seite ein und formulirt das Beharrungsgesetz wie folgt:

„Definition I. „Inertialsystem“ heisst ein jedes Coordinatensystem von der Beschaffenheit, dass mit Bezug darauf drei vom selben Raumpunkte projicirte und dann sich selbst überlassene Punkte P, P', P'', welche aber nicht in einer geraden Linie liegen sollen, auf drei beliebigen in einem Punkte zusammenlaufenden Geraden G, G', G'' (z. B. auf den Coordinatenaxen) dahinschreiten.

Theorem I. Mit Bezug auf ein Inertialsystem ist die Bahn jedes beliebigen vierten sich selbst überlassenen Punktes gleichfalls geradlinig.

Definition II. „Inertialzeitscala“ heisst eine jede Zeitscala, in Bezug auf welche ein sich selbst überlassener auf ein

Inertialsystem bezogener Punkt (etwa P) gleichförmig fortschreitet.

Theorem II. In Bezug auf eine Inertialzeitscala ist jeder beliebige andere sich selbst überlassene Punkt in seiner Inertialbahn gleichförmig bewegt."

Kinematische Erwägungen über das Theorem I führen zu dem Resultate: Die geradlinige Bewegung einer Anzahl beweglicher Punkte ist Sache der Convention, so lange diese Anzahl die drei nicht übersteigt. Drei Punkte kann man auf drei vorgeschriebenen festen Geraden sich bewegen lassen, indem man das Coordinatensystem, worauf diese festen Geraden bezogen sind, den Distanzveränderungen der Punkte gleichsam anpasst. Macht man die dynamische Voraussetzung, dass die drei Punkte P, P', P'' materiell und sich selbst überlassen seien, so beweist der Verfasser in dem Falle, dass die drei Punkte gleichzeitig von demselbem Punkte fortgeschleudert und dann sich selbst überlassen werden, den Lehrsatz in der folgenden klareren Fassung: „Ein System, in Bezug worauf drei nicht in einer geraden Linie liegende materielle Punkte, welche gleichzeitig vom selben Raumpunkte fortgeschleudert und dann sich selbst überlassen wurden, drei durch einen Punkt gehende nicht zusammenfallende Geraden beschreiben, ist ein Inertialsystem, d. h. mit Bezug auf ein solches System schreitet jeder beliebige vierte sich selbst überlassene Punkt geradlinig fort".

Kritische Betrachtungen über die einschlägigen neueren Arbeiten der Herren C. Neumann, Mach, Streintz, J. Thomson bilden den Schluss der Abhandlung. Lp.

Ludw. Lange. Nochmals über das Beharrungsgesetz. Wundt Philos Stud. II. 539-542.

Im wesentlichen ein Auszug aus dem im vorangehenden Berichte besprochenen Aufsatze. Lp.

J. Thomson. On the law of inertia, the principle of chronometry; and the principle of absolute clinural rest, and of absolute rotation. Edinb Proc XII 568-578.

J. Thomson. A problem of point-motions for which a reference-frame can so exist as to have the motions of the points relative to it rectilinear and mutually proportional. Edinb. Proc. XII. 730-742.

P. G. Tait Note on reference-frames. Edinb Proc XII. 743-745.

Die allgemeine Ansicht scheint folgende zu sein. Ein Punkt des Raumes ist von einem anderen nicht unterscheidbar, und es besteht daher eine wesentliche Schwierigkeit, einen klaren Begriff sei es von der Ruhe oder von der geradlinigen Bewegung zu bilden. Ausserdem haben wir keine vorgängige Kenntnis von irgend einem Principe der Zeitmessung, und aus diesem hinzutretenden Grunde stehen wir vor einer wesentlichen uranfänglichen Schwierigkeit, mit den Worten „gleichförmige geradlinige Bewegung“ in ihrem gewöhnlichen Gebrauche irgend einen deutlichen Sinn zu verbinden, da die Gleichförmigkeit die der Gleichheit der in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume ist. Denken wir uns also ein System von Teilchen in relativer Bewegung, und setzen wir voraus, dass wir in verschiedenen Zeitmomenten alles Wahrnehmbare beobachten können, nämlich die Configuration des Systems in jedem Momente; können wir es haben, oder wenn dies der Fall, wie können wir ein festes oder bewegliches Bezugssystem und einen Zeitzeiger (oder auch ein System rechtwinkliger Axen und einen rotirenden Uhrzeiger) construiren, so dass in Bezug auf diese Axen und auf die durch den Uhrzeiger angezeigte Zeit die Teilchen des Systems in irgend einem Momente sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten in geraden Linien bewegen, welche in Bezug auf die rechtwinkligen Axen fixirt und mit ihnen weiter beweglich sind? Cly. (Lp.)

E. Wohlwill. Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes. Gaea XXI. 145-175.

Vgl. F. d. M. XVI. 1884. 798. Lp.

W. Winter. Ueber die Dimensionen der abgeleiteten Grössen absoluter Mass-Systeme. Exner Rep. XXI. 775-801.

Wie Sir W. Thomson und Clerk Maxwell vorgeschlagen haben, kann man statt der drei Fundamental-Einheiten des *CGS*-Systems bloss zwei unabhängige Einheiten annehmen und die dritte durch die Newton'sche Gravitation definiren. Der Verfasser führt nach einer kritischen Einleitung, die sich auf das *CGS*-System bezieht, diesen Gedanken durch, indem er zunächst nur die Einheiten C und G als unabhängig beibehält. Die Krafteinheit wird sofort als die Kraft definirt, mit welcher sich zwei Masseneinheiten (G), die $1C$ von einander entfernt sind, infolge der Gravitation anziehen. Mithin wird

$$F = G.G:C^2 = C^{-2}.G^2.$$

Der Zahlwert dieser Krafteinheit ist ungefähr $67 CGS^{-2}.10^{-9}$. Danach wird die Zeiteinheit des „Universalgravitationssystems" als diejenige Zeit erklärt, in welcher $1G$, um ein festes G in $1C$ Abstand rotirend, den dem Radius gleichen Bogen zurücklegt. In diesem Falle ist nämlich die Centrifugalkraft gleich der Krafteinheit, so dass das rotirende G sich frei bewegt. Die so festgesetzte Zeiteinheit beträgt ungefähr 3860 Sekunden. Dann hat die Zeit S die Dimension $S = C^{\frac{3}{2}} G^{-\frac{1}{2}}$, die Geschwindigkeit $V = C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$, die Arbeit $A = C^{-1} G$. Danach werden die elektrischen Einheiten abgeleitet; es ist indes unmöglich, alle die getroffenen Feststellungen hier zu wiederholen. Das Ergebnis der Untersuchung wird wie folgt ausgesprochen: 1. Die Dimensionen können leicht in die Form gebracht werden, dass sie genaue Formeln der dargestellten Grössen sind. 2. Die Dimensionen sind charakteristische Ausdrücke der dargestellten Grössen und ers[illegible] deshalb bei gleichartigen Grössen stets in der gleiche[illegible] 3. Das *CGS*-System enthält eine überflüssige Einheit, dur[illegible]

Elimination sich die Dimensionen wesentlich vereinfachen. 4. Die Dimensionen der elektromagnetischen Einheiten unterscheiden sich von denen der elektrostatischen Einheiten bloss durch die Dimension einer Geschwindigkeit, die aber, da sie constant ist, vom Dimensionalausdruck abgespalten werden kann, so dass in beiden Systemen die Dimensionen gleichwertiger Grössen auch gleich sind. 5. Man kann noch mehrere zweigliedrige Systeme abgeleiteter Einheiten herstellen. In einer Tafel werden die Dimensionen der abgeleiteten Einheiten in folgenden Systemen zusammengestellt:

1) *CGS*, 2) *CG*, 3) *CS*, 4) *GS*, 5) *FG*, 6) *FC*, 7) *FS*.

Lp.

M. Beckmann. Das absolute Mass-System in der Mechanik und in der Elektricität. Pr. Realgymn. Trier. 10 S. 4°. u. 1 Tafel.

Ein Versuch, für einen Leser, bei welchem ausgedehnte physikalische Kenntnisse nicht vorausgesetzt werden, die elektrischen und magnetischen Grössen begrifflich zu entwickeln und die Einheiten, durch welche wir sie messen, auf elementarem Wege aus den fundamentalen herzuleiten. „Ein tüchtiger Primaner, der den Cursus der Physik in unserer Secunda mit Erfolg durchgemacht hat, wird auf irgend erhebliche Schwierigkeiten, glaube ich, nicht stossen."

Der Stoff ist auf fünf Capitel verteilt. Nach einer Einleitung werden zuerst die fundamentalen Einheiten und die abgeleiteten Begriffe und Einheiten aus der Mechanik besprochen. Als von der Natur gebildete Masseinheiten für Länge und Zeit empfiehlt Hr. Beckmann Multipla bezw. von der Wellenlänge und Schwingungsdauer des Natriumlichtes. Statt wie in dem conventionellen System die Masseneinheit neben der Längen- und Zeiteinheit als selbständige Einheit einzuführen, schlägt der Verfasser vor, nach dem Vorgange von Gauss im Ausdrucke für die Newton'sche Gravitation $\gamma \frac{mm_1}{r^2}$ den Factor γ gleich Eins zu

setzen, also zu definiren: „Masseneinheit ist diejenige, welche irgend einer zweiten durch die Längeneinheit von ihr getrennten Masse die Einheit der Beschleunigung erteilt. Diese neue Masseneinheit (im *CGS* System gleich 153.10^5 Gramm) wird „ein Newton“ genannt. Sind *K*, *L*, *M*, *T* bezw. Kraft, Länge, Masse, Zeit, so wird dann bekanntlich $\dim(M) = (L^3T^{-2})$, $\dim(K) = (L^4T^{-4})$ oder gleich der vierten Potenz einer Geschwindigkeit. Uebrigens tritt dieser Vorschlag erst gegen das Ende des rein mechanischen Teils (S. 42) auf. Es folgen (S. 46 ff.) die Erörterungen über die abgeleiteten Begriffe und Einheiten aus der Elektrostatik, endlich über die abgeleiteten Begriffe und Einheiten aus der Lehre vom Magnetismus.

Die Darstellung ist elementar und klar, trägt jedoch unnötiger Weise des Verfassers persönliche Ansichten über das Wesen der Kräfte, z. B. der Gravitationskraft, in den Gegenstand hinein. Ein Primaner dürfte indes recht erhebliche Schwierigkeiten bei der Bewältigung des umfangreichen Aufsatzes finden. Die öfter vorkommenden Ungenauigkeiten können hier nicht aufgezählt werden, wie z. B. (S. 16) die Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Erde gleich 2π dividirt durch 86400, oder in der obigen Definition des Newton wie durchweg in der Schrift der Mangel an Unterscheidung zwischen Gesetz für Massenpunkte und Massen von endlicher Ausdehnung. Lp.

A. von Waltenhofen. Die internationalen ... Masse; insbesondere die elektrischen Masse. Braunschweig. Vieweg u. Sohn. 1... 48 S. 8°.

A. Serpieri. Die mechanischen, elektrostatisch... elektromagnetischen absoluten Masse mit Anw... auf mehrfache Aufgaben elementar abgehandelt. ... von R. v. Reichenbach. Leipzig ... X, 12 ...

Referat in Wiedemann Beibl. IX ...

Lp.

G. Kainz. Hamilton's Theorie und ihre Anwendung auf Probleme der Statik und Dynamik. Pr. Studienanstalt Münnerstadt. 64 S. u. V Taf. 8°.

„Zweck dieser kleinen Schrift ist, Hamilton's Lehre in einfacher klarer Form vorzuführen, ihre Anwendbarkeit auf Probleme der Statik, namentlich auf Fadencurven nachzuweisen und durch Beispiele zu beleuchten.“

Erste Abteilung: Die Theorie. I. und II. Ableitung der bekannten Gleichungen. III. Erweiterung der Hamilton'schen Methode. Die Zulässigkeit ihrer Anwendung auf Probleme der Statik (Fadencurven). Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen unelastischer Fäden.

Zweite Abteilung: Anwendungen. I. Bewegung eines schweren Punktes auf der Oberfläche eines verticalen Kreiscylinders, dargestellt in Hamilton's kanonischer Gleichungsform. II. Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Rotationsparaboloid unter dem Einfluss der Schwerkraft. III. Der unelastische Faden auf einem verticalen Kreiscylinder unter dem Einfluss der Schwere. Die Hauptgleichungen für die Probleme II. und III. werden aus dem „Princip der variirenden Wirkung“ abgeleitet.

Die Schrift citirt nur Hamilton's Publicationen für die allgemeine Theorie und ältere Werke über die behandelten specielleren Themata. Es bleibt sogar unklar, ob der Verfasser die klassische Darstellung der Hamilton'schen Theorie durch C. G. J. Jacobi gekannt hat, die in den „Vorlesungen über Dynamik“ gegeben ist. Denn nur einmal kommt S. 38 der Name Jacobi's in unbestimmter Beziehung vor. Bei Jacobi findet man ausser einer klareren und erschöpfenden Erörterung aller Gesichtspunkte auch mehr und tiefer liegende Probleme nach der Hamilton'schen Theorie behandelt als die Aufgaben unter I. und III. der zweiten Abteilung, deren Lösung auf der Hand liegt. Dass die Aufgabe unter II. schon anderweitig vollständig gelöst, das Resultat anschaulich gedeutet ist (von Herrn Züge in Hoppe A[illegible] 58-74, cf. F. d. M. XV. 1883. 816), wird ebenso wenig [illegible] wie bei den Fadencurven die vielen neueren Arbe[illegible]

besondere die von Herrn Padelletti: „Sulla teoria dei poligoni e delle curve funicolari" in Battaglini G. XIV. (1876), wo zu dem Hamilton'schen Princip für die Bewegung eines Punktes das Analogon für das Gleichgewicht eines Fadens aufgestellt worden ist, und die Note von Herrn Appell: „Réduction à la forme canonique des équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible" in C. R. XCVI. 688 (F. d. M. XV. 1883. 794).

Lp.

O. v. Sallwürk. Beiträge zu einer elementaren Dynamik. Pr. Gymn. Konstanz. 21 S. u. 4 Taf. 4°.

Die ersten drei Paragraphen besprechen kurz die Verdienste von Galilei, Huygens und Newton um die Gründung der Dynamik. In den §§ 4-13 sind die Newton'schen Beweise des Attractionsgesetzes aus den Principien mit Beibehaltung des Hauptgedankens kurz wiedergegeben worden. Die folgenden Paragraphen (15-23) enthalten die analytische Darstellung derselben Schlüsse nach der in den Lehrbüchern über Mechanik üblichen Methode; unter andern wird die Hamilton'sche Manier durch den Quaternionencalcül kurz gestreift. Die elementare Darstellung des Gegenstandes bei Möbius und in den Schriften von Herrn K. Schellbach wird von dem Verfasser nirgends erwähnt; ebensowenig sind die französischen Werke über Kinematik benutzt worden.

Lp.

K[illegible]

F. Witt[illegible]

Sch[illegible]

Herr [illegible]

Strahls[illegible]

ist, die Bewegung der Geraden in der Ebene behandelt. In der vorliegenden Arbeit betrachtet er die Bewegung einer Ebene, die er nicht als Inbegriff aller ihrer Punkte, sondern als geometrisches Element für sich auffasst. Jede Ortsveränderung im Raume kann als eine Drehung um eine in der Ebene gelegene Gerade, die Drehaxe, angesehen werden. Bei Voraussetzung einer allgemeinen Bewegung wird in jedem Zeitelemente eine andere Gerade der Ebene als Drehaxe auftreten. Die Drehaxen bilden eine abwickelbare Fläche, ihre Wendecurve kann als Bahn der Ebenen gelten, insofern sie die aufeinander folgenden Lagen der Ebene unzweideutig bestimmt.

Wird mit $d\sigma$ eine elementare Drehung um eine Drehaxe bezeichnet, so ist $V = \frac{d\sigma}{dt}$ die Drehgeschwindigkeit der Ebene. Die darauf folgende Drehung erfolgt um eine Drehaxe, welche jene schneidet; die Drehgeschwindigkeit um diese zweite Axe sei mit V' bezeichnet. Trägt man auf den Drehaxen von ihrem Schnittpunkt aus die Grössen V und V' in Grösse und Richtung auf, so lässt sich die Differenz von V' und V in geometrischem Sinne bestimmen: es ist dies die Seite des Parallelogramms, für welches V' Diagonale und V die andere Parallelogrammseite ist. Wird die construirte Länge durch Γdt bezeichnet, so ist Γ die Drehbeschleunigung. Wie nun die Componenten der Beschleunigung eines Punktes in Verbindung mit einem bestimmten anfänglichen Bewegungszustande die Art der Bewegung eines Punktes vollkommen beschreiben, so können die Componenten der Beschleunigung Γ nach Richtung dreier Axen nebst einem bestimmten anfänglichen Bewegungszustande der Ebene die Form der Bewegung dieser Ebene kennzeichnen. Zunächst wird entsprechend der Bewegung eines Punktes in der Ebene die Bewegung einer Ebene durch einen festen Punkt O des Raumes behandelt.

Wird die bewegliche Ebene auf drei senkrechte Coordinatenaxen durch O, welche fest zu denken sind, bezogen, so lässt sich die Lage der Ebene, welche mit den Coordinatenaxen bezüglich die Winkel λ, μ, ν bilden mag, durch die Ebenencoordinaten

$\xi = \sin\lambda$, $\eta = \sin\mu$, $\zeta = \sin\nu$ beschreiben. Die Coordinaten sind durch die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ gebunden. Für V^2 findet alsdann Herr Wittenbauer die Form $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$, und die Componenten der Drehgeschwindigkeit werden angegeben durch

$$V_\xi = -\eta\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\frac{d\eta}{dt}, \quad V_\eta = -\zeta\frac{d\xi}{dt} + \xi\frac{d\zeta}{dt},$$

$$V_\zeta = -\xi\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d\xi}{dt},$$

die Drehbeschleunigung aber durch

$$\Gamma_\xi = -\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \Gamma_\eta = -\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

$$\Gamma_\zeta = -\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Sind die Drehbeschleunigungen gegeben, so ist die Bestimmung von V auf eine einfache Quadratur zurückführbar durch die Gleichung

$$V^2 = 2\int\{(\eta\Gamma_\zeta - \zeta\Gamma_\eta)d\xi + (\zeta\Gamma_\xi - \xi\Gamma_\zeta)d\eta + (\xi\Gamma_\eta - \eta\Gamma_\xi)d\zeta\}.$$

Es hat also die Relation eine ähnliche Wichtigkeit für die Bewegungsprobleme der Ebene, wie die Gleichung der lebendigen Kräfte für die Bewegung eines Punktes.

Ist die Bewegung der Ebene nicht an einen festen Punkt gebunden, sondern ganz allgemeiner Natur, so lässt sich durch einen festen Punkt O im Raum stets eine Parallele mit der bewegten Ebene denken. Auf diese parallele Ebene lässt sich in jedem Moment die Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung ungeändert übertragen, so dass sich diese Ebene hinsichtlich ihrer Richtung genau so bewegt, wie die Ebene im Raum. Die so hervorgerufene Bewegung der Ebene durch O wird die nach O reducirte Bewegung der Ebene im Raume genannt. Jede Bewegung einer Ebene lässt sich nun in eine nach O reducirte Bewegung und in eine Translationsbewegung zerlegen. Ist e der Abstand der Ebene im Raume von O, so wird die Tran

geschwindigkeit durch $\mathfrak{V} = \frac{d\varrho}{dt}$, die Translationsbeschleunigung durch $\mathfrak{T} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \varrho V^2$ gegeben. Specielle Beispiele erläutern die aufgestellte Theorie. Schn.

F. Wittenbauer. Ueber die Bewegung einer Ebene im Raum. Wien. Anz. 16-19.

Eine kurze Angabe der wesentlichen Punkte der Bewegungstheorie einer Ebene, über welche oben (F. Wittenbauer „Die Ebene als bewegtes Element") berichtet worden ist. Schn.

Dewulf. Théorèmes de Géométrie et de Cinématique. Nouv. Ann. (3) IV. 79-80.

Die Verschiebung einer Ebene in sich selbst sei gegeben durch das augenblickliche Drehungscentrum O und den Kreis der Centren (C). Die Punkte irgend einer Curve G der Ebene beschreiben bei der Bewegung Trajectorien, ihre Krümmungscentren bilden die Curve Γ. Diese Curve Γ kann erzeugt werden durch die Projection des Durchschnitts zweier Kegel auf die Ebene. Der eine Kegel hat zur Basis den Kreis (C) und zur Spitze irgend einen Punkt S des Lotes, welches in O zur beweglichen Ebene errichtet ist, der andere hat zur Spitze den Punkt O und zur Basis die Projection (G') der Curve G auf eine Ebene, welche durch S parallel mit der beweglichen Ebene geführt ist. Es folgen Anwendungen dieses Theorems auf specielle Fälle. Schn.

C. Formenti. Sul movimento geometrico dei sistemi invariabili. Lomb. Ist. Rend. XVIII. 195-200, 238-242, 418-431.

Diese drei Artikel bilden die Fortsetzungen und den Schluss der analytischen Behandlung für die Kinematik eines starren Systems, über deren Anfang in F. d. M. XVI. 1884. 769 berichtet

ist. Die erste Note beschäftigt sich mit der Transformation der vom Verfasser eingeführten und im vorjährigen Berichte erklärten kinematischen Coordinaten, nämlich Verwandlung der orthogonalen und der tedraedrischen in kinematische und umgekehrt, der kinematischen in andere kinematische, der kinematischen bezüglich eines Tetraeders in tetraedrische bezüglich eines anderen, u. s. w. In der zweiten Notiz werden mit Hülfe der entwickelten Formeln die Eigenschaften der Ebenen in Bezug auf ihre Mittelpunkte abgeleitet. Darauf wird der Begriff des „Momentes eines Punktes bezüglich eines anderen“ definirt als das Moment der Strecke, welche den ersten mit dem zweiten verbindet. Ein Punkt und eine Ebene heissen „entsprechend“, wenn der Punkt dasselbe Moment bezüglich aller Punkte der Ebene hat. Zwei Gerade, die so beschaffen sind, dass jeder Punkt der einen dasselbe Moment bezüglich jedes Punktes der andern hat, heissen „entsprechende Gerade“. Die Beziehungen dieser entsprechenden Gebilde werden näher untersucht. Die letzte umfangreichste Abhandlung stellt zunächst den Begriff der „zugeordneten Punkte“ (punti congiunti) zweier gegebenen Ebenen und Geraden auf: Zieht man vom Mittelpunkte p der einen Ebene eine Parallele zu ihrer Centralaxe, so schneidet dieselbe im allgemeinen die andere Ebene in einem Punkte β, der dasselbe Moment bezüglich aller Punkte der ersten Ebene hat; ähnlich entsteht der Punkt α der ersten Ebene. Beide Punkte α, β heissen die zugeordneten Punkte der Ebenen. Moment zweier Ebenen heisst das Moment ihrer zugeordneten Punkte. Ebenso giebt es auf zwei Geraden im allgemeinen je einen Punkt von demselben Momente in Bezug auf jeden Punkt der anderen. Alle diese Eigenschaften werden analytisch begründet, über sie zahlreiche Aufgaben gelöst.

Lp.

A. Schönflies. Zur Theorie der Bewegung räumlicher Systeme. Kronecker J. XCVIII. 265-290.

Wenn ein starres System Σ in eine andere Lage Σ_1 und aus dieser in Σ_2 übergeführt wird, so geht irgend ein Punkt P

in die Lage P_1 und aus dieser in die Lage P_2 über. Denkt man in der Mitte in der Geraden $\overline{PP}_1$ je eine Normalebene π' errichtet, so stehen diese, welche das System Σ' bilden mögen, mit den Punkten P des Systems Σ in reciproker Verwandtschaft. Ebenso entspringt aus den Punkten P_1 und P_2 ein System Σ_1', welches mit dem System Σ_1 reciprok ist. Da aber Σ und Σ_1 congruent sind, so sind Σ' und Σ_1' collinear. Je zwei entsprechende Normalebenen π' und π_1' schneiden sich in einer Geraden x; durch Drehung um diese kann P in P_1 und in P_2 übergeführt werden. Diese Gerade wird Mittelpunktsaxe genannt, und die den Punkten P zugehörigen Mittelpunktsaxen x bilden einen allgemeinen tetraedralen Strahlencomplex.

Die Beziehungen der Punkte P des Systems Σ zu den Elementen jenes Strahlencomplexes führen den Verfasser zu folgenden interessanten Ergebnissen:

Alle Punkte des starren Systems, für welche drei aufeinander folgende Lagen in derselben Geraden liegen, bilden im allgemeinen eine Raumcurve i^3 dritter Ordnung. Dieselbe geht durch die unendlich fernen Punkte der beiden Geraden des Systems, um welche die beiden Schraubenbewegungen, die dasselbe erleidet, stattfinden. Sind diese Axen, um welche die beiden Schraubenbewegungen stattfinden, einander parallel, so zerfällt i^3, und es giebt stets eine Gerade, deren sämtliche Punkte die Eigenschaft haben, dass die drei Lagen P, P_1, P_2 in einer Geraden enthalten sind. Existirt umgekehrt eine solche Gerade, so sind die beiden Axen der Schraubenbewegung einander parallel.

Sind $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ vier verschiedene Lagen eines starren Systems und P, P_1, P_2, P_3 homologe Punkte in diesen vier Lagen, so giebt es einen Punkt P', welcher von jenen vier Punkten gleiche Entfernung hat. Das System der Punkte P' steht mit dem System der Punkte P in eindeutiger Verwandtschaft. Aus der Untersuchung dieser Verwandtschaft wird folgendes Theorem gewonnen:

Es giebt in dem räumlichen System Σ unendlich viele Punkte P von der Eigenschaft, dass die vier Lagen P, P_1, P_2, P_3 in einer

einzigen Ebene liegen. Die Gesamtheit derselben bildet im allgemeinen eine Fläche dritter Ordnung F^3. Auf derselben liegt auch die oben erwähnte Raumcurve i^3.

So wie die Fläche F^3 zu den Lagen $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ des starren Systems gehört, so giebt es auch eine Fläche F_1^3, die zu den Lagen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ gehört, und die Curve i_1^3 enthält. Beide Flächen schneiden sich in einer Raumcurve neunter Ordnung, welche aber in die Curve i_1^3 und in eine Curve C^6 sechster Ordnung zerfällt. Diese Curve C^6 enthält diejenigen Punkte des starren Systems Σ, für welche fünf Lagen P, P_1, P_2, P_3, P_4 derselben Ebene angehören. Die Bedingung endlich, dass sechs auf einander folgende Lagen $P, P_1, \ldots, P_5$ derselben Ebene angehören, erfüllen neun Punkte des starren Systems.

Auf der Fläche F^3 giebt es noch eine andere Curve sechster Ordnung k^6, welche diejenigen Punkte des starren Systems enthält, welche bei vier auf einander folgenden Lagen demselben Kreise angehören.

Die Punkte des starren Systems, welche bei fünf auf einander folgenden Lagen einer Kugel angehören, bilden eine Fläche vierter Ordnung F^4, die Punkte, welche während sechs auf einander folgender Lagen auf einer Kugel bleiben, eine Raumcurve zehnter Ordnung; endlich haben 16 Punkte die Eigenschaft, während sieben auf einander folgender Lagen auf derselben Kugel zu bleiben.

Setzt man bei obigen Relationen unendlich nahe Verschiebungen voraus, so gehen die Sätze in Theoreme über die Krümmung der Bahncurven über, welche von den Punkten des starren Systems beschrieben werden. Schn.

A. Schönflies. Sur une loi de réciprocité dans la théorie du déplacement d'un corps solide. C. R. CI. 150-153.

Wenn zwei starre Systeme Σ und Σ' ihre gegenseitige Lage im Raum ändern, so lässt sich entweder Σ' fest denken, so dass sich Σ gegen Σ' bewegt, oder es lässt sich Σ als festes System

betrachten, gegen welches Σ' seine Bewegung ausführt. Diese Bewegung wird im Gegensatz zur ersten als indirecte Bewegung bezeichnet.

Während der Bewegung beschreibt jeder Punkt P des Systems Σ eine Bahn im System Σ' und umgekehrt jeder Punkt Q' des Systems Σ' eine Bahn im System Σ. Für die Bahnen der Punkte P des Systems Σ und die der Punkte Q' im System Σ' stellt der Verfasser gewisse Gesetze der Reciprocität auf.

Liegt Q' in einer Normalebene der Bahn, welche P beschreibt, so liegt auch P in der Normalebene der Bahn, welche Q' bei der indirecten Bewegung macht.

Liegt Q' auf der Krümmungsaxe der Bahn von P, so liegt P auf der Krümmungsaxe der Bahn von Q'.

Ist P' das Centrum der osculirenden Kugel für die Bahn von P, so ist für die indirecte Bewegung P das Centrum der osculirenden Kugel für die Bahn von P'.

In Kronecker J. XCVIII. p. 277 hat Herr Schönflies bewiesen, dass die Punkte eines Systems Σ, deren Bahnen fünfpunktig durch eine Kugel osculirt werden, auf einer Fläche F^4 vierten Grades enthalten sind. Die Mittelpunkte dieser Kugeln beschreiben bei der indirecten Bewegung Bahnen, welche gleichfalls fünfpunktig osculirt werden; sie liegen also auf einer Fläche F'^4 vierter Ordnung. Beide Flächen F^4 und F'^4 haben für beide Bewegungsformen vollständig reciproke Beziehung.

Andere reciproke Beziehungen finden statt für die Krümmungsaxen der Bahnen von P im System Σ' und der Bahnen von Q' im System Σ bei der indirecten Bewegung, doch mögen obige Bemerkungen zur Charakterisirung der Arbeit ausreichen.

Schn.

A. Schönflies. Sur la courbure des lignes décrites par les points d'un solide invariable en mouvement.
Liège Mém. (2) XI. 9 p.

Le Paige. Rapport. Liège Mém. (2) XI. 2 p.

Der Verfasser behandelt in einfacher Weise verschiedene,

auf den im Titel bezeichneten Gegenstand bezügliche Fragen, indem er von der folgenden Bemerkung Chasles' ausgeht: Wenn ein Körper eine Verrückung erleidet, so bildet jeder seiner Punkte und die zur Trajectorie senkrechte entsprechende Ebene ein Polarsystem. Unter den erreichten Ergebnissen wollen wir folgendes anführen: Die Punkte des unveränderlichen Systems, die in einem gegebenen Augenblicke durch Wendepunkte auf ihren Bahnen gehen, liegen auf einer kubischen Raumcurve; nach dem Berichterstatter liegt diese Curve wahrscheinlich auf einem Umdrehungscylinder. Mn. (Lp.)

A. Schönflies. Sur la courbure des trajectoires des points d'un système solide dont le mouvement est le plus général possible. Liège Mém. (2) XI. 15 p.

Fortsetzung und Vervollständigung der eben besprochenen Arbeit. Mn. (Lp.)

G. Schouten. De eindige verplaatsing van een vast lichaam. Nieuw Arch. XII 188-203.

Rein analytischer Beweis für den Satz, dass jede endliche Aenderung der Lage eines festen Körpers zurückgeführt werden kann auf eine Translation längs einer Axe und eine Rotation um diese Axe. In dem bekannten Lehrbuch der Mechanik von Duhamel ist ein solcher Beweis gegeben; doch findet man in der vorliegenden Schrift eine andere Methode befolgt, bei welcher alle Formeln eine geometrische Bedeutung zulassen. Von den Transformationsformeln für ein rechtwinkliges System im Raume ausgehend, behandelt Verfasser zuerst den besondern Fall, dass der Ursprung fest ist, und sodann den allgemeinen Fall, wobei keine Voraussetzung gemacht ist. Schliesslich werden die Gleichungen der Rotations- und Translationsaxe aufgestellt, es wird der feste Punkt bestimmt, durch welchen sie geht, und die Grösse der Rotation und der Translation abgeleitet. G.

de Tilly. Sur l'axe central et l'axe instantané glissant. Mathesis V. 145-152.

Die Note ist eine verbesserte und vervollständigte Bearbeitung einiger Teile dreier früheren Noten (Belg. Bull. 1873 (2) XXXV. 24-30; Nouv. Corresp. Math. 1875. I. 36-41; Belg. Bull. (3) V. 401-403). Sie enthält eine gründliche Untersuchung über die Existenz der im Titel genannten Axen.

Mn. (Lp.)

D. Padelletti. Sopra un' estensione del concetto di polo e caratteristica in cinematica. Nap. Rend. XXIII 51-55.

Bei einer im Raum beweglichen starren Oberfläche werden „verallgemeinerte Pole“ diejenigen unter ihren Punkten genannt, deren Geschwindigkeiten senkrecht zur Oberfläche gerichtet sind, „verallgemeinerte Charakteristik“ der Ort derjenigen unter ihren Punkten, deren Geschwindigkeiten in Tangenten zur Oberfläche liegen. Ist die Ordnung der Fläche n, so ist die Zahl der Pole im allgemeinen n^3, die Ordnung der Charakteristik im allgemeinen n^2.

Lp.

H. Resal. Sur le roulement des surfaces. C. R. C. 260-263.

Es sei S_1 eine feste und S eine darauf bewegliche Fläche, welche sich momentan in einem Punkte O berühren. Geht im nächstfolgenden Moment ein dem Punkte O unendlich naher Punkt O_1 der Fläche S in einen Punkt O_1' der Fläche S_1 in der Art über, dass auch die Tangentialebenen in O_1 und O_1' zur Deckung kommen, so rollt die Fläche S auf der Fläche S_1. Auf Grund dieser Begriffsbestimmung des Rollens der Fläche S auf der Fläche S_1 giebt Herr Resal eine Analyse des Bewegungsvorganges.

Schn.

W. J. C. Miller, A. Mukhopádhyáy, N. Sarkar. Solution of questions 4865, 6880, 7212. Ed Times XLIII. 56-57.

Eine ebene Curve rollt ohne zu gleiten auf einer Geraden; ein fest mit ihr verbundener Punkt O beschreibt dabei eine Curve. Diese Curve ist zuerst allgemein, sodann in folgenden Fällen zu bestimmen: 1) Parabel mit O als Brennpunkt (Kettenlinie), 2) Kreis mit O auf der Peripherie (Cykloide), 3) gleichseitige Hyperbel (Cykloide), 4) Lemniskate, 5) Kardioide, 6) $r^m = a^m \cos m\theta$. Ist s_1 der Umfang einer Schleife von 6), s_2 derjenige der zugehörigen Ortscurve von O, so ist

$$s_1 s_2 = 2\left(\frac{1}{m}+1\right)\pi a^2.$$

Lp.

A. Mannheim. Représentation plane relative aux déplacements d'une figure de forme invariable assujettie à quatre conditions. C. R. C. 268-271.

Wenn man in den Centralpunkten der Elementarflächen eines Strahlenbündels Normalen zu diesen Elementarflächen errichtet, so sind diese Geraden Erzeugende eines Plücker'schen Conoids oder, wie Herr A. Cayley diese Fläche genannt hat, eines Cylindroids. Durch diesen Satz, den Herr Mannheim entwickelt, ist mit einem Strahlenbündel eine derartige Plücker'sche Fläche in Verbindung gebracht. Für die Verrückung eines starren Körpers, dessen Bewegung vier Bedingungen unterworfen ist, ste[llt] das Plücker'sche Conoid den Ort der Axen dar, um welche [in] Form von Schraubenbewegungen die möglichen Verrückung[en] des Körpers erzeugt werden können. Durch die Beziehung[,] welche dieses Conoid zu einem Strahlenbündel gewinnt, welche[s] von einer Geraden bei den möglichen Verrückungen erzeugt wird, kann die graphische Darstellung des Strah[illegible] F. d. M. IV. 1872. 287) auch die Verschiebunge[n] [illegible] welche unter vier Bedingungen für einen Körpe[r] [illegible] Der darstellende Kreis des Strahlenbündels cha[illegible]

die möglichen Verschiebungen. Damit ist die Darstellung gewonnen, welche Herr R. S. Ball 1883 der Kgl. Akad. von Irland unter dem Titel „On a plane representation of certain dynamical problems in the theory of a rigid body" vorgelegt hat.

Schn.

P. Somoff. Ueber die Bewegung ähnlich veränderlicher ebener Systeme. Schlömilch Z. XXX. 193-209.

Nach einer analytischen Darstellung der Bewegung ähnlich veränderlicher ebener Systeme unterwirft der Verfasser die Punkte einer Ebene der gleichzeitigen Bewegung zweier ähnlichen Systeme, setzt die daraus resultirende Bewegungsform zusammen, betrachtet die relative Bewegung des einen Systems gegen das andere und entwickelt aus der relativen Bewegung und der Führungsbewegung die Elemente der absoluten Bewegung. Dabei ergeben sich gewisse Analogien mit der Bewegung starrer Systeme.

Schn.

P. Somoff. Ueber einen Satz von Burmester. Schlömilch Z. XXX. 248-250.

Der betreffende Satz bezieht sich auf die Bewegung ebener veränderlicher Systeme und lautet: „Die Curve, welche von den Bahnen der Punkte einer Systemcurve umhüllt wird, ist zugleich die Enveloppe verschiedener Phasen derselben Systemcurve". Dieser Satz lässt sich in einem bestimmten Sinne auch auf ein räumliches continuirlich-veränderliches System ausdehnen. Ein Beweis dafür wird in analytischer Form geführt. Schn.

Bobylew. Ueber die relative Bewegung eines Punktes in einem in continuirlicher Deformation begriffenen Medium. Schlömilch Z. XXX. 326-334.

Ein Medium sei in continuirlicher Deformation begriffen, und ein Punkt M durchschreite dasselbe. Der bewegliche Punkt

fällt mit dem Fortschreiten der Zeit mit einer Reihe von Punkten des Mediums zusammen, und diese Punktreihe bildet die relative Bahn des Punktes M im Medium. Die Bewegung durch diese Punktreihe führt zu dem Begriff der relativen Geschwindigkeit und Beschleunigung in Rücksicht auf das Medium. Aber jeder Punkt der Punktreihe hat noch eine Führungsbewegung, welche durch die Deformation des Mediums bedingt ist, und auch dieser Bewegung gehört eine Geschwindigkeit und Beschleunigung zu. Aus beiden Bewegungen resultirt die absolute Bewegung. Diese Gedanken werden in analytische Form gebracht, und alsdann die absolute Bewegung in ihrer Beziehung zur relativen Bewegung und zur Führungsbewegung discutirt.

Schn.

R. H. Smith. A new graphic analysis of the kinematics of mechanisms. Edinb. Trans. XXXII. 507-517.

Ein Mechanismus wird definirt als eine Coordination von Platten, Stäben oder biegsamen Gliedern, die mit einander derartig verbunden sind, dass, während die Teile sich relativ zu einander bewegen können, die relativen Stellungen aller der verschiedenen Teile für jede gegebene relative Stellung irgend zweier Teile bestimmt sind. Daraus folgt, dass die gleichzeitigen relativen Verrückungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller Teile ebenfalls durchaus bestimmt sind.

Diese Bestimmung durch genaue graphische Mittel bildet den Gegenstand der Schrift. In ihr werden nur jene Mecha[illegible] betrachtet, die aus starren Gliedern bestehen, deren Bew[illegible] alle stets zu einer Ebene parallel sind; die Constanz de[illegible] wird in Bezug auf eins der Glieder des Mechanismus se[illegible] finirt. Cly. (L[illegible]

G. Jung. Di alcune proprietà geome[illegible] cinematiche dei poligoni articolati [illegible] XVIII. 337-348.

Zunächst werden drei neue Theoreme über das Gleichgewicht und die Elementarbewegungen der Gelenkpolygone aufgestellt. Die durch dieselben ausgesprochenen Eigenschaften nebst denen, die in der Abhandlung enthalten sind: „Sopra una classe di configurazioni d'indice 3" (Referat S. 589) gestatten nicht nur die Bestimmung der Configuration, welche einer beliebigen Elementarbewegung eines Gelenkpolygons von m Ecken entspricht und eine polyedrale F_{m+2} ist, sondern führen auch direct zu der Wechselbeziehung zwischen einer gegebenen Elementarbewegung eines Gelenkpolygons und dem Gleichgewicht desselben vermöge eines gewissen associirten Kräftesystems. Hieraus folgt, dass im Falle des Gleichgewichts auch noch eine zweite polyedrale Configuration gleicher Ordnung, jedoch vom Typus f_{m+1} bestimmt ist. Ferner ergeben sich zufolge des engen Zusammenhanges zwischen den Seilpolygonen und Gelenkvielecken neue Eigenschaften des Seilpolygons, welches ein ebenes im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem verknüpft. Schliesslich werden als Anwendungen der allgemeinen Sätze zuletzt die Configurationen angegeben, welche den Elementarbewegungen der Gelenk-Vierecke, Fünfecke und Sechsecke entsprechen. Lp.

E. Engelbrecht. Ueber eine Kurbelbewegung allgemeinerer Art. Pr. Brieg. 16 S.

Eine Gerade wird so geleitet, dass einer ihrer Punkte sich in einem Kreise bewegt, während sie selbst als Tangente auf einem mit dem Kreise concentrischen Kegelschnitt gleitet. Die Polbahnen des so bestimmten kinematischen Systems bilden den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Schn.

O. de Lacolonge. Théorie du parallélogramme de Watt. Bord. Mem (3) II. 101-127.

Man denke sich zwei sich schneidende congruente Kreise vom Radius r, deren Mittelpunkte den Abstand $2c$ haben, also

$r > c$. Eine Strecke von der Länge $2m$ gleite mit ihren Endpunkten auf den Peripherien beider Kreise. Wählt man die Centrale als X-Axe, die in ihrer Mitte O zu ihr errichtete Senkrechte als Y-Axe, so beschreibt der Halbirungspunkt der Strecke $2m$ die Curve sechster Ordnung:

$$(y^2+x^2)^3-2B^2(y^2+x^2)^2+(B^4+4c^2y^2)(y^2+x^2)-4c^2r^2y^2 = 0,$$

wo $B^2 = c^2+r^2-m^2$ gesetzt ist; in Polarcoordinaten ϱ, ω verwandelt:

$$\varrho^4-2(B^2-2c^2\sin^2\omega)\varrho^2+B^4-4c^2r^2\sin^2\omega = 0.$$

Diese letztere Form dient zur Discussion der courbe à longue inflexion oder der Schleifencurve, besonders auch zur Besprechung der von Watt offenbar durch Versuche gefundenen höchst zweckmässigen Längenverhältnisse.

Nach den mitgeteilten historischen Documenten kann die Theorie des ursprünglichen Watt'schen Parallelogramms auf die Zusammenstellung zweier gleichen Arme gebracht werden, die durch einen Bügel verbunden sind, an dessen Mitte der Endpunkt der Kolbenstange befestigt ist. Dieser Umstand bedingt die übrigens auch früher schon bemerkte Vereinfachung in der Gleichung der Curve. Die höchst wichtigen und interessanten Untersuchungen der Herren Roberts und Cayley „On three-bar motion" in den L. M. S. Proc. VII. (1875-76), welche den allgemeinen Fall erledigt haben, sind nämlich dem Verfasser entgangen, wie aus dem Litteraturverzeichnis erhellt, das am Eingange der Arbeit sich befindet.

Die besprochene Schleifencurve sechster Ordnung hat ausser im Doppelpunkte noch auf jedem der vier Zweige einen Wendepunkt. Dass sie keine Bernoulli'sche Lemniskate ist, brauchte nicht betont zu werden, da diese bloss von der vierten Ordnung ist. Uebrigens findet sich am Schlusse der Abhandlung ein Irrtum, der auch in Hoüels „Cours de calcul infinitésimal" T. II. p. 264 Ex. 6 vorkommt: Die Curve $y^2 = x^2-x^4$, obschon vom Lemniskaten-Typus, ist nicht eine Bernoulli'sche Lemniskate.

Lp.

E. Catalan. Sur la courbe de Watt. Mathesis V. 151-155, 222-223.

Ein Viereck *ABCD*, dessen Basis *AB* fest ist, und in welchem die Seiten *AB*, *CD* gleich sind, besitzt Gelenke in *A*, *B*, *C*, *D*. Gleichung des von der Mitte *M* der Seite *BC* beschriebenen Ortes (Watt'sche Curve). Verschiedene Folgerungen.

Mn. (Lp.)

A. Mannheim. Sur la polhodie. C. R. C. 938-940.

A. Mannheim. Sur l'herpolhodie. C. R. C. 963-966.

Bekanntlich hat Poinsot in seiner Schrift „Une théorie nouvelle de la rotation des corps" die Begriffe der Polodie und der Herpolodie eingeführt. Wird die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt auf die Bewegung des Centralellipsoids zurückgeführt, welches ohne zu gleiten auf einer festen Ebene rollt, so bildet der Ort der successiven Berührungspunkte auf dem Centralellipsoid die Polodie, der Ort aber der successiven Berührungspunkte auf der festen Ebene die Herpolodie. Der Kegel, welcher durch die Polodie und das feste Centrum bestimmt ist, ist ein Kegel zweiten Grades, und dieser rollt während der Bewegung des Körpers auf dem Kegel, der durch das feste Centrum und die Herpolodie gekennzeichnet ist. Neuerdings hat Herr de Sparre darauf aufmerksam gemacht, dass die Herpolodie keineswegs die Gestalt hat, die Poinsot ihr zugeschrieben. Sie ist nicht wellenartig gebogen, wie Poinsot irrtümlich angenommen hat, sondern sie besitzt überhaupt keine Wendepunkte. Auch Rückkehrpunkte treten in ihr nicht auf. Herr W. Hess hat sowohl diese Eigenschaften als auch die für allgemeine Flächen zweiter Ordnung schon 1880 in seiner Dissertation behandelt (F. d. M. XII. 1880. 649, XVI. 1884. 768).

Herr Mannheim beleuchtet den Gegenstand durch kinematische Betrachtungen. Er lässt ein beliebig gestaltetes Ellipsoid sich um seinen Mittelpunkt derartig bewegen, dass dasselbe auf einer fest gedachten Tangentialebene rollt ohne zu gleiten.

und untersucht die beiden Curven, die Polodie (s) und die Herpolodie (σ), welche bei dieser Bewegungsform erzeugt werden.

Schlägt man mit dem Abstande h der festen Tangentialebene um das Centrum o des Ellipsoids (E) eine Kugel (S), so bestimmen (E) und (S) durch die gemeinsamen Tangentenebenen eine abwickelbare Fläche, und die Berührungspunkte mit (E) bilden die Polodie. Polarisirt man die Gebilde in Bezug auf E, so erkennt man, dass die Polodie der Durchschnitt zweier concentrischen Ellipsoide ist, deren Axen in dieselbe Richtung fallen, und folgert daraus, dass der Kegel, welchen die Polodie (s) bestimmt, vom zweiten Grade ist. Die Projectionen von (s) auf die Hauptebenen von (E) bilden Kegelschnitte; es kann daher die Polodie weder den Krümmungsradius Null noch einen unendlich grossen Krümmungsradius besitzen.

Herr Mannheim construirt nunmehr die Normalenfläche für (E) (la normalie) längs der Leitcurve (s). Ist m ein Punkt von (s) und p der Fusspunkt des Lotes h, so ist die Normalebene für (E) längs der Geraden pm eine Centralebene der Normalenfläche und berührt die Normalenfläche im Centralpunkte c. Ein Durchmesser des Ellipsoides, welcher durch c geführt wird, trifft die Gerade pm in einem Punkte r, und die Polarebene von r in Bezug auf (E) giebt die Osculationsebene im Punkte m der Polodie. Endlich bestimmt Herr Mannheim die Centraldistanz mc. Zieht man in dem Ellipsoide (E) zwei Durchmesser parallel mp und mt, wo mt die Richtung der Tangente von (s) angeben mag, und fällt von dem Endpunkt des letzteren Durchmessers ein Lot l auf den ersten, so wird die Centraldistanz mc durch den Ausdruck $\frac{l^2}{h}$ gemessen.

In der zweiten Note wird die Herpolodie (σ) analysirt. Es findet sich das merkwürdige Resultat, dass die Krümmungsaxen der Polodie und der Herpolodie für den Punkt m sich in einem Punkte der Tangentialebene treffen, welche längs om die beiden durch (s) und (σ) bestimmten Kegel berührt. Daraus folgt die Construction des Krümmungscentrums der Herpolodie aus dem Krümmungscentrum der Polodie, und man schliesst, d

Polodie keinen Krümmungsradius Null hat, ein solcher auch in der Herpolodie nicht vorkommt. Ein entsprechender Schluss auf das Fehlen der Wendepunkte der Herpolodie ist in einem besonderen Fall nicht zulässig. Dieser Fall tritt ein, wenn die Osculationsebene der Herpolodie normal zur gemeinsamen Tangentialebene beider Kegel längs om steht. Indem Herr Mannheim diesen Fall näher prüft, kommt er zu dem Ergebnis, dass man immer ein solches Ellipsoid construiren kann, für das der Punkt m ein Wendepunkt der Herpolodie ist. Dieser Fall kann aber nicht eintreten bei dem Centralellipsoid. Denn wenn a, b, c die nach den Grössen geordneten Halbaxen sind, also $a > b > c$ ist, so ist seine Gestalt an die Bedingung geknüpft $\frac{1}{c^2} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$, und diese Bedingung schliesst, wie sich ergiebt, die obige Möglichkeit aus. So wird das Resultat gefunden, dass auf der Herpolodie keine Wendepunkte enthalten sind.

Schn.

H. Resal. Note sur la courbure de l'herpolhodie.

J. d. l'Éc. Pol. Cah. LV. 275-285.

Um den von Herrn W. Hess 1880 gefundenen Satz zu beweisen, dass die Herpolodie (für welche der neue Name Gyropolodie vorgeschlagen wird) keine Wendepunkte und Spitzen besitzen kann, rechnet Herr Resal einen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser R dieser Curve aus. Es seien a, b, c die drei Halbaxen des Trägheits-Ellipsoids; h der Abstand seines Mittelpunktes von der festen Ebene, auf welcher es rollt; ϱ der Fahrstrahl vom Fusspunkte des Lotes h nach einem beliebigen Punkte der Curve; U der Winkel zwischen ϱ und R. Man setze ferner:

$$\frac{(h^2-b^2)(h^2-c^2)}{h^2} = m, \quad \frac{(h^2-c^2)(h^2-a^2)}{h^2} = n,$$

$$\frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)}{h^2} = p,$$

$$\Delta = (h^2-a^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2), \quad T = (\varrho^2+m)(\varrho^2+n)(\varrho^2+p).$$

Der Winkel U wird aus der Formel gefunden:

$$\operatorname{tang} U = \frac{1}{\sqrt{-T}}\left(h\varrho^2 + \frac{\Delta}{h^2}\right),$$

endlich R aus der Gleichung:

$$\frac{h^2(-T)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^3 R \cos^3 U} = h^2\varrho^2\{-2a^2b^2c^2 + h^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$
$$+ \Delta(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Die Discussion dieses Ausdruckes zeigt, dass R weder Null noch unendlich werden kann, wodurch der Satz bewiesen ist. Zum Schlusse berechnet der Verfasser noch zur Ergänzung seines Aufsatzes: Développements sur la théorie de la rotation des corps solides (J. de l'Éc. Pol. Cah. LIII. 17-31; F. d. M. XIV. 821) das Bogenelement ds der Herpolodie und das Zeitdifferential dt als Functionen von ϱ.

Lp.

A. DE SAINT-GERMAIN. Sur l'herpolhodie. C. R. C. 1126-1128.

Herr de Sparre hatte aus den Eigenschaften elliptischer Functionen den Hess'schen Satz hergeleitet, dass die Herpolodie von Poinsot weder Rückkehrpunkte noch Wendepunkte besitzt, dass sie also stetig convex gekrümmt sei. Hierfür giebt Herr de Saint-Germain einen kurzen Beweis, der seine Elemente aus den bekanntesten Sätzen der Dynamik entnimmt.

Schn.

J. N. FRANKE. Sur la courbure de l'herpolhodie. C. R. C. 1573-1576.

G. DARBOUX. Remarque. C. R. C. 1576-1577.

Um das Theorem, dass die Herpolodie Poinsot's weder Wendepunkte noch Rückkehrpunkte besitzt, zu beweisen, geht Herr Franke von dem Ausdruck aus, welcher den Krümmungsradius R der Herpolodie in Polarcoordinaten darstellt; als Anfangspunkt des Coordinatensystems wird dabei die Projection des festen Centrums des Ellipsoids auf die feste Tangentialebene gewählt. Indem er nunmehr den Richtstrahl und seinen Polarwinkel nebst

den Derivirten dieser Grössen als Functionen von p, q, r, den Componenten der augenblicklichen Rotation, darstellt, gewinnt er für R eine Form, aus der er das Theorem des Herrn de Sparre herausliest.

Im Anschluss daran weist Herr Darboux auf eine andere Ableitung jenes Theorems hin, die zu folgendem Ergebnis führt: Sind a, b, c die Quadrate der Axen einer beliebigen Mittelpunktsfläche zweiten Grades, welche im Poinsot'schen Sinne sich bewegt, und zwar nach der Grösse geordnet, und bedeuten h und l^2 die Constanten der lebendigen Kräfte und der Flächen, so ist, wenn $P = \frac{2abc}{ab+bc+ca}$ gesetzt wird, notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in der Herpolodie Wendepunkte auftreten, folgende: Es müssen die Werte $a, b, c, P, \frac{h}{l^2}$ entweder die Anordnung $a, \frac{h}{l^2}, b, P, c$ oder $a, P, b, \frac{h}{l^2}, c$, nach ihrer Grösse geordnet, darbieten. Liegt P für eine Fläche nicht zwischen a und c, so können keine Wendepunkte in der Herpolodie vorhanden sein. Dieser Fall tritt beim Trägheitsellipsoid auf.

Schn.

Barbarin. Note sur l'herpolhodie. Nouv. Ann. (3) IV. 538-556.

Die Poinsot'sche Herpolodie wird durch ihre Differentialgleichung in Polarcoordinaten zur Darstellung gebracht. Als Anfangspunkt des Coordinatensystems dient die Projection P des Mittelpunktes des Ellipsoids auf die feste Ebene. Bedeutet ϱ den Richtstrahl und ω seinen Richtungswinkel, so heisst diese Differentialgleichung

$$d\omega = \delta \frac{\left(\varrho^2 + \frac{u}{\delta^2}\right) d\varrho}{\varrho\sqrt{-(\varrho^2+r_1)(\varrho^2+r_2)(\varrho^2+r_3)}}.$$

Hierin bedeuten δ, u, r_1, r_2, r_3 gewisse durch das Problem bedingte constante Grössen, und zwar, wenn a, b, c die nach der Grösse geordneten Halbaxen des Ellipsoids und δ den Abstand

seines Mittelpunktes von der festen Ebene angeben, ist

$$u = (\delta^2 - a^2)(\delta^2 - b^2)(\delta^2 - c^2), \quad r_1 = \frac{u}{\delta^2(\delta^2 - a^2)},$$

$$r_2 = \frac{u}{\delta^2(\delta^2 - b^2)}, \quad r_3 = \frac{u}{\delta^2(\delta^2 - c^2)}.$$

Die Discussion der Differentialgleichung führt zu folgenden Ergebnissen. Ist $c < \delta < b$, so ist u positiv, r_1 und r_2 negativ, und r_3 positiv, es verschwindet also der Wurzelausdruck nur für zwei verschiedene Werte von ϱ, nämlich für $\varrho_1 = \sqrt{-r_1}$ und $\varrho_2 = \sqrt{-r_2}$, und zwar ist $\varrho_2 > \varrho_1$. Damit der Wurzelausdruck reell sei, darf sich ϱ nur zwischen diesen Grenzwerten ϱ_1 und ϱ_2 bewegen; die Herpolodie verläuft also zwischen zwei concentrischen Kreisen C_1 und C_2, welche die Radien ϱ_1 und ϱ_2 haben. Da für diese Grenzwerte $\frac{d\varrho}{d\omega} = 0$ ist, so berührt die Herpolodie diese Kreise. Sind M_1 und M_2 diese Berührungspunkte, so ist die Herpolodie gegen die Richtstrahlen PM_1 resp. PM_2 symmetrisch gebildet; denn sind μ und μ' zwei Punkte der Herpolodie, auf verschiedenen Seiten von M_2 gelegen, welche denselben Werten ϱ entsprechen, so ergeben sich für die Winkel $\widehat{\mu P M_2} = \omega$ und $\widehat{M_2 P \mu'} = \omega'$ zwei Integrale von gleichem absolutem Werte, aber entgegengesetztem Zeichen. Die Punkte, welche den Punkten M_1 und M_2 auf der Polodie entsprechen, gehören den Hauptebenen des Ellipsoides an.

Liegt δ zwischen a und b, umgiebt also die Polodie den Scheitel der grössten Axe, so bestimmen die Grenzwerte $\varrho_2 = \sqrt{-r_2}$ und $\varrho_3 = \sqrt{-r_3}$ zwei Kreise C_2 und C_3 um den Punkt P, zwischen welchen die Herpolodie in derselben Form verläuft, wie im vorigen Fall. Sie bildet also eine Folge von gleichen Schleifen, welche C_2 und C_3 abwechselnd berühren, und die Richtstrahlen nach den Berührungspunkten sind für sie Symmetrieaxen.

Die Arbeit schliesst mit einer Analyse der Geschwindigkeit, mit der der Berührungspunkt der Polodie auf der Herpolodie fortschreitet.

Endlich mag auch hier die Bemerkung Platz finden, dass Herr Barbarin seine Analyse der Herpolodie bereits im Jahre 1882 der Redaction der Nouv. Ann. eingereicht hat, dass er also keine Kenntnis von der Bemerkung des Herrn de Sparre hatte, welche in den C. R. 1884 veröffentlicht worden ist. Von den weiter gehenden Untersuchungen des Herrn W. Hess aus dem Jahre 1880 hatten beide Forscher nichts erfahren.

Schn.

G. Darboux. Sur la théorie de Poinsot et sur deux mouvements correspondant à la même polhodie.

C. R. C. 1555-1561.

Eine allgemeinere als die von Poinsot betrachtete Bewegungsform besteht darin, dass man nicht ein Ellipsoid, dessen Axen bestimmten Bedingungen der Ungleichheit unterworfen sind, auf einer festen Ebene mit einer Geschwindigkeit, proportional dem Richtstrahl vom Centrum nach dem Berührungspunkt, rollen lässt, sondern eine ganz beliebige Mittelpunktsfläche zweiten Grades. Eine derartige Bewegung ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{a(c-b)}{bc}qr, \quad \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{b(a-b)}{ca}rp; \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{c(b-a)}{ab}pq. \end{cases}$$

Hierin [illegible] a, b, c [illegible] Quadrate der Halbaxen der Fläche, wel[illegible] [illegible]er fest[illegible] [illegible]rollt.

[illegible] Gleichungen die folgenden drei wa[illegible]

[illegible] γ, pq;

[illegible] gekenn-

[illegible]

Die Bewegung, welche durch das Gleichungssystem (1) gegeben ist, wird kurzweg als Poinsot'sche Bewegung bezeichnet. Sind p, q, r Rotationen, welche (1) genügen, so werden, wenn α', β', γ' constante Zahlen bedeuten, die Grössen

$$p' = \alpha' p, \quad q' = \beta' q, \quad r' = \gamma' r$$

dem Gleichungssystem (2) genügen, falls

$$\alpha_1 = \frac{a(c-b)}{bc} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'\gamma'}, \quad \beta_1 = \frac{b(a-c)}{ca} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'\alpha'},$$
$$\gamma_1 = \frac{c(b-a)}{ab} \cdot \frac{\gamma'}{\alpha'\beta'}$$

gesetzt wird, die Bedingung (3) aber führt zu der Relation

$$a^2(c-b)(\alpha'^2-1) + b^2(a-c)(\beta'^2-1) + c^2(b-a)(\gamma'^2-1) = 0.$$

Dieser Bedingung müssen also die Constanten α', β', γ' genügen, wenn die Rotationen p', q', r' eine Bewegungsform vom Charakter von (1) darstellen sollen. Zwei der Grössen α', β', γ' bleiben, wie man bemerken mag, willkürlich. Es giebt demnach eine ganze Reihe von Bewegungsformen, welche mit der bestimmten Bewegungsform von (1) verknüpft sind.

In der vorliegenden Arbeit wird die besondere Bewegung betrachtet, welche durch $\alpha' = -1$, $\beta' = -1$, $\gamma' = -1$ bestimmt ist, für welche also $p' = -p$, $q' = -q$, $r' = -r$ ist. Wird die durch (1) beschriebene Bewegung durch (E) bezeichnet, so wird bei dieser Bewegung (E') die Rotation gleich aber entgegengetzt der von (E) sein. Der zweiten Bewegung gehören Grössen a', b', c', h' in demselben Sinne an, wie die Grössen a, b, c, h der Bewegung (E); h aber bedeutet in dieser die durch das Integral der lebendigen Kräfte $\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = h$ eingehende Constante. Die Grössen a', b', c', h' werden in ihrer Abhängigkeit von a, b, c, h dargestellt und dadurch auch in dieser Form die Reciprocität beider Bewegungen zum Ausdruck gebracht.

Der Vergleich beider Bewegungen führt zu dem Ergebnis, dass für beide Bewegungen die Polodie (P) übereinstimmt. Ist ...h sie und das feste Centrum bestimmte Kegel, so ...rsten Bewegung (E) dieser Kegel auf einem festen

Kegel (A), welcher zur Basis eine Herpolodie (H) hat, bei der zweiten Bewegung rollt derselbe Kegel (C) auf einem festen Kegel (B), welcher zur Basis eine Herpolodie (H') hat, bei beiden Bewegungen aber ist jeden Moment dieselbe Kante des Kegels (C) in Berührung mit den festen Kegeln. Denkt man daher (C) fest und lässt gegen (C) sich (A) und (B) bewegen, so erkennt man, dass die Bewegung von (B) gegen (A) relativ so aufgefasst werden darf, als rolle (B) auf (A).

An diese Betrachtung schliesst endlich der Verfasser das Theorem an: „Die Schnittcurve zweier concentrischen Flächen zweiten Grades, welche dieselben Axenrichtungen haben, kann, und zwar auf zwei verschiedene Weisen, als Polodie betrachtet werden." Schn.

G. Darboux. Sur diverses propositions relatives au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. C. R. CI. 199-205.

Fortsetzung der Betrachtungen, welche in der Mitteilung veröffentlicht wurden, über die soeben berichtet ist. Nach dem Drucke jener Note hatte der Verfasser bemerkt, dass de la Gournerie in seinen Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques manche interessanten, die Polodie betreffenden Sätze bewiesen hat, ohne jedoch auf die kinematische Seite der Frage einzugehen Unter Benutzung der geometrischen Ergebnisse des Werkes von de la Gournerie vervollständigt Herr Darboux den geometrischen Teil seiner Untersuchung. Von den sech[illegible]men, d[illegible]spricht, möge nur das letzte angeführ[illegible] welc[illegible] Arbeit „Sur le mouvement d'un cor[illegible] X Cap. 4, A) in veränderter Fas[illegible] in das (einschalige) Hyperbolo[illegible] (g) fest bleibt, so [illegible] Erzeugenden (g_1) [illegible] des Hyper[illegible] Zwingt [illegible] diesem

Punkte senkrechte Curve zu beschreiben, so ist diese Curve eine Herpolodie". Lp.

A. Mannheim. Sur une droite qui se déplace de façon que trois de ses points restent sur les faces d'un trièdre trirectangle. Darb. Bull. (2) IX 137-140.

Eine Anwendung der von Herrn Mannheim ausgebildeten Methoden der kinematischen Geometrie auf die Entwickelung eines Theorems des Herrn Darboux. Derselbe hat dargethan, dass eine Gerade D, welche mit drei Punkten in drei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen gleitet, ein Normalensystem einer Fläche (S) erzeugt. Herr Mannheim entwickelt auf sehr durchsichtige Weise diesen Satz, giebt eine Construction der Hauptkrümmungscentren und der Ebenen der Hauptschnitte der Fläche (S), und beweist die von Herrn Darboux gegebene Ergänzung des Theorems, dass diese Fläche (S) der Ort der Mittelpunkte der Segmente ist, welche auf jeder Geraden D bestimmt werden durch den Punkt, wo D eine Ebene des Dreikants trifft, und die senkreckte Projection der Spitze des Dreikants. Schn.

de Sparre. Sur l'herpolhodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque. C. R. CI. 370-373.

Eine Mittelpunktsfläche zweiten Grades bewegt sich um ihr Centrum der Art, dass sie auf einer festen Tangentialebene ohne zu gleiten rollt. Die augenblickliche Drehungsgeschwindigkeit ist proportional dem Richtstrahl, welcher das feste Centrum mit dem augenblicklichen Berührungspunkt verbindet. Unter dieser Voraussetzung entsteht eine Herpolodie auf der festen Tangentialebene. Die Bedingungen werden aufgestellt, unter denen die Herpolodie Wendepunkte besitzt, erstens wenn die rotirende [illegible] ein Ellipsoid, dann wenn sie ein Hyperboloid mit einer oder [illegible]len ist. Schn.

E. Cavalli. Le ovali di Cartesio considerate dal punto di vista cinematico. Torino Atti XX. 1143-1165.

Der Verfasser betrachtet die Cartesischen Ovale als Curven, die von einem beweglichen Punkte unter der Einwirkung einer gewissen, beständig nach einem der drei Brennpunkte gerichteten Beschleunigung beschrieben werden. Indem er von der bekannten geometrischen Definition dieser Linien mit Hülfe der Entfernungen eines Punktes von zwei Brennpunkten ausgeht und Polarcoordinaten benutzt, findet er den Ausdruck jener Beschleunigung. Als Anwendung dieser Untersuchung giebt er eine Construction für den Krümmungsmittelpunkt der Ovale und die Dauer eines vollständigen Umlaufs des beweglichen Punktes. Der Verfasser prüft endlich die besonderen Fälle bezüglich der Pascal'schen Schnecke, der Kardioide und der Kegelschnitte.

Se. (Lp.)

E. Sang. On the problem of the lathe band and on problems therewith connected. Edinb. Proc. XII. 294-393.

Die Aufgabe besteht darin, die verschiedenen Durchmesser auf dem Flügelrade und Kegelrade des Treibriemens so anzuordnen, dass dasselbe Band unter allen Umständen passen kann. Die Lösung wird in zwei zu einander gehörigen Schritten vollzogen, erstens die Länge des Bandes für gegebene Durchmesser zu berechnen, zweitens neue Durchmesser zu berechnen, die für die so gefundene Länge passen.

Cly. (Lp.)

F. [illegible] C[illegible] [illegible]gung von Curven vierter O[illegible] [illegible]hanismen. Diss. Leipzig. 8 [illegible]

[illegible] Lp.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

G. M. MINCHIN. A treatise on statics with applications to physics. 3rd ed. vol. II. Clarendon Press, Oxon. VI u. 512 S.

Nach dem Referate in Nature XXXIV. 165-166 von Herrn A. Cunningham umfasst der erste, 1884 erschienene, Teil dieses Lehrbuches der Statik auf 351 Seiten die Lehre vom Gleichgewichte von Kräften in derselben Ebene. Der zweite Teil, welcher die Verwendung der neueren Theorien aufgenommen hat, insbesondere die Ball'sche Theorie der „Schrauben" und die Lehre vom astatischen Gleichgewicht, enthält ausser den in allen Lehrbüchern der Statik behandelten Gegenständen, unter welchen dem Potential ein grosser Raum gegeben ist, die physikalischen Anwendungen auf die Elasticität und Elektricität. Herr Cunningham hält das Werk für eins der besten jetzt existirenden.

Lp.

K. VON OTT. Grundzüge der graphischen Statik. Vierte erweiterte Auflage. II. Abteilung. Prag. J. G. Calve (Ottomar Beyer). 268 S. 8° u. 1 Taf.

Auch unter dem Titel:

K. VON OTT. Das graphische Rechnen und die graphische Statik. Zweiter Teil: Die graphische Statik. II. Abteilung. (Schluss).

Die Schlussabteilung enthält die Elemente der Festigkeits-
…re, sowie die Statik der continuirlichen Träger, der Bogen-
…rke, der Kuppel- und Zeltdächer, ferner die Bestimmung
… Stabilität der Stützmauern und Gewölbe.
…lich die neueren Arbeiten über den von
…vielseitiger Anerkennung bearbeiteten

Gegenstand berücksichtigt, soweit dies in dem von ihm gewählten Rahmen anging. Lp.

L. Cremona. Les figures réciproques en statique graphique. Traduit par L. Bossut. Paris. Gauthier-Villars.

A. Favaro. Leçons de statique graphique, traduites de l'italien par P. Terrier. IIe partie. Calcul graphique. Paris. Gauthier-Villars.

A. del Re. Sulle funzioni di forza. Batt. G. XXIII. 332-344.

Es handelt sich um die Aufstellung der Form einer Kräftefunction für ein starres System, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, z. B. wenn das Kräftesystem sich so verändert, dass es sich in jedem Augenblicke auf eine Dyname in Bezug auf eine Axe eines bestimmten Axoids der fünften oder der vierten Ordnung reducirt; oder wenn das Kräftesystem, welches die Punkte des starren Körpers angreift, so beschaffen ist, dass die Elementararbeit bezüglich einer bestimmten Torsion Null ist. Nach einigen Entwickelungen allgemeiner Natur gelangen die angedeuteten Fragen zur Erledigung. Lp.

R. d'Emilio. Gli assoidi nella statica e nella cinematica. Nota su la teoria delle dinami (Theory of screws). Ven. Ist. Atti (6) III. 1135-1154.

Analytische Aufstellung der elementarsten Eigenschaften der Axensysteme (= screw complexes = assoidi) der verschiedenen Stufen. Vi.

D. Padelletti. Sul centro delle forze nel piano. Nap. Rend. XXIII. 74-78.

Die Note specialisirt die Betrachtungen, über welche im vorigen Jahrgange [illegible] S. 775 berichtet ist, für den

Fall, dass die n Punkte des starren Massensystems und die dasselbe angreifenden parallelen Kräfte in einer und derselben Ebene liegen. Z. B.: Die Mittelpunkte der beiden Systeme paralleler Kräfte, die man durch Projection der gegebenen Kräfte auf zwei zu einander rechtwinklige Richtungen erhält, liegen auf einer und derselben Geraden, der Centralaxe des Systems, und bilden auf ihr eine Involution, deren Centrum der Schwerpunkt G des Systems ist. (Die Punkte sind, wie in der früheren Arbeit, mit derjenigen Masse behaftet, die gleich dem Quadrate der zur jeweiligen Axe parallelen Componente ist). Bei einer Rotation der Kräfte um ihre Angriffspunkte geht ihre Resultante durch einen festen Punkt C, den Mittelpunkt der Kräfte, und dieser Punkt C ist einer der Scheitel der ausgearteten Clebsch'schen Centralellipse, bezüglich irgend eines der Systeme S', d. h. liegt auf dem im Schwerpunkte auf der Centralaxe errichteten Lote, in einer Entfernung gleich dem Trägheitsradius des Systems S in Bezug auf dieses Lot. Lp.

L. Crocchi. Un osservazione intorno alle coppie per un sistema di forze parallele. Batt. G. XXIII. 89-94.

Die Punkte eines materiellen Systems mögen von den parallelen Kräften P_1, P_2, P_3,... angegriffen werden. Durch die Verlegung einer jeden Kraft P nach einem Reductionspunkte entsteht ein Kräftepaar, dessen Quadrat P^2r^2 ist, wo r den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von derjenigen Geraden bedeutet, die durch den Reductionspunkt parallel zur gemeinsamen Richtung der Kräfte geht. Daher ist die Summe der Quadrate dieser Kräftepaare gleich dem Trägheitsmomente eines materiellen Systems, dessen Punkte die Massen P_1^2, P_2^2, P_3^2,... besitzen, bezüglich der eben erwähnten Geraden. Die Durchführung der Analogie zwischen der Summe der Quadrate der Kräftepaare und dem Trägheitsmomente des beschriebenen Systems bildet das Thema des Artikels. Z. B.: „Verlegt man die Kräfte des Systems in einen zum Anfangspunkte der Coordinaten gewählten Reduc-

tionspunkt, so wird die Summe der Quadrate der einzelnen Kräftepaare, die sich in Bezug auf verschiedene Richtungen der parallelen Kräfte bilden lassen, durch das umgekehrte Quadrat des zu der jeweiligen Richtung parallelen Halbmessers eines mit dem Anfangspunkt als Centrum bestimmten Ellipsoids geliefert." Dieses Ellipsoid wird „Ellipsoid der Kräftepaare" genannt; u. s. w.

Lp.

J. Wolstenholme, D. Edwardes, B. H. Rau. Solution of question 7514. Ed. Times XLII 90-91.

Die Coordinaten des Schwerpunktes für den Bogen der Curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ sind durch die elementaren Functionen leicht ausdrückbar, wenn man die Coordinaten in der Form $x=a\sin^3\varphi$, $y=b\cos^3\varphi$ durch den Parameter φ darstellt.

Lp.

B. P. Moors. Eenvoudig middel om de balans bij elke belading onmiddelijk de grootste gevoeligheid te geven, waarvoor zij vatbaar is. Nieuw. Arch. XII. 216-218.

In dieser kurzen Arbeit wird ein einfaches Mittel an die Hand gegeben, um einer Wage bei jeder Belastung unmittelbar die grösste Empfindlichkeit zu geben. G.

E. Hammer. Eine graphisch-mechanische Methode zur Auflösung numerischer Gleichungen. Civiling. XXXI. 278.

Es wird auf die im vorhergehenden Bande des Jahrbuchs (F. d. M. XVI. 1884. [illegible]) besprochene Methode von Reuschle hin- [illegible] und [illegible] Beispielen erläutert.

F. K.

E. Cesaro. Sur le coefficient de stabilité des massifs. Nouv. Ann. (3) IV. 196-200.

Es sei P die Resultante der äusseren, auf einen Körper vom Gewichte Q einwirkenden Kräfte; die Unterstützungsfläche sei eine horizontale Ebene. Man betrachte den Schnitt des Körpers durch die Ebene PQ. Die Unterstützungsebene möge in der Schnittebene durch die Kräfte Q, P und ihre Resultante in den Punkten O, V, T bezw. getroffen werden; endlich sei A der äussere Punkt des Körpers, um welchen dieser letztere unter der Einwirkung von P sich zu drehen strebt. Dann findet der Satz statt: Der Ueberschuss der Coefficienten der Standfestigkeit über die Einheit ist gleich dem Doppelverhältnis der Punkte O, T, A, V. Einige Folgerungen dieses Satzes werden angedeutet.

Lp.

Clifford, A. H. Curtis. Solution of question 7706. Ed. Times XLII. 21-22.

A. H. Curtis, T. C. Simmons, B. H. Rau. Solution of question 7785. Ed. Times XLIII. 42-43.

Es ist zu bestimmen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Mittelpunkt des Druckes einer Flüssigkeit gegen eine Dreiecksfläche, die vollständig untergetaucht ist, mit einem der merkwürdigen geometrischen Punkte des Dreiecks zusammenfällt. Herr Curtis weist darauf hin, dass diese Aufgabe im Messenger of Mathematics (2) XII. 1872 gelöst ist für den Fall, dass der Druckmittelpunkt fällt in 1) den Schwerpunkt, 2) das Inkreiscentrum, 3) das Umkreiscentrum, 4) den Höhenschnitt, 5) Mittelpunkt eines eingeschriebenen Quadrates, 6) Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises. Diesen Punkten fügt er jetzt noch den Grebe'schen (Lemoine'schen) Punkt hinzu. Lp.

A. Legoux. Équations canoniques. Application à la [...]e de l'équilibre des fils flexibles et des courbes [...]chrones. Toul. Mém. (8) VII$_2$. 159-184.

Zuerst wird der Jacobi'sche Satz mit den Bezeichnungen aus den „Vorlesungen über Dynamik" p. 141 ff. entwickelt. Am Schlusse dieses allgemeinen Teiles der Arbeit spricht sich der Verfasser über den Zweck derselben wie folgt aus: „Das Jacobi'sche Theorem steht in dieser Theorie an der Spitze. Es ermöglicht nämlich die unmittelbare Niederschreibung der Integrale für eine Aufgabe der Dynamik, ohne dass man andere Operationen als einfache Differentiationen auszuführen brauchte, sobald irgend ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung $H = h$ bekannt ist. In der Folge werden wir sehen, dass man in einer grossen Anzahl von Fällen unmittelbar ein vollständiges Integral dieser Gleichung finden und also, wie Bour geistvoll zu sagen pflegte, die Gleichungen des Problems à vue integriren kann. Um die partielle Differentialgleichung, von der die Lösung abhängt, niederzuschreiben, braucht nur die Kräftefunction U und die lebendige Kraft T als Function der auf die kleinste Anzahl gebrachten Veränderlichen q und ihrer nach der Zeit genommenen Ableitungen bekannt zu sein. Statt der Veränderlichen q' führt man in T die neuen Veränderlichen p ein, definirt durch $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$, und schliesslich setzt man $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots$ statt $p_1, p_2, \ldots$ in der Gleichung $U - T = h$."

Die Anwendung auf die Fadencurven geschieht mit Hülfe der von Herrn Appell (C. R. XCVI. 688, F. d. M. XV. 1883. 794) aufgestellten kanonischen Formen der Differentialgleichungen, deren Reduction in etwas modificirter Form dargestellt wird. Die somit skizzirte allgemeine Methode wird dann auf die Gleichgewichtslage eines Fadens angewandt, der sich auf einer reibungslosen Oberfläche befindet. Der Fall einer Kugel bei allgemein gelassener Kraft mit dem Unterfall, dass die Schwere allein einwirkt, wird schnell erledigt, ebenso die Frage, welchen Wert die in jedem Punkt zum Meridian tangentiale Kraft haben muss, damit der Faden auf der Fläche die Form einer Loxodromie annehme. Endlich wird das Gleichgewicht eines Fadens auf Um-

drehungsflächen und auf einer beliebigen geradlinigen Schraubenfläche untersucht.

Der letzte Teil enthält die Anwendung der Jacobi'schen Methode auf die Untersuchung von Brachistochronen auf gegebener Oberfläche, indem mit dieser Fläche eine zweite derartig verknüpft wird, dass den Brachistochronen der ersteren die geodätischen Linien der letzeren entsprechen. Das Problem der kürzesten Linie ist ja aber von Jacobi selbst unter diesem Gesichtspunkte behandelt. Auch hier werden die Umdrehungsflächen hervorgehoben. Zuletzt wird die Anwendung der Jacobi'schen Methode auf den Fall angedeutet, dass die Brachistochrone absolut ist, d. h. nicht auf einer gegebenen Oberfläche liegt.

Lp.

P. Appell. Sur la chaînette sphérique. S. M. F. Bull. XIII. 65-71.

Die Arbeit beginnt mit den Worten: „Herr Hermite hat gezeigt (Borchardt J. LXXXV), dass die rechtwinkligen Coordinaten für den Endpunkt eines sphärischen Pendels als eindeutige Function der Zeit mit Hülfe der Θ-Functionen ausgedrückt werden können. Ich habe bemerkt, dass eine Methode, ähnlich wie die des Herrn Hermite, auf die sphärische Kettenlinie angewandt werden kann.“ Es bleibt danach zweifelhaft, ob der Verfasser die Dissertation von W. Biermann gekannt hat: „Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta“. Berolini, 1865, in welcher das Problem vollständig gelöst ist (Catenaria sphaerica, § 5-7, pag. 13-19). Vielleicht ist es ihm nur um die von ihm angewandte Methode zu thun.

Herr Biermann arbeitet mit der Weierstrass'schen Function $\wp(u)$ und mit den Sigmafunctionen; erst zuletzt (l. c. pag. 19) setzt er die Jacobi'schen Thetareihen ein. Herr Appell dagegen weist zuerst nach, dass, wenn die z-Axe vertical ist, $z = \varphi(u)$ wird, wo $\varphi(u)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Ordnung ist. Sodann drückt er $x+yi$ und $x-yi$ sowie den Bogen s der Curve durch H-Functionen aus; gerade so finden sich bei

Biermann zuletzt Formeln für dieselben Grössen. Zum Schlusse kündet Herr Appell an, er wolle in einer späteren Mitteilung die Function $\varphi(u)$ bestimmen, die Elemente der Curve in reellen Grössen ausdrücken und die mechanische Aufgabe erörtern.

Lp.

Clifford, A. Mukhopâdhyây. Solution of question 7838. Ed Times XLII. 101-102.

Wird ein Faden von einem in ihm gelegenen Punkte nach einem Elementargesetze abgestossen, das umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung ist, so ist die Kreisform des Fadens die Gleichgewichtslage; erfolgt die Abstossung umgekehrt proportional der μ^{ten} Potenz, so ist die Polargleichung für die Gleichgewichtsform

$$\left(\frac{d}{r}\right)^{\mu-2} = \cos(\mu-2)\theta,$$

wo d eine Constante.

Lp.

E. Padova. Ricerche sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. Nota I. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 269-274. Nota II. Rom. Acc. L. Rend (4) I 306-399.

1. Auf jeder im Gleichgewicht befindlichen biegsamen unausdehnbaren Fläche giebt es zwei Scharen von orthogonalen Curven, welche nur Normalspannung erleiden. Indem der Herr Verfasser die Parameter dieser Curven als Coordinaten benutzt, giebt er den Beziehungen zwischen den äusseren Kräften und den Spannungen eine möglichst einfache und übersichtliche Form. Aus derselben lassen sich viele Specialfälle des Gleichgewichts, so z. B. die von Beltrami untersuchten, unmittelbar ableiten. Auch Beziehungen des in Frage stehenden Problems zum Kettenlinienproblem ergeben sich in einfacher und leichter Weise. Von den neuen Specialfällen erscheint dem Referenten besonders einer interessant, in welchem die Spannung für alle durch einen Punkt gehenden Elemente denselben Wert hat. Die Fläche, um

welche es sich handelt, hat die Eigenschaft, dass die Linien constanter mittlerer Krümmung zugleich geodätische Parallelen sind. Die Richtung der äusseren Kraft steht in jedem Punkte der Fläche auf der betreffenden geodätischen Parallelen senkrecht, während ihre Grösse und der Winkel, welchen sie mit der geodätischen Linie einschliesst, nur von dem Parameter der ersterwähnten Curve in gewisser Weise abhängt.

II. Ein Punkt der im Gleichgewicht befindlichen Oberfläche S', welche dadurch entstanden ist, dass man auf den Normalen einer zweiten Fläche S eine variable Strecke l abgetragen hat, wird durch die Parameter der Hauptkrümmungslinien des zugehörigen Punktes auf S bestimmt. In diesen Coordinaten nehmen zwar die Gleichgewichtsbedingungen für die Fläche S' eine etwas complicirte Gestalt an, führen aber trotzdem für jede Oberfläche auf die Bestimmung zusammengehöriger Wertsysteme der Spannungen und äusseren Kräfte. Dieselben sind in sofern interessant, als die Richtungen der äusseren Kraft für alle Punkte von S' durch einen festen Punkt C gehen. Das Resultat wird gewonnen, indem als Fläche S eine Kugel mit dem Mittelpunkt C gewählt wird. F. K.

Bucchia. Proposta di una regula precisa per determinare la forma e le dimensioni necessarie alla fermezza durabile degli argini di terra, ordinati a contenere alte piene di gran fiumi reali. Ven. Ist. Atti (6) III. 1707-1738.

Es wird die Bestimmung der Form und der Dimensionen stabiler Erddämme, die auf einer Seite Wasserdruck auszuhalten haben, behandelt, wobei nicht, wie sonst üblich, von dem Reibungswiderstand der Erdteilchen auf einander ausgegangen ist, sondern eine feste, zusammenhängende Erdmasse vorausgesetzt wird, die nur dadurch zerstört werden kann, dass die Cohäsion derselben in irgend einer Fläche überwunden wird. Ist AB mit dem Neigungswinkel α gegen die Verticale der Böschungsquerschnitt einer Erdmasse, die nach oben im Querschnitt durch die Horizontale

BC begrenzt wird, und diese Neigung für das Gleichgewicht ungenügend, so wird die Masse durch irgend eine Bruchfläche *AC* getrennt werden. Die Kraft, welche das Prisma *ABC*, dessen Länge gleich der Masseinheit angenommen werden soll, herabzubewegen sucht, ist die zu *AC* parallele Gewichtscomponente, hingegen die Kraft, welche es zurückzuhalten bestrebt, die Cohäsion in der Bruchfläche *AC*. Bezeichnet p das Gewicht der Volumeneinheit Erde, γ die Cohäsionskraft für die Bruchflächeneinheit, φ den Winkel, den die Bruchfläche *AC* mit der Verticalen bildet und h die Höhe der Erdmasse, so ist das Gewicht des herabgleitenden Erdprismas *ABC*:

$$\tfrac{1}{2}ph^2(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\alpha)$$

und seine zu *AC* parallele Componente:

$$\tfrac{1}{2}ph^2(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\alpha)\cos\varphi.$$

Andererseits ist der durch die Cohäsion dieser Bewegung entgegengesetzte Widerstand:

$$\gamma . AC = \frac{\gamma h}{\cos\varphi}.$$

Das Verhältnis der angreifenden Kraft zur widerstehenden ist sonach:

$$\frac{ph}{2\gamma}\cos^2\varphi(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\alpha) = \frac{ph}{4\gamma}(\sin(2\varphi-\alpha)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha).$$

Es ist nun einleuchtend, dass der Bruch dort eintritt, wo dieses Verhältnis am grössten ist. Aus anderen Untersuchungen ist bekannt, dass dieser besondere Wert für $\varphi = 45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha$ ist. Es wird dann $\sin(2\varphi-\alpha) = 1$, und das angegebene Verhältnis geht über in:

$$\frac{ph}{4\gamma}(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha).$$

Für den Fall des Gleichgewichts muss der letzte Wert gleich 1 sein, woraus man erhält:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(ph+4\gamma)(ph-4\gamma)}{8\gamma ph}.$$

Entspricht die Höhe h' dem Werte $\alpha = 0$, so hat man

$$\text{(a)} \qquad \gamma = \tfrac{1}{4}ph'.$$

Kennt man also durch Versuche die Höhe h', bei welcher sich eine verticale Erdwand im Gleichgewicht hält, so liefert die Gleichung (a) den Wert für die Cohäsion pro Flächeneinheit. Wird dieser Wert von γ in den für $\operatorname{tg}\alpha$ eingesetzt, so entsteht:

$$(b) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{(h+h')(h-h')}{2hh'},$$

welche Gleichung zeigt, dass der Neigungswinkel α mit der Höhe zunimmt.

Hiernach wird die Aufgabe behandelt: Es ist die Höhe eines Erddammes, der auf der einen Seite dem Wasserdrucke zu widerstehen hat, seine Kronenbreite und die Neigung der inneren (auf der Wasserseite befindlichen) Böschung gegeben; gesucht wird die Neigung der äusseren Böschung.

Es sei $ABCE$ der trapezförmige Querschnitt des Dammes, dessen Länge gleich der Masseinheit angenommen werden soll; h seine Höhe; a die Kronenbreite BC; α die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels α der inneren Böschung CE; n die trigonometrische Tangente des gesuchten Neigungswinkels n der äusseren Böschung AB; p das specifische Gewicht der Erde in Bezug auf das des Wassers als Einheit.

Wird angenommen, dass in der Fläche AD, die mit der Basis AE den Winkel θ bildet, der Bruch eintritt, und die Höhe des Punktes D über AE mit x bezeichnet, so sind die Kräfte, die den Körper $ABCD$ herabzuschieben suchen: die zu AD parallele Componente des Wasserdruckes und die ebenfalls zu AD parallele Componente des Gewichts P des Erdprismas $ABCD$, also:

$$\frac{\frac{1}{2}(h-x)^2\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}(h-x)^2(\cos\theta+\alpha\sin\theta)$$

und

$$P\sin\theta.$$

Diesen Kräften entgegen wirkt die Cohäsionskraft $\frac{1}{2}ph'.AD$ in der Fläche AD. Wird das Verhältnis der widerstehenden Kraft zur Summe der angreifenden Kräfte mit R bezeichnet, so ist dessen Wert:

$$R = \frac{\frac{1}{2}ph'.AD}{P\sin\theta + \frac{1}{2}(h-x)^2\,(\cos\theta + \alpha\sin\theta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ph'[x^2 + (a + h(\alpha+n) - \alpha x)^2]}{Px + \frac{1}{2}(h-x)^2.(a + h(\alpha+n))}.$$

Wenn der Kürze wegen $\frac{a}{h} + \alpha + n = m$ gesetzt wird, hat man:

$$R = \frac{\frac{1}{2}ph'[x^2 + (mh - \alpha x)^2]}{Px + \frac{1}{2}mh(h-x)^2}$$

$$= \frac{ph'}{2h}\left[\frac{m^2h^2 - 2\alpha mhx + (1+\alpha^2)x^2}{mh^2 + hx(2m(p-1) - p(\alpha+n)) - m(p-1)x^2}\right].$$

Wird weiter der Kürze wegen $2m(p-1) - p(\alpha+n)$ mit β bezeichnet, so entsteht:

$$R = \frac{ph'}{2h}\left[\frac{m^2h^2 - 2\alpha mhx + (1+\alpha^2)x^2}{mh^2 + \beta hx - m(p-1)x^2}\right].$$

Es wird nun der Dammbruch an der Stelle eintreten, wo der Widerstand am geringsten oder für welche das Verhältnis R ein Minimum ist. Damit der Wert von x das Verhältnis R zu einem Minimum macht, muss $\frac{dR}{dx} = 0$ sein. Diese Bedingung ergiebt eine quadratische Gleichung für x, aus welcher, wenn man

$$\beta + 2\alpha = \delta,$$
$$m^2(p-1) + \alpha^2 + 1 = \varepsilon,$$
$$2\alpha m^2(p-1) - \beta(1+\alpha^2) = \mu$$

setzt, erhalten wird:

$$\frac{x}{mh} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu} - \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\mu^2} - \frac{\delta}{\mu}}\right).$$

Dieser Wert genügt auch der Bedingung $\frac{d^2R}{dx^2} > 0$. Die rechte Seite der letzten Gleichung werde mit φ bezeichnet; dann wird R für diesen Wert von x:

$$(1) \qquad R = \frac{pmh'}{h}\left(\frac{\alpha - \varphi(1+\alpha^2)}{2m^2\varphi(p-1) - \beta}\right).$$

Wird zur weiteren Lösung der gestellten Aufgabe der Wurzelwert in dem Ausdrucke für φ in eine Reihe entwickelt, so folgt angenähert $\varphi = \frac{\delta}{2\varepsilon}$.

Nun wird in Formel (1) n als Unbekannte angenommen und zur Einfachheit $\frac{a}{h} = r$, $\frac{Rh}{ph^2} = c$ gesetzt; dadurch geht (1) nach Ersetzung von $\beta, \delta, \varepsilon, \varphi$ durch ihre Werte über in:

$$m^3 - m^2\left(2c\,\frac{(2-p)(\alpha^2+1)}{2\alpha(p-1)}\right)$$

$$-m\left(\frac{c(2-p)(\alpha^2+1)}{\alpha(p-1)} + \frac{pr(\alpha^2+1)}{2\alpha(p-1)}\right) + \frac{cpr(\alpha^2+1)}{\alpha(p-1)} = 0,$$

woraus m, nach Elimination des quadratischen Gliedes, trigonometrisch berechnet werden kann. Die trigonometrische Tangente des gesuchten Böschungswinkels ist dann:

$$n = m + (r + \alpha).$$

Hierauf folgt die Erörterung einiger besonderer Fälle und schliesslich die Anwendung der Theorie auf 6 praktische Zahlenbeispiele. P.

P. W. Almquist. Zur älteren Theorie des Erddrucks. Civiling. XXXI. 69-78.

Bekanntlich beruhen die älteren Theorien des Erddrucks auf der Annahme einer ebenen Gleitfläche; sie stimmen ferner darin überein, dass der Angriffspunkt des Erddrucks mit dem oberen Endpunkt des unteren Drittels der Mauer identisch sei, unterscheiden sich jedoch durch die Annahme über die Richtung des Erddrucks. Die Grösse des Erddrucks und die Lage der Gleitfläche lässt sich dann auf Grund eines im Princip von Poncelet gegebenen Verfahrens graphisch bestimmen. Im Jahre 1878 hat J. Weyrauch einen etwas anderen Weg eingeschlagen, indem er es unterliess, eine Annahme über die Richtung des Erddrucks zu machen, und statt dessen die Hypothese an die Spitze stellte: Parallele Flächenelemente erleiden auch parallelen Druck.

Eine unmittelbare Folge dieser Annahme ist, dass sowohl die Mauer als auch die Gleitfläche durch den Angriffspunkt des betreffenden Druckes nach dem Verhältnis 2:1 geteilt werden. Als Ersatz für die fehlende Annahme über die Erddruckrichtung erhält man dann eine Gleichung zu ihrer Bestimmung, nämlich

die Momentengleichung für das Druckprisma. Weyrauch hat durch Rechnung Richtung und Grösse des Erddrucks aus seinen Annahmen abgeleitet; hier wird ein graphisches Verfahren zur Ermittelung der fraglichen Grössen aus der angegebenen Hypothese angewandt. F. K.

E. Winkler. Ueber Erddruck auf gebrochene und gekrümmte Wandflächen. Centralbl. d. Bauverw. V. 73-76.

Auf Grund der bekannten Principien des Herrn Verfassers wird unter Voraussetzung ebener Gleitflächen und unter der Annahme, dass der Erddruck mit den Normalen der einzelnen Mauerelemente den Reibungswinkel von Sand auf Mauerwerk einschliesst, ein graphisches Verfahren entwickelt, welches zur successiven Bestimmung der Gleitflächen und des Erddrucks für gebrochene und gekrümmte Mauern dient. F. K.

A Morghen. Variazioni che sono prodotte nel valore del momento d'inerzia di un corpo dall' ineguale distribuzione della materia in esso. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 469-475, 616-621.

Bei der experimentellen Bestimmung des Trägheitsmomentes eines unregelmässig gestalteten Magneten bedient man sich angehängter Ringe oder cylindrischer Stäbe, bei denen eine genaue geometrische Form und eine homogene Masse vorausgesetzt wird. Um den Einfluss zu beurteilen, den eine Abweichung von diesen angenommenen Eigenschaften ausübt, berechnet der Verfasser unter Voraussetzung gewisser gesetzmässiger Unregelmässigkeiten den dem Trägheitsmoment hinzuzufügenden Correctionsfactor und prüft die Rechnungsergebnisse experimentell. Es ergiebt sich, dass der durch die erwähnten Abweichungen erzeugte Fehler bei Ringen bedeutend kleiner ist als bei Cylindern, jene also vorzuziehen sind. Lp.

G. Bardelli. Alcune formule sui momenti d'inerzia dei poligoni piani. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 463-473.

Die Trägheitsmomente N_x, N_y und das Deviationsmoment N_{xy} für den Flächeninhalt und den Umfang eines homogenen ebenen geradlinigen Vielecks in Bezug auf zwei beliebige Axen werden zunächst als Functionen der Coordinaten der Ecken des Vielecks ausgedrückt. Danach werden die Grössen $H = N_x + N_y$ und $K = N_x N_y - N_{xy}^2$, von denen die beiden Hauptträgheitsmomente durch die quadratische Gleichung $s^2 - Hs + K = 0$ abhängen, in isotrope Functionen umgerechnet (d. h. nach Rankine in solche, welche die Coordinaten nicht mehr explicite enthalten).

Lp.

W. Ritter. Das Trägheitsmoment eines Liniensystems. Wolf Z. XXIX. 305-317. (1884.)

Anknüpfend an den Begriff des Trägheitsmomentes eines ebenen Punktsystems in Bezug auf eine Gerade definirt Herr Ritter als Trägheitsmoment eines ebenen Systems von Linien mit den Gewichten $p_1, p_2, \dots, p_n$ in Bezug auf einen Punkt O, von welchem dieselben die Abstände $r_1, r_2, \dots, r_n$ haben, einen Begriff, welcher in einem gewissen Sinne dem erstgenannten dual gegenüber steht, nämlich den Ausdruck

$$J_0 = z_0^2 \Sigma p = \Sigma(p r^2).$$

Es sei O der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, mit dessen x-Axe die Linien des Systems die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bilden. In Bezug auf den Punkt $A(x, y)$ ist dann das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} J_a = z^2 \Sigma p &= \Sigma[p(r + x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2] \\ &= J_0 + x^2 \Sigma p \sin^2\alpha - 2xy \Sigma p \sin\alpha\cos\alpha + y^2 \Sigma p \cos^2\alpha \\ &\quad + 2x \Sigma pr \sin\alpha - 2y \Sigma pr \cos\alpha. \end{aligned}$$

Trägt man nun in jedem Punkte (x, y) senkrecht zu der betrachteten Ebene die betreffenden Werte $\pm z$ ab, so erhält man eine bequeme Darstellung des eingeführten Begriffs, welche sich auch vorteilhaft erweist für die Bestimmung des Centrifugal-

momentes in Bezug auf zwei Punkte

$$C = \Sigma pr'r''.$$

Den Schluss der Abhandlung bildet die Darlegung graphischer Methoden zur Bestimmung der beiden eingeführten Begriffe.

F. K.

P. Frige. Einfache Formel zur Bestimmung des Trägheitsmomentes flacher Wellbleche Dtsche Bauztg. XIX. 544.

Es wird angenommen, dass eine zur Axe verticale Ebene das Wellblech in einer aus congruenten Parabelstücken zusammengesetzten Wellenlinie schneidet; die gesuchte Grösse ergiebt sich dann durch eine einfache Rechnung, welche kein Interesse darbietet.

F. K.

B. Hydrostatik.

H Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. C. R. C 346-348, 1068-1070; CI. 307-349. Acta Math. VII 259-380.

Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener rotirender Flüssigkeiten, deren Teilchen sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, erfährt durch die umfangreiche Arbeit des Herrn Poincaré in den Acta Mathematica [die Noten in den C. R. sind nur Auszüge derselben] eine erhebliche Förderung. Insbesondere wird die Existenz einer Reihe von neuen Gleichgewichtsfiguren abgeleitet und die Frage nach der Stabilität der einzelnen Figuren erledigt. Dabei ergeben sich verschiedene Sätze, die von Thomson und Tait in der zweiten Auflage ihres „Treatise on natural philosophy" ohne Ableitung mitgeteilt sind [cf. F. d. M. XV. 1883. 801, XVI. 1884. 793-795]. Die hauptsächlichsten Resultate der vorliegenden Arbeit sind indessen völlig neu.

Herr Poincaré beginnt mit der Betrachtung eines beliebigen

Massensystems, dessen Lage durch n Grössen $x_1, x_2, \dots, x_n$ definirt ist. Die auf das System wirkenden Kräfte mögen eine Kräftefunction F besitzen, die ausser den Grössen $x_1, \dots, x_n$ noch einen variabeln Parameter y enthält. Die Gleichgewichtsbedingungen

$$(1) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

mögen k verschiedene Wurzelsysteme für $x_1, \dots, x_n$ ergeben oder, wie Herr Poincaré mit Rücksicht darauf, dass F und damit die einzelnen Wurzelsysteme von y abhängen, sich ausdrückt, k lineare Reihen von Wurzeln und damit k lineare Reihen verschiedener Gleichgewichtslagen. Es kann nun der Fall eintreten, dass für einen speciellen Wert $y = a$ zwei oder mehr Wurzelreihen und damit verschiedenartige Gleichgewichtslagen zusammenfallen. Eine solche Gleichgewichtslage wird als „Bifurcationsform" bezeichnet; das Charakteristische derselben besteht darin, dass jede unendlich kleine Aenderung von y statt der einen zwei neue, unter einander unendlich wenig verschiedene Gleichgewichtslagen giebt. Andrerseits kann auch der Fall eintreten, dass bei Variation von y für den speciellen Wert $y = a$ zwei Wurzelreihen zusammenfallen, dass beide Reihen aber bei weiterer Variation von y imaginär werden; die dem $y = a$ entsprechende Gleichgewichtslage wird dann „Grenzform" genannt. In beiden Fällen nimmt die aus den zweiten Differentialquotienten der Function F nach den Grössen $x_1, x_2, \dots, x_n$ gebildete Determinante Δ, wenn man darin mittels der Gleichungen (1) die $x_1, x_2, \dots, x_n$ durch y ausdrückt, für $y = a$ den Wert Null an. Wenn Δ für irgend einen Wert von y nicht verschwindet, so muss eine unendlich kleine Aenderung von y eine einzige neue Gleichgewichtslage ergeben.

Es wird weiter die zweite Variation von F betrachtet und so umgeformt gedacht, dass nur die Quadrate der Variabeln vorkommen; die Coefficienten derselben werden als „Stabilitätscoefficienten" bezeichnet. Da Δ jetzt das Product der Stabilitätscoefficienten ist, so muss sowohl für eine Grenzform, als für eine Bifurcationsform einer dieser Coefficienten verschwinden. Für eine Bifurcationsform ist ferner erforderlich, dass für den betreffenden

Wert $y = \alpha$ einer der Stabilitätscoefficienten und damit Δ sein Vorzeichen wechselt. Dies muss für jede der beiden Wurzelreihen, die in der Bifurcationsform zusammenfallen, stattfinden. Wenn daher für eine dieser Reihen stabiles, für die zweite instabiles Gleichgewicht bestand, so wechselt die Art des Gleichgewichts bei Ueberschreitung des Wertes $y = \alpha$.

Die bisher aufgestellten Begriffe und Sätze lassen sich, wie an einem speciellen Beispiel gezeigt wird, auf den Fall übertragen, in dem die Anzahl der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$, welche die Lage des Systems bestimmen, unendlich gross ist, und damit ist die Grundlage für die Behandlung von Flüssigkeitsmassen, die beliebigen Kräften unterworfen sind, gegeben. Herr Poincaré sagt von den Schlüssen, die zur Ausdehnung auf unendlich viel Variable führen, dieselben seien zwar nicht absolut einwandsfrei; aber man könne in der Mechanik hinsichtlich des Unendlichen nicht dieselbe Strenge verlangen wie in der reinen Analysis. Keinenfalls unterliegt das folgende, auf die besagte Art abgeleitete Princip einem Zweifel: Wenn auf irgend ein mechanisches System, welches unter der Wirkung gewisser Kräfte im stabilen Gleichgewicht ist, unendlich kleine störende Kräfte wirken, so nimmt das System unter der Einwirkung dieser neuen Kräfte eine neue, von der vorigen unendlich wenig verschiedene stabile Gleichgewichtslage an; insbesondere gilt dies für Flüssigkeitsmassen.

Die wichtigsten Resultate seiner Arbeit gewinnt Herr Poincaré durch Anwendung der vorstehenden Betrachtungen auf die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren, für welche die Rotationsgeschwindigkeit ω die Rolle des variabeln Parameters spielt. Die hinsichtlich dieser Gleichgewichtsfiguren bekannten Resultate kann man folgendermassen zusammenfassen: die Ellipsoide bilden, falls ω^2 zwischen 0 und $4\pi.0{,}093$ variirt, vier lineare Reihen derart, dass zu jedem ω zwei Rotationsellipsoide und zwei Jacobi-sche Ellipsoide (beide mit denselben Axen, aber das eine gegen das andere um 90 Grad gedreht) gehören; bei $\omega^2 = 4\pi.0{,}093$ fallen die beiden Jacobi'schen mit einem der Rotationsellipsoide zusammen, und dieses ist gleichzeitig eine Grenzform und eine Bifurcationsform. Von $\omega^2 = 4\pi.0{,}093$ an existiren nur noch

zwei Reihen, deren jede aus Rotationsellipsoiden besteht; $\omega^2 = 4\pi . 0,112$ endlich ist eine Grenzform, weil von hier ab überhaupt keine ellipsoidische Gleichgewichtsfigur mehr existirt. Es fragt sich nun, ob es unter den Ellipsoiden noch weitere Bifurcationsformen giebt, von denen man zu neuen Reihen von Gleichgewichtsfiguren gelangen kann. Um diese Frage zu beantworten, ist es nötig, die Stabilitätscoefficienten eines Ellipsoids zu berechnen und zu untersuchen, unter welchen Umständen dieselben verschwinden; die Stabilitätscoefficienten aber sind die Factoren in der zweiten Variation der potentiellen Energie der ganzen Flüssigkeitsmasse. Eine beliebige Variation der Flüssigkeitsmasse ergiebt sich dadurch, dass jeder Punkt der Oberfläche des Ellipsoids längs seiner Normale eine unendlich kleine Verschiebung ζ, die teils positiv, teils negativ sein kann, erfährt. Für die potentielle Energie W der deformirten Flüssigkeit wird zunächst durch einfache Betrachtungen die Gleichung gefunden:

$$(2)\qquad W = W_0 - \tfrac{1}{2}\int g\zeta^2 d\omega + \tfrac{1}{2}\iint \frac{d\omega\, d\omega'\, \zeta\zeta'}{E}\,.$$

Hier ist W_0 der Wert von W vor der Deformation, g die Resultante aus der Anziehung der Flüssigkeitsteilchen unter einander und der Centrifugalkraft, $d\omega$ und $d\omega'$ Oberflächenelemente des ursprünglichen Ellipsoids, E die Entfernung der Elemente $d\omega$ und $d\omega'$. Für einen Punkt der Oberfläche des Ellipsoids ist ferner, falls man die Anziehung des durch die Deformation entstandenen Wulstes gegenüber der Anziehung des Ellipsoids vernachlässigt, die Kraft g umgekehrt proportional der Grösse

$$l = \frac{P}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}\,,$$

wo P das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des betreffenden Punktes gefällte Lot, $\varrho, \sqrt{\varrho^2-b^2}, \sqrt{\varrho^2-c^2}$ ($b < c$) die Halbaxen des Ellipsoids bezeichnen; die Rotation erfolgt um die kürzeste Axe $\sqrt{\varrho^2-c^2}$. Der Proportionalitätsfactor für g ergiebt sich leicht durch Anwendung auf die Endpunkte der Axe $\sqrt{\varrho^2-c^2}$,

und es wird

$$g.l = \tfrac{4}{3}\pi R_1 S_1.$$

Darin ist $R_1 = \sqrt{\varrho^2 - c^2}$ und S_1 die zu R_1 conjugirte Lamé'sche Function, d. h. S_1 ist das zweite Integral derjenigen Lamé'schen Differentialgleichung, deren erstes Integral R_1 ist. Sind ferner ϱ, μ, ν die elliptischen Coordinaten eines Punktes des Raumes, also μ, ν die elliptischen Coordinaten eines Punktes der betrachteten Ellipsoidfläche, so kann man die willkürliche Function $\frac{\zeta}{l}$ in eine convergente, nach Lamé'schen Functionen von μ und ν fortschreitende Reihe entwickelt denken

$$\frac{\zeta}{l} = \Sigma A_i M_i(\mu).N_i(\nu).$$

Setzt man diese Reihe sowie den Ausdruck für g in (2) ein, so ergiebt sich durch Anwendung gewisser schon von Liouville gefundener Integralsätze, welche die Lamé'schen Functionen betreffen, als schliesslicher Ausdruck

$$(3) \qquad W = W_0 - \frac{4\pi}{2} \Sigma A_i^2 \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) l M_i^2 N_i^2 \, d\omega$$

Hier sind R_i und S_i wieder Lamé'sche Functionen erster und zweiter Art von ϱ, und zwar von der Ordnung n. Damit ist die Variation der potentiellen Energie gefunden $= W - W_0$. Da die varirte Fläche durch die A_i bestimmt ist und die Producte dieser Grossen in $W - W_0$ nicht vorkommen, so sind die Factoren der einzelnen A_i^2 der obigen Reihe die gesuchten Stabilitätscoefficienten. Soll eines der betrachteten Ellipsoide eine Bifurcationsform sein, so mus[illegible] dieser C[illegible]ten verschwinden, also ϱ der transscend[illegible]

$$[illegible] \frac{R_i S_i}{[illegible] 1} = 0.$$

Von [illegible] erfüllt wird, wird [illegible] reh $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ [illegible] n keine [illegible] Beln [illegible]

Fall $n = 1$ und R_1 nicht durch $\sqrt{\varrho^2 - c^2}$ teilbar giebt ebenfalls keine Wurzel.

Wenn nun für irgend ein i (resp. n) Gleichung (4) erfüllt ist und damit einer der Stabilitätscoefficienten verschwindet, so weiss man, dass das Ellipsoid, das bei constantem b und c durch den betreffenden Wurzelwert ϱ bestimmt ist, eine Bifurcationsform bildet. Ist ω_n der zu diesem ϱ gehörige Wert der Winkelgeschwindigkeit, so gehören zu der Winkelgeschwindigkeit $\omega_n + \varepsilon$ zwei mögliche Gleichgewichtsfiguren, ein Ellipsoid und eine Fläche Φ, die sich von dem Ellipsoid nur unendlich wenig unterscheidet. Ihre Gleichung in elliptischen Coordinaten ist

$$(5) \qquad \zeta = \theta l M N.$$

Dabei ist θ eine unendlich kleine von ε abhängende Constante, ζ ist der senkrechte Abstand eines Punktes der neuen Fläche von dem vorher betrachteten Ellipsoid, M resp. N sind gewisse Lamé'sche Functionen der elliptischen Coordinaten μ resp. ν, und zwar von beliebiger Ordnung; l endlich hat dieselbe Bedeutung wie oben. Ist die Ordnung n der Lamé'schen Functionen ungerade, so hat die betreffende Figur, die für $n = 3$ näher discutirt wird, zwei Symmetrieebenen; für eine gerade Ordnungszahl dagegen bestehen drei Symmetrieebenen. Die aus (5) für $n = 2$ sich ergebende Deformation stellt nur eine Drehung des Ellipsoids um einen unendlich kleinen Winkel dar; da eine solche Drehung das Gleichgewicht nicht ändern kann, so muss der betreffende Stabilitätscoefficient notwendig verschwinden, d. h. es muss

$$(6) \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_1 S_1}{5} = 0$$

sein. Für eine Bifurcationsform aber muss ϱ ausserdem noch der Gleichung (4) genügen. Beides ist gleichzeitig möglich, falls man b variiren lässt. Falls man nämlich nur c als gegeben annimmt, kann man $\varrho > c$ und $b < c$ so bestimmen, dass den beiden Gleichungen (4) und (6) genügt wird. Man kann also nicht das ...nr Axenverhältnis eines Bifurcationsellipsoids beliebig annehmen, ... ein solches sind durch (4) und (6) beide Axenver... ...mt. Die Ableitung der neuen Gleichgewichts... ...) bestimmt ist, ändert sich damit nicht.

Vor der Discussion für die dreiaxigen Ellipsoide wird die für die Rotationsellipsoide durchgeführt. Hier ist $b = 0$, und die Gleichung (5) geht damit in folgende über

$$(7) \qquad \zeta = \Theta l \cos(j\varphi - \lambda) . M .$$

Darin ist φ der Winkel einer Meridianebene mit einer festen Meridianebene, M ist eine Kugelfunction der elliptischen Coordinate, durch welche die Lage eines Punktes auf dem Meridian bestimmt wird, j ist eine ganze Zahl $<$ oder $=$ der Ordnungszahl der Kugelfunction M, λ eine beliebige Constante. Die Gleichung (7) stellt keineswegs in allen Fällen eine Rotationsfläche dar, sondern nur eine Fläche mit gewissen Symmetrieebenen, resp. -axen. Diese Symmetrien bleiben noch bestehen, wenn zu der angenäherten Flächengleichung (l) die Glieder höherer Ordnung hinzugefügt werden. Bemerkenswert ist noch folgendes Resultat: Wenn man für Rotationsellipsoide ($b = 0$) bei constantem c, ϱ von ∞ an allmählich abnehmen, das Ellipsoid also von der Kugelform aus sich allmählich abplatten lässt (wobei natürlich die Winkelgeschwindigkeit ω sich ändert), so ist der erste der Stabilitätscoefficienten, der verschwindet, der zu $n = 2$, $j = 2$ gehörige. Die betreffende Form gehört gleichzeitig zu den Jacobi'schen Ellipsoiden, ist also diejenige Bifurcationsform, bei der die Rotationsellipsoide in dreiaxige übergehen.

Hinsichtlich der Stabilität der verschiedenen Gleichgewichtsfiguren findet Herr Poincaré durch Discussion des Vorzeichens der Stabilitätscoefficienten folgende Resultate. Rotationsellipsoide sind stabile Gleichgewichtsfiguren, wenn sie weniger abgeplattet sind als dasjenige Rotationsellipsoid E, das zugleich ein Jacobi'sches Ellipsoid ist. Die dreiaxigen Ellipsoide sind stabil, wenn sie [illegible] möglich sind [illegible] den Fällen bleibt die Stabilität be[illegible] die Fl[illegible] reibende ist. Rotationsellipsoide, [illegible] des obigen E ist, aber doch [illegible] gleicht, sind stabil, falls die [illegible] für reibende Flüssig[illegible] dreiaxige Ellipsoide von ϱ [illegible] hergeleiteten Gleichge[illegible] Ellipsoiden abge

leiteten wie stark abgeplattete Rotationsellipsoide, ebenso die aus den dreiaxigen Ellipsoiden abgeleiteten mit Ausnahme des Falls $n = 3$. Gleichung (5) giebt also für $n = 3$ eine neue stabile Gleichgewichtsfigur. Ob es noch andere stabile Gleichgewichtsfiguren giebt, die nicht einem Ellipsoid sehr nahe kommen, sondern erheblich davon abweichen, bleibt unentschieden.

Hiermit sind die wichtigsten Resultate des Herrn Poincaré skizzirt, der Inhalt der Arbeit aber damit keineswegs erschöpft. Von den sonst behandelten Fragen sind folgende zu nennen: Bestimmung der Elemente einer ringförmigen Gleichgewichtsfigur (ohne Stabilitätsbetrachtungen), Aufhellung einer dunklen Stelle in Laplace's Mecanique céleste (Livre III, No. 27, 28) durch den Begriff der Bifurcationsform, Bedingungen für die Stabilität des relativen Gleichgewichts, ausführliche Behandlung kleiner Deformationsschwingungen des flüssigen Ellipsoids, endlich neue Beweise für einige bekannte Sätze über Lamé'sche Functionen. Hinsichtlich dieser Fragen sowie hinsichtlich mancher sonstigen Einzelheiten muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Wn.

A. Baule. La théorie du navire. Brux. S. sc. IX B 259-285.

Untersuchung einiger bisher nicht genügend beleuchteter, auf die Stabilität des Schiffes bezüglicher Fragen.

Mn. (Lp.)

Joh. Brik. Graphische Darstellung des Winddrucks auf cylindrische Flächen. Centralbl d. Bauverw. V. 60.

Der Inhalt der kurzen Notiz geht aus dem Titel hervor. Der Winddruck für ein unter dem Winkel α getroffenes Element wird gleich $w \sin\alpha$ angenommen, wo w von α unabhängig ist.

F. K.

Capitel 4.

D y n a m i k.

A. Dynamik fester Körper.

B. Williamson, F. A. Tarleton. An elementary treatise on dynamics. London. Longmans and Co

Nach dem Referate im Athenaeum No. 3023 S. 440 „sind die Autoren von den elementarsten Begriffen ausgegangen, so dass jeder Studirende, der mit der Bezeichnungsweise der Analysis vertraut ist, sich an das Werk machen kann, ohne des vorgängigen Studiums eines anderen Buches über den Gegenstand zu bedürfen.“ Es behandelt zuerst die Dynamik des materiellen Punktes, dann die des starren Körpers und giebt eine grosse Anzahl von Aufgaben am Ende der Capitel unter Hinzufügung der Lösungen bei den schwierigeren von ihnen. Lp.

A. Voss. Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik. Klein Ann. XXV 258-286.

Der Verfasser erweitert die üblichen Annahmen über die Natur der Bedingungen eines unfreien Systems dahin, dass er an Stelle der dynamischen Differentialgleichungen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_1^r \nu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n); \quad \varphi_s = 0, \quad (s = 1, \dots, r)$$

die allgemeineren setzt:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \sum_1^r \mu_s p_{si}; \quad \sum_1^n p_{si} dx_i = 0,$$
$$(i = 1, \dots, n) \qquad (s = 1, \dots, r).$$

[illegible] hervorragende Wichtigkeit der [illegible] naten der Systempunkte [illegible] wollen, bezweckt er [illegible] angestellten Unter- [illegible] hinzuweisen,

dass kein principieller Grund vorliegt, durch die übliche analytische Fassung jede andere erweiterte Fragestellung als undenkbar auszuschliessen, sondern dass vielmehr auch Bedingungen allgemeinerer Art gar wohl einen dynamisch vollkommen vorstellbaren Inhalt haben können; wenigstens aber sollen diese Untersuchungen „zur Erläuterung der analytischen Processe beitragen, welche bei den dynamischen Differentialgleichungen zur Verwendung kommen". T.

J. J. Weyrauch. Das Princip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer. Zur Orientirung. Leipzig. Teubner. 48 S.

G. Pennacchietti. Sopra un integrale più generale di quello delle forze vive pel moto d'un sistema di punti materiali. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 242-252, 269-279.

Ist ein freies System von m Punkten vorhanden, und setzt man $n = 3m$, so kann man sich erstens fragen, wann das Gleichungssystem

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

ein erstes Integral von der Form

$$(1) \qquad \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} x'_r x'_s + \sum_{s=1}^{n} p_s x'_s = 2F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + Ct + \alpha$$

besitzt, wo C, α Constanten, a_{rs}, p_s Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, und $a_{rs} = a_{sr}$. Man findet, dass, wenn ein solches Integral existirt, es in zwei demselben Probleme angehörende Integrale zerfällt, nämlich

$$(2) \qquad \sum_{s=1}^{n} p_s x'_s - Ct = \text{const.},$$

$$\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} x'_r x'_s - 2F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

...dingungen des Integrals (1) sind also aus den

Bedingungen für die Existenz der einzelnen Integrale (2) und (3) zu ermitteln.

Die Behandlung des Integrales (2) führt zu dem Schlusse, dass die allgemeinste mögliche Form der Coefficienten p_r die folgende ist:

$$p_s = \sum_{r=1}^{n} a_{sr} x_r + k_s,$$

wo a_{sr}, k_s Constanten bedeuten, und $a_{rr} = 0$, $a_{rs} = -a_{sr}$ ist. Das Integral (2) nimmt also die Form an:

$$\sum_{s=1}^{n} k_s x'_s + \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}(x_s x'_r - x_r x'_s) - Ct = \text{const.};$$

es gehört zu allen denjenigen Problemen, bei welchen

$$\sum_{s=1}^{n} k_s X_s + \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}(x_s X_r - x_r X_s) - C = 0.$$

Was das Integral (3) betrifft, so findet man, dass die a_{rs} quadratische Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sein müssen, die gewissen Bedingungen unterworfen sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Integrales (3) ist, dass der Ausdruck

$$\sum_{r=1}^{n} \Big(\sum_{s}^{n} a_{rs} X_s \Big) dx_r$$

das voll[illegible] [illegible]differenti[illegible] [illegible]unction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei. Dasselb[illegible] [illegible] von der Form

[illegible]

die Bew[illegible] [illegible]ems beschränken. Setzt man [illegible]

[illegible] wenn die [illegible]

[illegible]

[illegible]

canon[illegible]

Hamilton'schen Gleichungssysteme der Form nach ganz identisch ist. Vi.

B. Kirsch. Ueber die Anwendung der analytisch-mechanischen Principe in der Baumechanik. Z. deutsch. Ing. XXIX 46.

Mit Rücksicht auf die Gleichheit von lebendiger Kraft und geleisteter Arbeit: $T = U$, erhält der Herr Verfasser aus dem Princip Hamilton's

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)dt = 0$$

einerseits das Princip der kleinsten Wirkung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0,$$

andererseits eine Gleichung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} U dt = 0,$$

welche als Princip der kleinsten Gesamtarbeit bezeichnet wird. Dieser Name ist nicht glücklich gewählt, da er, wie die vorliegende Arbeit selbst zeigt, leicht zu Irrungen Veranlassung giebt. Aus dem an und für sich richtigen Satze, dass bei einem Uebergange aus einer Ruhelage in eine andere keine Arbeit geleistet werde, folgert der Herr Verfasser für solche Vorgänge die Gleichung

$$\int_{t_0}^{t_1} U dt = 0.$$

...ungsgleichung $U = T$ genügt, um die Unrichtigkeit ...ung zu zeigen. Denn da ein solcher Uebergang nicht ... denken ist, so kann $\int_{t_0}^{t_1} T dt$ und daher auch

Des weiteren wird von elastischen Systemen behauptet:

„Es müssen die innern Spannungen nach jeder Elementardeformation in der Grosse entstanden sein, dass von da ab Gleichgewicht herrschen würde, falls nicht die Aussenkräfte sich weiter änderten.“

Das ist in dieser Allgemeinheit nicht richtig; in dem Falle, wo der wahre Sachverhalt dieser Behauptung entspricht, ist dann allerdings auch die Arbeit der inneren Kräfte gleich und entgegengesetzt derjenigen der äusseren. Den Schluss jedoch:

„Da nun die Summe dieser beiden Arbeiten, über den ganzen Verlauf der Deformation erstreckt, ein Minimum ist, so muss, weil die Functionen stetig sind, jede für sich ein Minimum sein“, vermag Referent nicht einzusehen.

Die mitgeteilten Proben werden zur Kennzeichnung der Arbeit genügen. F. K.

G. Pennacchietti. Sugl' integrali delle equazioni del moto di un punto materiale. Batt. G. XXIII. 158-166.

„Wenn ein Punkt von einer Kraft mit constanter Richtung angegriffen wird, so befindet er sich bei der Bewegung immer in ein und derselben Ebene. Ferner sind der Zeit proportional: 1) die (mit der Zeit gerechneten) Abstände der auf die Coordinatenebenen projicirten, successiven Wirkungslinien der Kraft, die den successiven Lagen des beweglichen Punktes entsprechen, 2) di[illegible]stände der [illegible]linien unter einander und die Projec[illegible] Al[illegible] eine beliebige Ebene oder Axe. [illegible] nach einer festen Richtung durch d[illegible] Punktes gelegten Geraden auf [illegible] gemacht werden, und wenn zwei [illegible] dritte, von der Zeit [illegible], so ist die Bahn- [illegible] immer dieselbe [illegible] der Ver- [illegible]

comuni a più problemi di dinamica". (Annali d. R. Scuola Normale di Pisa. IV. 1877.) Lp.

H. de Pont. Note sur le mouvement d'un point matériel sollicité par un centre fixe. Teixeira J. VII. 184-189.

Der Verfasser betrachtet einen materiellen Punkt, der von einem festen Punkte angezogen wird, und auf den eine Kraft wirkt, die eine Function der Coordinaten des bewegten Punktes ist. Tx. (Hch.)

L. Lecornu. Sur le mouvement d'un point dans un plan et sur le temps imaginaire. C. R. CI. 1244-1246.

L. Lecornu. Sur les forces analytiques. J. de l'Éc. Pol. cah. LV. 253-273.

Auf einen in einer Ebene beweglichen Punkt wirke eine Kraft, deren parallel zu den rechtwinkligen Coordinaten genommene Componenten X, Y seien. Diese werden als solche Functionen der Coordinaten x, y vorausgesetzt, dass, wenn man $x+iy$ gleich der complexen Veränderlichen z setzt, $X+iY = Z$ eine analytische Function von z ist. In diesem Falle nennt der Verfasser das System der Kräfte X, Y selber „analytisch". Die Durchführung der Untersuchung dieses hypothetischen Falles der Bewegung eines Punktes wird durch einen Ausspruch von C. G. J. Jacobi gerechtfertigt, nach welchem solche mechanischen Probleme mit grösster Sorgfalt geprüft werden müssen, bei denen die Integration der Differentialgleichungen auf Quadraturen gebracht werden kann. Setzt man aber $Z = \frac{1}{2}F'(z)$, so erhält man

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{F(z)+C}},$$

und eine weitere Quadratur liefert die Bewegungsgleichungen ... r Form. Die nähere Erforschung dieser Beziehung ... as $F(z)$ eine monodrome Function von z ist, bildet ... und der im J. de l'Éc. Pol. erschienenen Arbeit.

Diese Ergebnisse der Untersuchung werden in 17 Sätze zusammengefasst, die der Verfasser in der Note aus den C. R. zum grösseren Teile auszugsweise mitteilt, deren Wiedergabe in einem kürzeren Berichte indes nicht gut möglich ist.

Was die Einführung der imaginären Zeit und die damit verbundenen Vorteile anlangt, so genüge das Folgende. Die Bewegung des Punktes in der Ebene kann durch die Gleichung $s = \varphi(t)$ dargestellt werden, wenn t die reelle Zeit bedeutet, ersetzt man jedoch t durch $\theta = t + it'$, wo t und t' reell sind, so stellt die Gleichung $s = \varphi(\theta)$ ein Netz orthogonaler und isothermischer Curven dar. Jedem constanten Wert t' entspricht eine reelle Trajectorie, jedem constanten Wert von t eine die reellen Trajectorien rechtwinklig schneidende Curve. Sind v die Geschwindigkeit, ϱ der Krümmungsradius der Trajectorie, ϱ' derjenige der Orthogonalcurve, so hat man für die Componenten der Beschleunigung in der Tangente und Normale die völlig gleich gebauten Ausdrücke:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{\partial v}{\partial t'}, \quad \frac{v^2}{\varrho'} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Lp.

—

U. Dainelli. Sopra la velocità e l'accelerazione d'un punto soggetto ad una forza centrale. Bologna Mem. (5) V. 511-522.

Zwei freie Massenpunkte μ und M mögen in derselben Ebene je eine beliebige [illegible]rve beschreiben, jeder unter der Einwirkung [illegible] festen Punkte O dieser Ebene [illegible] Punkt O werde als Anfangspunkt [illegible] gewählt, auf welche die [illegible] ist das Verhältnis der [illegible] beliebigen Punkte [illegible] der Punkt be-[illegible] von μ [illegible]

mit dem Quadrate einer gewissen Function f der Coordinaten von m, die das Verhältnis der Strecken OM, Om darstellt. Ferner, welches auch auf dem Fahrstrahl OM derjenige Punkt sei, von dessen Coordinaten α, β die f eine Function ist, so ist diese derartig, dass die Componenten der Geschwindigkeit von M nach der Abscissen- und Ordinaten-Axe in absolutem Werte je bezw. der ersten partiellen Ableitung der inversen Function $\frac{1}{f}$ nach der Ordinate β und der Abscisse α proportional sind, und die Componenten der Beschleunigung von M nach der Abscissen- und Ordinaten-Axe sind in absolutem Werte je bezw. der zweiten partiellen Ableitung von $\frac{1}{f}$ nach der Ordinate β und der Abscisse α proportional, multiplicirt mit dem Quadrate von $\frac{1}{f}$ und dividirt durch die Coordinate, der die Ableitung nicht angehört.

Lp.

A. Bassani. Traiettoria d'un punto sollecitato da due forze, l'una attrativa e l'altra ripulsiva, emananti da un centro d'azione fisso. Batt. G. XXIII. 80-88.

Ist r der Fahrstrahl vom Kraftcentrum nach dem beweglichen Punkte, so erfolgt die Beschleunigung nach der Formel $\lambda r^m - \mu r^n$, wo λ und μ zwei positive Constanten bedeuten. Mit Hülfe der aus den beiden Principien der Flächen und der Erhaltung der Kraft sofort folgenden Differentialgleichung für die Bahncurve werden über den Verlauf derselben solche allgemeinen Betrachtungen angestellt, zu denen die Kenntnis des Differentialquotienten des Fahrstrahls nach dem Polarwinkel genügt, die Integration jener Differentialgleichung jedoch nicht [illegible] ist, wie z. B. über den Krümmungsradius etc. Drei Fälle [illegible] hierbei unterschieden:

$$[illegible]\ 0,\ m+1 \gtrless 0; \quad 2)\ n+1 < 0,\ m+1 > 0;$$
$$3)\ n+1 < 0,\ m+1 < 0.$$

Lp.

R. Hoppe. Bewegung eines senkrecht empor geworfenen Körpers. Hoppe Arch (2) II. 274-280.

Die Berechnung wird unter der vereinfachenden Annahme ausgeführt, dass die Erde eine homogene Kugel sei und kein Luftwiderstand stattfinde. Auf frühere Bearbeitungen desselben Problems, z. B. die Darstellung der Lösung in Schell's „Theorie der Bewegung und der Kräfte", wird nicht Rücksicht genommen. Nach Entwickelung der nötigen Formeln wird ein Zahlenbeispiel durchgerechnet, nämlich die Bewegung einer mit der Anfangsgeschwindigkeit 600 Meter senkrecht empor geworfenen Kugel. Für die Breite 45° wird die Entfernung vom Ausgangspunkt, in welcher das Geschoss niederfällt, zu 155 Meter bestimmt, und zwar in einer Richtung von fast 35° von West nach Süd.

Lp

K. Weihrauch. Ueber die Abweichung eines freifallenden Körpers von der Verticalen. Met Zeitschr II. 27-29.

Wenn φ die geographische Breite, h die Fallhöhe, g die Schwerkraftsconstante, T die Tageslänge bedeutet, so ist die südliche Ablenkung auf der Nordhalbkugel äusserst gering, nämlich gleich

$$\frac{8\pi^2 h^2 \sin\varphi\cos\varphi}{3gT^2} = \frac{h^2}{2g}\sin 2\varphi \operatorname{num}\log(0,32777-8).$$

Für den [illegible] der Ostal[illegible]ng findet der Verfasser auf seine Weise [illegible]h ander[illegible]nnte Grösse. Helmert leitet (a. g. [illegible] de[illegible] Werte nach Gauss aus den Grund[illegible]d zeigt, dass auf der rotirende[illegible] Abweichung = 0 wird, sobald [illegible] und Richtung der Schwerk[illegible]onstant gelten [illegible]sst.

Lp

A. Sprung. Geometrische Ableitung der Grösse des ablenkenden Einflusses der Erdrotation auf horizontale Bewegungen. Met. Zeitschr. I. 250-252.

Der Buff-Zoeppritz'sche Beweis für die Thatsache, dass die Winkeldeviation eines horizontal bewegten Körpers von dem Azimut der Anfangsrichtung völlig unabhängig ist, sah von der Berücksichtigung der Centrifugalbeschleunigung ab. Die vorliegende Note dient zur Ausfüllung der Lücke. Gr.

Fr. Roth. Ueber den mathematischen Ausdruck der Ablenkungskraft, welche durch die Umdrehung der Erde um ihre Axe hervorgebracht wird. Exner Rep. XXI. 506-516. Lp.

D. Edwardes, A. H. Curtis. Solution of question 7662. Ed. Times XLII. 60-61.

Zwei Planeten beschreiben mit constanten Geschwindigkeiten u, v Kreisbahnen von den Radien a, b um die Sonne in Ebenen, die zu einander senkrecht sind. Wenn sie gegenseitig stillzustehen scheinen, so ist ihre relative Geschwindigkeit $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}}(v^2-u^2)^{\frac{1}{2}}$.

Lp.

Andoyer. Sur la réduction du problème des brachistochrones aux équations canoniques. C. R. C. 1577-1578.

Bemerkungen über die Reduction des Problems der Brachistochronen auf die kanonischen Gleichungen unter Bezugnahme auf die von Herrn Appell in C. R. XCVI. 688 (F. d. M. [illegible] 794) angegebenen Resultate inbetreff der Gleichgewichts[illegible]gen für die Fadencurven. Lp.

[illegible] ber die Bewegung eines Punktes auf [illegible] Berlin. 42 S. 8°.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden allgem[illegible] Betrachtungen über die Bewegung eines Punktes auf e[illegible] Fläche unter der Annahme, dass für die Bewegung eine Kr[illegible] function existirt, welche die Zeit nicht enthält. Dann kommt [illegible] Lösung des Problems auf die Ermittelung eines vollständigen [illegible] tegrales der Hamilton-Jacobi'schen partiellen Differentialgleich[illegible] zurück. Der Verfasser macht bei dieser Gelegenheit darauf aufm[illegible] sam, dass die so erhaltenen Integralgleichungen der Bewegun[illegible] gleichungen die Lösung eines allgemeineren Problems geben, n[illegible] lich der Bewegung eines Punktes auf einer Fläche einer du[illegible] Verbiegung aus der gegebenen Fläche hervorgehenden ne[illegible] Oberflächenschar, sodass Punkte der Flächen der Schar, wel[illegible] durch Verbiegung aus einander hervorgehen, auf derselben Nive[illegible] fläche liegen. Da zur Bildung der erwähnten Differentialgleich[illegible] ferner nur die Kenntnis des Linienelementes der Fläche und [illegible] Verlaufs der Kräftefunction nötig ist, so lassen die aus dies[illegible] Umstande gezogenen Folgerungen erst die wahre Bedeut[illegible] dieser Gleichung erkennen. Alsdann wird die Kräftefunct[illegible] specialisirt, indem vorausgesetzt wird, dass ihr erster Differenti[illegible] parameter eine Function von ihr allein ist. Es werden char[illegible] teristische Punkte, Linien und Flächenstücke eingeführt, näml[illegible] die Pole, Niveaulinien und Bewegungsgebiete. Die Niveaulin[illegible] komm[illegible] bei Somoff (Mechanik, Leipzig 1878) vor. „W[illegible] man [illegible] einen Punkt zum Anfangspunkt [illegible] Bew[illegible] setzten Punkt von diesem aus n[illegible] al[illegible] mit allen möglichen Geschw[illegible] d[illegible] Gesammtheit der Stellen, wel[illegible] der [illegible] reicht, oder denen er d[illegible] [illegible] ählten Anfangspunkte [illegible] [illegible] Niveaulinie in ei[illegible] [illegible] der Fläche gena[illegible] [illegible] der Beweg[illegible] [illegible] Als au[illegible] [illegible] der [illegible]

Notizen über bezügliche Arbeiten hinzugefügt. In einem besonderen Abschnitte wird sodann das Jacobi'sche Problem discutirt, indem über die Rotationsfläche und über die Kräftefunction nur ganz allgemeine Voraussetzungen gemacht werden. Als Grundtypus für die Bewegung stellt sich die Oscillation zwischen zwei festen Parallelkreisen heraus. Als Ausartungen ergeben sich asymptotische Annäherung an einen bestimmten Parallelkreis und Gehen ins Unendliche. Bei dieser Untersuchung erweist sich die Abhandlung des Herrn Weierstrass: „Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen," von tiefgreifender Bedeutung. Der Einfluss der Anfangsbedingungen auf den Verlauf der Bewegung wird in einem weiteren Abschnitte erörtert. Den Schluss bildet der Nachweis, dass man sich in jedem einzelnen Falle von vornherein das Bewegungsgebiet des Punktes herstellen kann, sowie die Auseinandersetzung einiger Eigenschaften dieses Gebietes.

Lp.

E. P. Ruffini. Del moto di un punto in una superficie data. Bologna Mem. (4) V. 211-230.

Von der gewöhnlichen Vorstellung ausgehend, dass die bewegende Kraft in jedem Augenblicke die Resultante der äusseren Kraft und der zur Fläche normal gerichteten Reaction der Fläche ist, entwickelt der Verfasser in einer zwar durch Klarheit, jedoch durch keine neuen Ergebnisse ausgezeichneten Darstellung die ersten bekannten Sätze über die Bewegung eines materiellen Punktes auf reibungsloser Oberfläche, u. a. im § 3 die Differentialgleichungen der Brachistochrone, d. h. derjenigen Linie, welche der bewegliche Punkt zwischen zwei gegebenen Punkten A und B der Fläche durchlaufen muss, damit bei gegebener äusserer Kraft die Zeit ein Minimum werde. Lp.

[illegible]-Germain. Sur une application des équations [illegible]ordan J. (4) I. 129-134.

[illegible]spiel für die nicht gerade oft vorkommende

Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen zur vollständigen Lösung eines dynamischen Problems behandelt der Verfasser folgende Aufgabe: Ein Punkt *M*, welcher sich auf einer Kegelfläche bewegt, wird von zwei anziehenden Kräften angegriffen, die eine geht vom Scheitel *O* des Kegels aus, die andere hat die Richtung *MN* von *M* auf eine feste Gerade *OZ* durch *O*; beide Kräfte sind umgekehrt proportional, die erste dem Kubus von *MO*, die zweite dem Kubus von *MN*. Die Bewegung von *M* zu finden. Die Lösung wird zuerst allgemein für eine beliebige Kegelfläche entwickelt, danach am Schlusse für den Kegel zweiter Ordnung specialisirt. Lp.

H. Gyldén. Intermediära banor, som vid en gifven tidpunkt ansluta sig till de verkliga med en kontakt af tredje ordningen. Stockh. Öfv. XLII. 17-36.

Es wird vom Verfasser das folgende Problem gelöst:

Zwei materielle Punkte ziehen einander nach dem Newton'schen Gesetz an, aber ihre Bewegungen sind auch anderen Kräften unterworfen, die nicht explicite als Functionen der Zeit gegeben sind. Wir nehmen jetzt an, dass für einen gewissen Zeitpunkt die numerischen Beträge dieser Kräfte bekannt sind, und ebenso die Beträge der ersten Differentialquotienten der Kraftcomponenten in Bezug [illegible] Zeit. Es [illegible] dann verlangt, eine Bahn zu finden, d[illegible] Moment eine Berührung der dritten [illegible]. E.

Ph. Gil[illegible], relatif à la force vi[illegible]

[illegible] com-

[illegible]

Augenblicke der Bewegung eines festen Körpers einen geraden Kreiscylinder, dessen Erzeugende zur Mozzi'schen Axe (Rotations- und Gleitaxe) parallel ist, und dessen senkrechter Querschnitt das vom Schwerpunkte auf die Mozzi'sche Axe gefällte Lot zum Durchmesser hat, so besitzt jeder Punkt A dieser Cylinderfläche die im König'schen Theorem ausgesagte Eigenschaft, d. h. die gesamte lebendige Kraft des Körpers im betrachteten Augenblicke ist die Summe aus der lebendigen Kraft, welche der Punkt A hätte, wenn die ganze Masse in ihm vereinigt wäre, und aus der lebendigen Kraft des Körpers bei seiner Drehung um den Punkt A. Es giebt keine anderen Punkte des Körpers mit dieser Eigenschaft."

In der zweiten Note wird mitgeteilt, dass dieser Satz von Cauchy im Bande II. der Anciens Exercices p. 104 für starre Punktsysteme aufgestellt ist, und dass Herr O. Bonnet denselben Satz aus einem auf jedes Massensystem anwendbaren allgemeineren Satze abgeleitet hat. Lp.

U. Masoni. Alcune considerazioni sulla diname sollecitante e la torsione generata nel moto di un sistema rigido. Nap. Rend. XXIV 85-89.

„Setzt man voraus, dass die Coordinaten der das System S angreifenden Dyname als Functionen der Coordinaten der erzeugten Torsion gegeben sind, und dass die ersteren gewissen Beziehungen von gegebener Natur genügen, so bestimmt sich die Natur derjenigen Beziehungen, denen die letzteren in entsprechender Weise genügen müssen. Danach werden die Bedingungen dafür [illegible]sucht, dass eine „Dynamen-Function" existire, d. h. eine [illegible]unction, dass ihre partiellen Ableitungen nach den Co[illegible]es Systemes S die Coordinaten der angreifenden [illegible]en. Zum Schlusse werden einige Analogien [illegible]elche die Theorie der Bewegung eines starren [illegible]esonderen Fällen mit der Theorie der per[illegible]s-Axen aufweist". (Bericht des Herrn [illegible] a. a. O. p. 84.) Lp.

H. Bruns. Ueber die Rotation eines starren Körpers. Leipz Ber 55-59.

„Bei der Behandlung der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ist bisher fast durchgängig zur Integration der Bewegungsgleichungen von der Vereinfachung Gebrauch gemacht worden, welche die Wahl der invariabelen Ebene als Fundamentalebene einzuführen gestattet. Diese Specialisirung ist indessen zur Durchführung einer directen Integration der Differentialgleichungen nicht erforderlich; überdies ist dieselbe ohne Vorteil im Falle der Astronomie, wenn es sich, wie bei Erde und Mond, darum handelt, die durch kleine störende Kräfte erzeugte Modification des Vorganges der freien Rotation aufzusuchen. Es ist deshalb von Interesse, kurz eine Transformation der Bewegungsgleichungen anzugeben, welche nicht nur für den Fall der Astronomie zu zweckmässigen Formeln führt, sondern auch erkennen lässt, warum man bei der allgemeinen Integration der Rotationsgleichungen, abgesehen von den beiden bekannten und längst erledigten, einfachsten Fällen, auf bis jetzt nicht überwundene Schwierigkeiten gestossen ist.“

Die Mitteilung der Transformation ist nicht gut möglich ohne einen fast vollständigen Abdruck des an sich sehr knapp gehaltenen Artikels. Lp.

Henry. Les pôles du gyroscope et des solides de révolution. C. R. C. 627-630.

„Wenn ein Umdrehungskörper um seine Axe rotirt, so reduciren sich die aus seiner Rotation und der täglichen Bewegung entstandenen Coriolischen Kräfte auf zwei gleich grosse, parallele und in entgegengesetztem Sinne gerichtete, die an zwei festen, nur von der Gestalt des Körpers abhängigen Polen der Axe angebracht sind. Nennt man diese beiden Pole N und S, indem man als [illegible] denjenigen erklärt, von dem aus die Rotation im Sinne [illegible]drehung zu erfolgen scheint, so kann man [illegible] für alle Stellungen des Körpers zu

Erdaxe parallel sind; sie drängen die beiden Körperpole nach den gleichnamigen Himmelspolen hin. Ihre der Geschwindigkeit des rotirenden Körpers proportionale Intensität hängt nur von der Gestalt desselben ab." Nach dem Beweise dieses Satzes bemerkt der Verfasser: „Dieses neue Theorem führt in die analytische Mechanik Polarkräfte ein ähnlich wie in der Theorie des Magnetismus und der Elektricität. Die Axe eines im Gleichgewicht befindlichen Kreisels muss in der Meridianebene leicht geneigt sein: nach Norden bei Rechtsdrehung, nach Süden im entgegengesetzten Falle; daher muss der Kreisel nicht von West nach Ost, wie Foucault glaubte, fortschreiten, sondern von Ost nach West." Lp.

J. M. Rodrigues. Movimento do solido livre. Lisboa. Typ. da Ac. Real das Sciencias. 30 S. 8°.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines starren, freien Körpers sind erst in zwei Fällen integrirt, nämlich 1) wenn derselbe nur der Einwirkung der Schwerkraft unterworfen ist, 2) wenn er eine concentrisch homogen geschichtete Kugel ist, die von einem oder mehreren festen Punkten im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen angezogen wird. Der Verfasser beweist die Existenz eines neuen Falles der Integrabilität, welcher eine Bedingung über die Form des Körpers und eine zweite über die Natur der äusseren Kräfte als erfüllt voraussetzt: „Die Gleichungen sind integrirbar, wenn der Körper ein Umdrehungskörper ist und die Resultante der äusseren Kräfte in der Ebene der Bewegung liegt, welche durch die Axe des Körpers und durch die Tangente zur Bahncurve bestimmt ist, und wenn dieselbe gemäss einer gegebenen Function ihrer Neigung sich ändert." Oder kürzer: „Wenn ein völlig freier Umdrehungskörper nur der Einwirkung von Kräften unterworfen ist, die mit der Neigung der Körperaxe sich ändern, so sind die [Di]fferentialgleichungen der Bewegung integrirbar." In diesem [Fal]le ist die Rotation unabhängig von der Translation, weil die [Diffe]rentialgleichungen für die erstere für sich integrirbar sind.

Dagegen hängt die Translation von der Rotation ab, weil die Integration der zugehörigen Gleichungen unmittelbar vom ersten Integrale der Euler'schen Gleichungen abhängig ist. Die Aufgabe wird auf Quadraturen zurückgeführt.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile, die Theorie der Rotations- und die der Translationsbewegung; in jedem Teile werden zuerst die Differentialgleichungen für den behandelten Fall aufgestellt und dann integrirt. Ausser dem oben citirten Satze möge auch noch der folgende hergesetzt werden: „Die Quadraturen reduciren sich auf elliptische Functionen in den Fällen:

1) wenn das aus der Reduction der äusseren Kräfte auf den Schwerpunkt resultirende Kräftepaar ein Moment hat, das dem Sinus der Neigung seiner Axe proportional ist (konisches Pendel);

2) wenn es dem Producte aus dem Sinus und dem Cosinus der Neigung proportional ist.“ Lp.

J. M. Rodrigues. Theoria da rotação. Teixeira J. VII. 81-90.

Der Verfasser untersucht einige Fälle, in denen die Gleichungen [illegible] über die Bewegung eines festen unveränderlichen Körpers [illegible] Punkt auf so[illegible]kgeführt werden können, de[illegible] nur von [illegible] abhängt.

Tx. (Hch.)

N. Las[illegible] de Dreh[illegible] ren Körpers, auf den [illegible] wirken[illegible] esten Punkt.

[illegible]

hier gegebene Integral dürfte aber ohne Schwierigkeit mit Anwendung der Kirchhoff'schen Bezeichnung erhalten werden können und also nicht wesentlich neu sein.

E.

de Sparre. Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe et sur le pendule conique. Brux. S. sc. IX B. 49-94.

Mit Hülfe der elliptischen Functionen durchgeführte Darstellung der Hauptergebnisse, zu denen man hinsichtlich dieser Fragen gelangt ist. Zur Behandlung der ersten Aufgabe war der Verfasser durch die einschlägigen schönen Arbeiten von Herrn Hermite angeregt, er macht jedoch seine Entwickelung unabhängig von der Lamé'schen Gleichung. Der Verfasser beweist unter anderem, dass die Poinsot'sche Herpolodie keine Wendepunkte besitzt und folglich nicht die Form besitzt, die man ihr gewöhnlich beilegt. Bei der zweiten Frage giebt Herr de Sparre eine einfachere Darstellung der in seiner Inauguraldissertation angewandten Methode. Mn. (Lp.)

de Sparre. Sur l'herpolodie dans le cas d'une surface du second degré quelconque. Brux. S. sc. IX B. 249-258.

Ausdehnung der in der vorangehenden Abhandlung (p. 49-94) ...gelegten Methode auf den Fall der Bewegung einer beliebi... Fläche zweiter Ordnung. Der Verfasser gelangt in einfacher ... der Bedingung dafür, dass die Herpolodie einen Wende... ... oder nicht. Mn. (Lp.)

... Sur le mouvement d'un corps grave ...spendu par un point de son axe.

... Bruchstücke von Jacobi (Ges. ... Satz lautet: La rotation

d'un corps grave de révolution, autour d'un point de son axe, peut être remplacée par le mouvement relatif de deux corps sur lesquels n'agit aucune force accélératrice. Der Herausgeber dieses Fragments, Herr Lottner, hat (ibid. p. 510) aus den Jacobi'schen Formeln den Beweis des Satzes hergestellt; danach hat Herr Padova ihn von neuem bewiesen (Torino Atti XIX. 1007, F. d. M. XVI. 1884. 812). Herr Halphen spricht den Satz zunächst kinematisch verallgemeinert aus, indem er die bekannte Rollbewegung des Centralellipsoids auf der unveränderlichen Ebene auf beliebige Mittelpunktsflächen (E) zweiter Ordnung ausdehnt und den Sinn des Satzes genau feststellt. Sodann macht er darauf aufmerksam, dass die zwei Bewegungen E, E_1, um die es sich handelt, von acht Constanten abhängen, während die Bewegung M eines schweren Körpers nur von fünf Constanten abhänge. Zwischen den Elementen von E und E_1 müssen also drei Beziehungen stattfinden. Es werden daher die drei Fragen beantwortet: 1) Welches sind diese drei Beziehungen? 2) Die Constanten von M zu bestimmen, wenn E und E_1 gegeben sind. 3) E und E_1 zu finden, wenn M gegeben ist. Lp.

G. Darboux. Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe. C. R. CI. 11-17, 115-119. Jordan J. (4) I. 403 [illegible]

Die [illegible] ersten [illegible] veröffentlichten Noten sind Ausz[illegible] ausführ[illegible] Jordan J. Herr Darboux behan[illegible] das Thema der oben besp[illegible], und stellt sich besonders [illegible] ohne Beweis ausgespro[illegible] Die Untersuchung [illegible] der Aufgabe [illegible] analytique [illegible] dem Cahier [illegible] letztere [illegible]

ist. Der zu beweisende Satz wird zunächst nach dem Vorgange von Herrn Halphen in folgender Fassung gegeben: „Wenn man die Bewegung des schweren, im Punkte O befestigten Umdrehungskörpers (P) betrachtet, so kann man in jedem Augenblicke ein System (C) von solchen um den Punkt O beweglichen Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 bestimmen, dass die absolute Bewegung von (C) und die Bewegung von (C) in Bezug auf den Körper (P) beide mit der Bewegung eines festen Körpers identisch sind, der im Punkte O befestigt und keiner beschleunigenden Kraft unterworfen ist. Die unveränderliche Ebene ist im ersten Falle die horizontale Ebene, im zweiten die zur Körperaxe senkrechte Ebene".

Ausserdem wird bemerkt, dass nach einer von Herrn Sylvester gegebenen Theorie derartige Bewegungen immer auf das Rollen eines Trägheitsellipsoides zurückgeführt werden können, das von einer constanten Rotation um das Lot zur unveränderlichen Ebene begleitet ist. Diese Ueberlegung stelle das Band zwischen den Fassungen des Satzes bei Jacobi und Halphen her. Im Verlaufe der Rechnung, welche zuerst die absolute, dann die relative Bewegung von (C) in Angriff nimmt und ausführlich bei der Bestimmung der in Betracht kommenden Functionen verweilt, ergeben sich dann die vom Verfasser in den C. R. mitgeteilten allgemeinen Resultate:

„Wird der Umdrehungskörper (P) gegeben, welcher der Einwirkung der Schwere bei beliebigen Anfangsbedingungen unterworfen ist, so betrachte man einen Hülfskörper (P'), der in Bezug auf den vorigen eine constante Rotations-Geschwindigkeit $(C-A)n:A$ um die Umdrehungsaxe besitzt, wo C, A, n vorgängig definirte Constanten bedeuten: dann kann die Bewegung des Körpers (P') als das Rollen eines Kegels (Γ') dargestellt werden, der mit diesem Körper unveränderlich verbunden ist und zur Basis
... Herpolodie (H') besitzt, auf einem festen Kegel (Γ), der
...re Herpolodie (H) zur Basis hat. Die eine der Her-
...lt auf der anderen, und die Rotation des Körpers
...lem Augenblicke das Doppelte des Fahrstrahls, der
...kte nach ihrem Berührungspunkte geht."

...tere Sätze, welche die Bewegung der An-

schauung näher bringen. Zum Schlusse führen wir noch folgenden merkwürdigen Satz an: „Wenn von drei Punkten einer unveränderlichen Geraden die beiden ersten auf zwei verschiedenen Kugeln, der dritte auf einer zur Centrale der Kugeln senkrechten Ebene zu bleiben gezwungen werden, wenn ferner die Gerade so ihre Lage ändert, dass sie zur Trajectorie eines ihrer Punkte senkrecht bleibt (was von einer gegebenen Lage aus ihre Bewegung vollständig bestimmt), so beschreibt der auf der Ebene zu bleiben genötigte Punkt eine Herpolodie, alle anderen dagegen sphärische Curven, welche für die Bewegung eines schweren Umdrehungskörpers die Wege des Poles im Raume sind.“

Ein interessanter kinematischer Satz, der sich an den mitgeteilten anschliesst, und die Beschreibung einer Ebene vermittelst eines gegliederten Systems von vier Stäben ermöglicht, bildet den Beschluss der reichhaltigen Abhandlung. Lp.

E. B. Elliott. On small motions of systems with a single degree of freedom. Mess. XV. 38-40.

Bei einem Systeme, für das eine Energie-Gleichung besteht:

$$2T = f(x)\dot{x}^2 = 2\varphi(x) + c,$$

welche die Zeit [illegible] explicit [illegible], werden die Fälle betrachtet, be[illegible] $(a) = ($[illegible] $= 0$ die ersten Annäherungs[illegible] Glei[illegible] setzt man $x = a + \zeta$, so ist die [illegible] Gleich[illegible]

[illegible]

we[illegible] die [illegible] nicht versch[illegible] Drei[illegible] Gerade ist [illegible] folgt [illegible] ein [illegible] sich [illegible]

β) Wenn n gerade und $\varphi^{(n)}(a):f(a)$ negativ ist, so findet vollständige Instabilität statt. γ) Wenn n gerade ist $(= 2p)$, so findet vollständige Stabilität statt, und die Zeit einer Viertelschwingung ist

$$\frac{1}{h^{p-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\right)}\left\{-\frac{\Gamma(2p)f(a)\pi}{4p\,\varphi^{(2p)}(a)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Glr. (Lp.)

C. Leudesdorf, T. C. Simmons. Solution of question 5636. Ed. Times XLII. 51.

Eine homogene materielle spiegelnde Gerade wird zuerst horizontal gehalten; darauf lässt man sie um ihr eines feste Ende A eine Pendelbewegung ausführen, bis sie die Richtung der Verticale erreicht; in diesem Augenblicke lässt man auch das Ende A frei. Der Ort für das Spiegelbild des festen Punktes A während der Bewegung der Geraden hat die Polargleichung $r = (1+\frac{3}{4}\theta^2)\,a\sin\theta$, wenn A der Pol, die Horizontale durch A die Polaraxe, a die Länge der Geraden ist. Lp.

C. Neumann. Ueber die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontal-Ebene unter dem [illegible]luss der Schwere. Leipz. Ber. 352-37[illegible]; Klein Ann. XXVII.

[illegible]ser bedient sich des Hamilton'schen Princips:

$$\delta\int (T+U)\,dt = 0.$$

[illegible] der bekannten Gauss'schen Abhandlung [illegible] p und q die Coordinaten eines Punktes [illegible]benen Körpers, so ergeben sich für [illegible]pers und für die von der Schwere [illegible]drücke von folgender Form:

$$T = T\left(p, q, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{d\Phi}{dt}\right),$$

$$U = U(p, q).$$

Dabei bezeichnen p und q die Coordinaten des augenblicklichen Berührungspunktes, während $\frac{d\Phi}{dt}$ die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die durch den Berührungspunkt gehende Verticale repräsentirt.

Gewisse Schwierigkeiten bereitet der Umstand, dass $d\Phi$ ein unvollständiges Differential, dass mithin $\delta d\Phi$ nicht $= d\delta\Phi$ ist. Die genauere Untersuchung zeigt, dass die Relation stattfindet:

$$\delta d\Phi = d\delta\Phi + S(\delta p\, dq - dp\, \delta q),$$

wo S eine bestimmte Function von p, q vorstellt. Solches constatirt, ergeben sich alsdann aus dem schon erwähnten Hamilton'schen Princip für das in Rede stehende mechanische Problem folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial \Phi'} = C,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial p} = + CSq',$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q} = - CSp',$$

wo p', q', Φ' für $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{d\Phi}{dt}$ stehen, und wo C eine durch den Anfangszustand sich bestimmende Constante vorstellt. Diese Differentialgleichungen werden vom Verfasser weiter discutirt. Und hierbei gelangt derselbe z. B. zu einem Theorem, welches eine Art Aehnlichkeit mit dem Flächensatz darbietet, und folgendermassen lautet:

Rollt der gegebene Körper unter dem Einfluss der Schwere auf einer festen Horizontalebene, und bezeichnet man die augenblicklichen Coordinaten und Geschwindigkeits-Componenten der einzelnen Körpermolecüle m mit x, y, z und u, v, w, ferner die augenblicklichen Coordinaten des Contactpunktes mit x_1, y_1, z_1, so wird die über alle Körpermolecüle ausgedehnte Summe

$$\Sigma m[(y-y_A)w-(z-z_A)v]$$

constant sein, d. h. ein und denselben Wert haben für alle Augenblicke der betrachteten Bewegung.

Dabei ist das zu Grunde gelegte feste Axensystem x, y, z der Art zu denken, dass seine yz-Ebene identisch ist mit der gegebenen Horizontalebene. (Mithin ist z. B. x_A stets $= 0$.)

N.

E. Lampe. Ueber die Bewegung eines Kreiskegels, der auf einer schiefen Ebene rollt ohne zu gleiten.

Berl. phys. Ges. Verh. 41-44.

Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel ν gegen den Horizont rollt ein schwerer, homogener Kreiskegel vom Grundradius r, der Seitenkante s und der Höhe $h = s\sin\beta$, und zwar so, dass die gleitende Reibung eine gleitende Bewegung verhindert, die rollende Reibung dagegen ebenso wie der Luftwiderstand unmerklich ist. Dann muss der Scheitel des Kegels ruhen, dagegen beschreibt der Schwerpunkt S in einer zur gegebenen parallelen Ebene eine kreisförmige Bahn, deren Mittelpunkt O' senkrecht über dem Scheitel des Kegels liegt. Das Abhängigkeitsverhältnis der Geschwindigkeit, mit welcher der Kegel um seine Berührungslinie mit der schiefen Ebene rotirt, ergiebt sich aus dem Gesetz von der Constanz der Energie; denn in jedem Augenblick ruhen gerade diejenigen Punkte, in welchen die Reibung zur Wirksamkeit gelangt. Hieraus ergiebt sich dann ferner, dass die Linie $O'S$ und damit auch die ihr in jedem Augenblick parallele Berührungslinie sich wie ein mathematisches Pendel bewegen, dessen Länge ist:

$$l = \frac{s}{5}\,\frac{1+5\sin^2\beta}{\sin\nu}.$$

F. K.

D. Kreichgauer. Zur Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Schwingungsversuche. Wiedemann Ann. (2) XXV. 273-308.

Nach einer kurzen Besprechung der bekannten älteren Methoden und Versuche werden die Störungsursachen erörtert. Eine derselben, die von Beling untersucht ist (Zur Theorie der Bifilaraufhängung. Breslau 1881), rührt von den selbständigen Schwingungen der Hülfsgewichte her, und es kann ihr nach der von diesem Autor gegebenen Formel Rechnung getragen werden. Von zwei anderen ist die eine, wie bei Beling, in der Befestigung der Gewichte, die andere in der Aufhängung des Systems begründet. Die erstere wird auf mathematischem Wege berücksichtigt, indem nach den über Schwingungen combinirter Pendel vorliegenden Arbeiten passende Formeln aufgestellt werden; die letztere wird dagegen auf praktischem Wege beseitigt.

Lp.

J. Kreuter. Neues Verfahren zur Bestimmung der Trägheitsmomente ebener Figuren. Z. dtsch. Ing. XXIX 570-571.

Die von Herrn Kreuter im Verein mit Herrn Pressel erfundene Methode beruht im wesentlichen darauf, dass man die Figur, nachdem ihr Schwerpunkt und Flächeninhalt bestimmt sind, um eine zu der betreffenden Schwerpunktsaxe parallele Linie schwingen lässt. Aus der beobachteten Schwingungsdauer lässt sich die gesuchte Grösse in einfacher Weise ableiten.

F. K.

F. Richarz. Ueber Mitschwingen der an Fäden befestigten Cylinder zur Bestimmung von Trägheitsmomenten. Berl. phys. Ges. Verh. 75-78.

Lp.

F. Tisserand. Sur les moments d'inertie principaux de la Terre. C. R. CI. 400-415.

Die Trägheitsmomente für die Hauptträgheitsaxen der Erde,

nach aufsteigender Grösse geordnet seien A, B, C. In der Abhandlung „Sur le mouvement de rotation de la Terre" (Resal J. (3) II. 33-68, 161-164; F. d. M. VII. 1876. 743) behauptet Herr É. Mathieu, die wahre Methode zur Berechnung des Verhältnisses $(B-A):C$ beruhe auf der Theorie der Rotations-Bewegung der Erde, und unter der Annahme, dass die Breite eines Ortes der Erde innerhalb eines Zeitraumes von etwa 153 Tagen nicht um zwei Secunden schwanken kann, erhält er den Wert von $(B-A):C$ kleiner als ein Dreimilliontel. Herr Tisserand findet dagegen aus den von ihm mitgeteilten Rechnungen, die nur wenig von denen seines Vorgängers abweichen, dass das Verhältnis $(B-A):C$ einen merklichen, z. B. mit $(C-A):C$ vergleichbaren Wert haben kann, ohne dass darum die Breite eines Ortes der Erdoberfläche sich in wahrnehmbarer Weise ändere, dass man also auf diesem Wege zu einer oberen Grenze für das gesuchte Verhältnis nicht gelangen könne. Lp.

U. Masoni. Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigido. Nap. Rend. XXIII. 97-105. 1884.

Der Verfasser sucht die gemeinschaftlichen Eigenschaften der Wirkungslinien solcher Stösse auf, welche einem willkürlich herausgegriffenen Punkte $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ eines freien, starren Systems S eine gegebene Geschwindigkeit mit den Componenten $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ erteilen. Zunächst wird die besondere Aufgabe behandelt, dass ein einziger Stoss mit dem Angriffspunkte $P(x, y, z)$ das System trifft. Durch Auflösung der bekannten Gleichungen nach den Componenten X, Y, Z des Stosses und geometrische Deutung der gewonnenen Ausdrücke erhält man folgende allgemeine Sätze. „Bei allen Bewegungen, die ein freies starres System S unter den Bedingungen annehmen kann, dass ein Punkt des Systems sich immer in einer vorgeschriebenen Richtung bewegt und dass die Bewegungsgrössen aller Punkte von S eine einzige Resultante zulassen, gehören die Wirkungslinien dieser Resultante einer

und derselben linearen Congruenz an" (schneiden zwei reelle oder imaginäre Geraden). „Die Wirkungslinien der Stösse, durch welche ein Punkt eines starren Systems sich in einer vorgeschriebenen Ebene bewegt, bilden einen linearen Complex". „Für ein starres System giebt es nur zwei Gerade, längs welchen eine Stosskraft angebracht werden kann, so dass zwei Punkte sich in zwei passend gegebenen Richtungen bewegen."

Wird die Geschwindigkeit von *Q* gleich Null angenommen, so sind die Stosskräfte *R* derartige, dass jede derselben eine Rotation von *S* um eine durch *Q* gehende Axe hervorruft. Nach der Ausdrucksweise von Herrn Beltrami u. a. (Sulla teoria degli assi di rotazione. In memoriam Chelini, 1881) sind die *R* „Stossaxen", denen „permanente Axen" durch *Q* entsprechen. Es folgt sofort der Satz: „Sind ein starres System *S* und ein beliebiger Punkt *Q* desselben gegeben, so entsprechen den permanenten und den Stoss-Axen durch diesen Punkt bezw. Stoss- und permanente Axen, welche die beiden Scharen von Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids bilden" (dessen Gleichung gegeben wird). Wird endlich *Q* in einer der drei Hauptebenen durch den Schwerpunkt angenommen, so erhält man: „Der Ort für die Stossmittelpunkte, denen permanente Axen entsprechen, die durch einen und denselben Punkt gehen, wird von der permanenten Axe dieses Punktes gebildet, wenn er als Stossmittelpunkt angenommen wird. Lp.

U. M[illegible] Sull' urt[illegible] corpi e sul movimento di un co[illegible] tra [illegible] resistenti. Nap. Rend. XXIII [illegible]

[illegible] drücke für die Compo[illegible] r Erinnerung gebracht [illegible] das einen [illegible] erfä[illegible] ult sein [illegible] Folge [illegible] Stosses [illegible] ort [illegible] unkt [illegible]

ferner diejenigen Bedingungen, welche zu den vorigen hinzutreten müssen, damit eine vollständige Reflexion stattfinde. Der zweite Teil der Arbeit betrifft den Fall, in welchem ein schwerer Körper die horizontale Oberfläche einer Flüssigkeit trifft und nach dem Stosse die Bewegung des Schwerpunkts in absteigender Richtung verharrt. Es werden die Bedingungen aufgesucht, unter denen die Bewegung durch die continuirliche Einwirkung der widerstehenden Kräfte der Flüssigkeit eine aufsteigende werden kann. Genauer wird besonders der Fall erörtert, in welchem die Bahncurve des Schwerpunkts beinahe als horizontal angesehen werden kann, ein Fall der von Herrn de Jonquières auch schon einmal näher untersucht ist (C. R. XCVII. 1278, F. d. M. XV. 1883. 832). Lp.

D. Padelletti. Sui sistemi di forze impulsive.

Nap. Rend. XXIII. 140-143. 1884.

Mit Bezug auf die eben besprochene Arbeit des Herrn Masoni macht Herr Padelletti die Bemerkung, dass sowohl die von jenem Geometer entdeckten Eigenschaften, als auch andere ähnliche und viel allgemeinere sich fast intuitiv aus dem Begriffe der „Coordinaten eines Systems von Kräften“ und der „Coordinaten einer infinitesimalen Bewegung“ ableiten lassen. Indem der Verfasser dies näher erläutert und die Begriffe benutzt, welche er nach dem Vorbilde der Ball'schen Theorie der Dynamen eingeführt hat (Osservazioni sulla teoria delle dinami. Nap. Rend. 1882), gelangt er zu folgenden Sätzen: „Die Axen der Dynamen von constantem Parameter (passo) gehören einem Complexe zweiten Grades an“. „Die Axen der Torsionen von constantem Parameter und diejenigen der erzeugenden Dynamen [illegible] constantem Parameter bilden einen linearen Complex.“

Lp.

Exterior ballistics in the plane of fire.

[illegible]strand. 128 S. Ref. Nature XXXIV. 493-494.

Nach der Anzeige dieses Buches in der Rev. d'Art. (XXVI. 191-194) enthält es die Vorlesungen des Verfassers in der Artillerieschule des Fort Monroe (Virginien). Im ersten Teile wird der Luftwiderstand erörtert, im zweiten die Bewegung der Geschosse. Lp.

E. Vallier. Étude sur les lois de la résistance de l'air. Rev. d'Art. XXVI. 226-235, 324-347.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der in Resal J. (3) IX. 147 veröffentlichten (F. d. M. XV. 1883. 829). Indem der Verfasser hier noch einmal auf die Formel eingeht, welche nach seinen früheren Untersuchungen geeignet ist, den Luftwiderstand darzustellen, bleibt er für Geschwindigkeiten zwischen 600 und 350 m bei der Form $S(p'-p'')$ stehen, wo S den senkrechten Querschnitt des Geschosses, p' den vorderen, p'' den hinteren Luftdruck bezeichnet und ausserdem p' und p'' durch

$$p' = p_0 e^{[illegible]}, \quad p'' = p_0 e^{[illegible]}$$

ausgedrückt werden. Für Geschwindigkeiten über 600 m ist p'' gleich Null zu setzen. Unter Annahme dieses Widerstandsgesetzes werden nun die ballistischen Formeln entwickelt. Bei der Integration werden einige Male Factoren, welche die Ausführung der Rechnung in geschlossener Form unmöglich machen, in Gestalt [illegible] Mittelwerte [illegible]halb des Integralzeichens gesetzt, [illegible] Verfasser, Endformeln für die gef[illegible] hyperbolische Functionen [illegible] den Kreis- und Exponential[illegible] der Formeln wird [illegible] recht gut [illegible] und 350 m [illegible]

[illegible]

keiten als 350m erleidet das Widerstandsgesetz in der Nähe der Schallgeschwindigkeit plötzliche Aenderungen. Zur genaueren Erkenntnis dieses Verhaltens schlägt der Verfasser die Vornahme von Versuchen vor, bei denen die Geschwindigkeit innerhalb enger Grenzen geändert wird. Lp.

M. Thiesen. Ueber die Gesetze des Luftwiderstandes nach Versuchen mit dem Schellbach'schen Rotationsapparate. Wiedemann Ann. (2) XXVI. 309-328.

Die Bearbeitung der von Herrn Schellbach und seinen Schülern ausgeführten Versuche mit dem 1871 zuerst beschriebenen Apparate ist von Herrn Thiesen schon 1881 beendigt, aber aus theoretischen Bedenken nicht veröffentlicht worden. In der jetzigen Mitteilung wird der Luftdruck gegen einen cylindrischen Stab von der Dicke d, Länge L, der sich senkrecht zu seiner Axe mit der Geschwindigkeit v bewegt, in absoluten Einheiten (g, cm, sec) durch die Formel dargestellt:

$$H = 37{,}4\eta v L + 0{,}3972\varepsilon v^2 d L + 0{,}00000904\frac{\varepsilon^2}{\eta} v^3 d^2 L,$$

worin ε die Dichte der Luft (0,001200), η ihren Reibungscoefficienten (0,000190) bedeuten. Lp.

F. Siacci. Sur l'établissement des tables du tir vertical. Rev d'Art. XXVI. 431-445.

F. Pouchelon. Tables balistiques. Rev. d'Art XXVI. 467-476.

Der erste Artikel ist ein Auszug aus einer Arbeit, die Herr [illegible] in der Rivista di Artiglieria e Genio veröffentlicht hat; er hat [illegible] Otto'schen „Tafeln für den Bombenwurf" (Berlin, 1842) [illegible] gegeben. Die beigedruckten Tafeln schreiten [illegible] um je 5° fort und geben für wachsenden Luft[illegible]weite, Anfangs- und End-Geschwindigkeit, [illegible] die Flugzeit und den Pfeil der Bahn-

Der zweite Artikel geht auf Formeln zurück, die ebenfalls von Herrn Siacci aufgestellt und in der Rev. d'Art. XVII. 45 (1880) abgedruckt sind. Sie unterscheiden sich von denen des ersten Artikels darin, dass sie nach der Anfangsgeschwindigkeit v von 700m an um je 5m absteigend bis 100m geordnet sind, und dass sie die Werte der Function $T(v)$ geben, die zur Berechnung der Flugzeit dient. Lp.

K. Cranz. Zur Bewegung der Geschosse. Civiling XXXI 103-126

I. Es ist eine bekannte Erscheinung, dass die Aufpflanzung des Seitengewehres eine Linksabweichung des Geschosses bewirkt. Dieselbe ist, wie nach Mitteilung des Herrn Verfassers schon Herr P. du Bois-Reymond bemerkt hat, eine Folge der durch das Bajonett bewirkten Verlegung des Schwerpunktes nach rechts. Eine genauere Bestimmung dieses Einflusses hat grosse Schwierigkeiten. So lässt sich z. B. der Einfluss des schiessenden Soldaten auf das Gewehr wohl gar nicht schätzen; der Herr Verfasser b... tet ihn als einen Zwang, der das Gewehr in einer ... Ebene ... lich erhält. Ferner kennen wir so ... ...lehung der Kraft, welche in der Ri... ... wirkt, d. h. die Differenz D von ... Laufe; hier wird angenommen ... ...anische Aufgabe, ... welche ... reducirt ist, ... at, ohne die ... ...aufe zu... Herr Verfasser ... ...ungen ...

in ...
der ...
die Zeit ...

Gleichung und damit die des abgeleiteten Resultates wird durch den Umstand hinfällig, dass auch das Gewehr beweglich ist.

II. Es wird eine Formel für die Abhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses von dem Drall des gezogenen Gewehrs ermittelt; nach Angabe verschiedener Gesetze für die Entwickelung der Pulverkraft wird bei der Rechnung Constanz der letzteren zu Grunde gelegt. Der Herr Verfasser gelangt zu der Formel:

$$V = \sqrt{\frac{2PR^2\pi L}{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{R^2}\operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tg}\alpha}}},$$

(M Masse, R Radius, Mk^2 Trägheitsmoment des Geschosses, P Pulverkraft für die Flächeneinheit, L Länge des Laufes, α der Drallwinkel, f Reibungsconstante von Blei auf Stahl).

Ein kurzer Anhang handelt vom Rückstoss. F. K.

H. Lehmann. Ueber das Messen von Geschossgeschwindigkeiten. Z. dtsch. Ing. XXIX. 484-488.

Nach einleitenden Bemerkungen über andere Apparate wird die Einrichtung und der Gebrauch des Apparates von Le Boulangé geschildert. F. K.

C. de la Fresnaye. Mémoire sur un procédé de repérage applicable au tir de campagne. Rev. d'Art. XXV. 481-511.

Danion. Propositions relatives à des procédés de repérage en direction dans le tir des bouches à feu de ...ace. Rev. d'Art. XXVI. 69-82.

...on. Note sur un procédé de repérage en direc-... plicable aux pièces de campagne et aux pièces ... Rev. d'Art. XXVI. 138-146.

...athematischen Grundlagen beruhend, haben ...tsächlich nur technisches Interesse.

Lp.

E. Padova. Sul problema delle piccole oscillazioni che un filo flessibile ed inestendibile compie attorno ad una configurazione d'equilibrio. Batt. G. XXIII. 235-243.

Herr Maggi hat in Batt. G. XIX. (F. d. M. XIII. 1881. 706) über dasselbe Thema die Abhandlung veröffentlicht: „Sul moto di un filo flessibile ed inestendibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione d'equilibrio." Durch ein genaues Studium dieser Arbeit hat Herr Padova erkannt, dass die in ihr discutirten Gleichungen auch noch in anderen ähnlichen Problemen auftreten, die damals vom Verfasser nicht angegeben sind. Der Zweck der Note ist es, unter diesem Gesichtspunkte die Abhandlung des Herrn Maggi zu vervollständigen. Zuerst werden auf einem directeren Wege als in der citirten Schrift die Formeln aufgestellt, welche die Bewegungsgleichungen eines beliebigen Punktes P des Fadens darstellen, wenn derselbe bei seiner Schwingung um die Gleichgewichtslage auf drei von Punkt zu Punkt variable Axen bezogen wird, die Tangente, die Hauptnormale und die Normale in der Osculationsebene der Gleichgewichtscurve. Sodann ergiebt eine Discussion der Bedingungen, unter welchen diese Gleichungen gelten, die verschiedenen Möglichkeiten in der Annahme der einwirkenden Kräfte oder der Anfangsla[illegible] Aufzä[illegible] weit führen würde. Lp.

L. H[illegible] [illegible]leitenden Reibung [illegible]

[illegible] Unterlage E. [illegible] äusseren [illegible] Punkte O [illegible] des [illegible]

wo ε eine in den Grenzen $+1$ und -1 liegende Grösse bedeutet. Der Ausdruck $V = \int Zr\,df$ heisst, als Function der Coordinaten ξ, η des Punktes O betrachtet, die Reibungsfunction. Entweder ist nun M constant, und dann darf es höchstens gleich dem Maximum von μV sein, oder es hat die Form $P((a-\xi)\sin\alpha-(b-\eta)\cos\alpha)$, und dann darf P höchstens gleich dem Maximum der Function

$$\frac{\mu V}{(a-\xi)\sin\alpha-(b-\eta)\cos\alpha}$$

von ξ und η sein.

Dieses wird weiter ausgeführt und an speciellen Beispielen erläutert. Den Schluss der Abhandlung bildet eine Untersuchung der Reibung des Kolbens an Cylinderwänden. F. K.

J. Bartl. Zur Theorie der Bremsen der Eisenbahnwagen. Civiling. XXXI 311-356.

Vielfach schon sind Versuche darüber angestellt, bei welcher Art der Räderbewegung ein Eisenbahnwagen am besten gebremst werden kann, d. h. bei welchem Verhältnis der rollenden und gleitenden Bewegung der Räder der Wagen nach Beginn des Bremsens eine möglichst kurze Strecke zurücklegt. In der vorliegenden Abhandlung wird die Frage vom theoretischen Gesichtspunkt aus betrachtet. Es werden nach einander behandelt die Bewegung eines einzelnen Wagens auf horizontaler, gerader Strecke, diejenige auf geneigter Bahn, endlich die Bewegung ...es Zuges auf horizontaler gerader Strecke. Den Schluss bildet ... Untersuchung über den Einfluss der federnden Stützung des ...stens auf die Bremswirkung. F. K.

...ulateur isochrone parabolique. J. de l'Éc.

... der M einen Punkt in der XY Ebene, ...ne, bewege sich so, dass ihre Pro- ...Q) auf die XY-Ebene stets einen

festen Kreis um den Nullpunkt als Centrum in dieser letzteren Ebene und zwar im Punkte M berührt, während die Aenderung von MQ zur Aenderung von PQ ein constantes Verhältnis hat, dann ist der Ort von Q eine Parabel. Dieser Satz wird vom Verfasser zu einem Mechanismus benutzt, der die Mittelpunkte der Kugeln eines Regulators zwingt, sich auf einer Parabel zu bewegen. Dies ist aber die hinreichende Bedingung für die Erzielung der mit dem Namen Isochronismus bezeichneten Eigenschaft der Regulatoren (vgl. Resal, Traité de mécanique générale, T. III, p. 201 ff.). Die Darstellung ist an manchen Stellen nicht klar, verweist auch dieserhalb auf das Modell in der École Pol. Am Schlusse erklärt der Verfasser seinen Regulator für zu zart zum Gebrauch an Maschinen; doch könnte derselbe bei den Apparaten der Sternwarten Verwendung finden. Lp.

B. Hydrodynamik.

Bock. Hydrodynamik nach dem Hamilton'schen Princip. Hamb. Mitt. 105-110.

Die Ableitung der allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen (in der Lagrange'schen Form) aus dem Hamilton'schen Princip wird reproducirt, ohne dass etwas Neues hinzugefügt wird. Die Darst[illegible] nicht [illegible]weg streng. Wn.

E. [illegible] nouveau sur la dynamique d[illegible]

[illegible] hang zwischen Druck [illegible] elastischen Flüssig- [illegible] Beziehung ist [illegible] aus den all- [illegible] Existenz [illegible] teilte

directe Beweis der genannten Formel ist weniger streng, da die Bedingungen der Gültigkeit nicht gehörig präcisirt sind. Die Anwendung der Formel auf die Theorie der Cyklone scheint dem Referenten nicht gerechtfertigt zu sein, da von der Bewegung in vertikaler Richtung völlig abstrahirt wird. Ausserdem wird für diese Anwendung noch die specielle Annahme gemacht, die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen seien logarithmische Spiralen. Wn.

J. M. Hill. The differential equations of cylindrical and annular vortices. Lond. M. S. Proc. XVI. 171-183.

Ist die Bewegung einer Flüssigkeit überall parallel der xy-Ebene und unabhängig von z, sind u und v die Geschwindigkeitscomponenten, ζ die Drehungsgeschwindigkeit des Punktes x, y um die z-Axe, so gelten, wenn

$$u = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

gesetzt, und wenn von äusseren Kräften abstrahirt wird, bekanntlich die Gleichungen:

$$(1) \quad \zeta = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2},$$

$$(2) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0.$$

Um aus diesen Gleichungen A zu eliminiren, integrirt der Verfasser die partielle Gleichung (2). Von dem zugehörigen System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist ein Integral ζ = const.; das andere ergiebt sich leicht, wenn man die Gleichung ζ = const. nach y aufgelöst, also y durch ζ, x und t ausgedrückt denkt. Die Substitution des hieraus sich ergebenden allgemeinen Integrals für A in (1) liefert eine Differentialgleichung, in der nur ζ allein als Unbekannte auftritt. Doch dürfte die so gewonnene Form ...erentialgleichung zur Bestimmung von ζ kaum brauchbar ... den Fall, dass die Linien ζ = const. während der ...re Form nicht ändern, nimmt die eben erwähnte

Differentialgleichung die Form an:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \zeta_t + 2\omega,$$

wo f eine willkürliche Function von ζ und t, ω die Winkelgeschwindigkeit der Linien ζ = const. ist.

Die für geradlinige Wirbelfäden durchgeführte Transformation lässt sich auch auf ringförmige Wirbelfäden übertragen. Das der Gleichung (3) entsprechende Resultat ist hier folgendes: Ist λ = const. die Oberfläche eines Wirbelrings, r der Abstand eines Punktes von der z-Axe, der Axe der einzelnen Ringe, so gilt unter der Voraussetzung, dass die Gestalt der Wirbelringe sich während der Bewegung nicht ändert, die Differentialgleichung

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = r^2 . \lambda_t$$

wobei f eine willkürliche Function von λ und t ist.

Ausserdem enthält die Arbeit eine Transformation der Continuitätsgleichung der Flüssigkeiten. Sind λ = const., μ = const., ν = const. drei Flächen, die stets dieselben Flüssigkeitsteilchen enthalten, so lautet die Continuitätsgleichung

$$\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{A}\lambda_t\right) + \frac{\delta}{\delta\mu}\left(\frac{1}{A}\mu_t\right) + \frac{\delta}{\delta\nu}\left(\frac{1}{A}\nu_t\right) = 0.$$

Darin sind diejenigen Differentialquotienten, für welche x, y, z, t die unabhä[illegible] Variabeln [illegible] durch angehängte Suffixe, diejenigen, [illegible] μ, ν neben t als unabhängige Variable [illegible] δ bezeichnet, endlich ist A die Fu[illegible] μ, ν nach x, y, z.

Wn.

[illegible] within an [illegible]

[illegible] Sätze [illegible]

seiner Mitteilung. Obschon auf der Hand liegend und äusserst interessant, scheinen sie früher noch nicht entdeckt zu sein.

Cly. (Lp.)

W. Voigt. Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Gött. Nachr. 285-305.

Herr Voigt wendet in der vorliegenden Arbeit die Helmholtz-Kirchhoff'sche Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen auf den Zusammenstoss beliebig vieler Strahlen an und vermehrt damit die geringe Zahl der Beispiele, auf die jene Theorie bisher angewandt werden konnte, um eine neue Klasse von Problemen. Zuerst zeigt er, dass, wenn die Strahlen, die sämtlich aus dem Unendlichen kommen und die aus verschiedenen Flüssigkeiten bestehen können, im Unendlichen gleiche lebendige Kräfte der Volumeneinheit besitzen, diese Gleichheit auch für alle Punkte der singulären Stromcurven, d. h. der Curven, in denen die Strahlen sich nach dem Zusammenstoss berühren, stattfinden muss. Daraus ergiebt sich weiter, dass man die Bewegung in den einzelnen Strahlen durch ein gemeinsames (reducirtes) Geschwindigkeitspotential Φ umfassen kann, aus dem sich die Geschwindigkeitspotentiale der einzelnen Strahlen durch Division mit $\sqrt{\varepsilon}$ (ε ist die Dichtigkeit des betreffenden Strahls) ergeben. Da Φ denselben Bedingungen zu genügen hat, als wäre nur eine Flüssigkeit vorhanden, so schliesst sich die weitere Behandlung eng an das Kirchhoff'sche Verfahren (cf. Kirchhoff Mechanik, Vorlesung 22) an. Es ist $\Omega = \Phi + i\Psi$ eine Function von $z = x + iy$; man setze mit Kirchhoff

$$\frac{dz}{d\Omega} = \zeta = \xi + i\eta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

Aufgabe zu lösen, die Ebene Ω auf der Ebene ζ con-
ilden, woraus sich dann z durch blosse Quadratur
Besonderheit des hier behandelten Problems liegt
bei n zusammenstossenden Strahlen das abzu-
Ebene Ω aus n übereinander liegenden und

mit einander längs gewisser, den singulären Stromcurven entsprechender Linien zusammenhängenden Streifen besteht, deren jeder durch zwei Parallele zur Axe Φ begrenzt wird. Ebenso ist die ζ-Ebene, auf der jener n-fache Streifen abzubilden ist, $(n-1)$-blättrig. Die in Rede stehende Abbildung wird dadurch vermittelt, dass der oben genannte n-fache Streifen zunächst auf das Innere eines Kreises vom beliebigen Radius R' einer einblättrigen ζ'-Ebene abgebildet wird; und zwar müssen dabei den Werten $\Phi = \pm\infty$ in den n Blättern $2n$ auf einander folgende Punkte jenes Kreises entsprechen. Der Kreis in der einblättrigen ζ'-Ebene wird dann in einer $(n-1)$ blättrigen ζ''-Ebene auf einem Kreise vom Radius R'' so abgebildet, dass die Punkte des ersteren, welche den Verzweigungspunkten der Ω-Ebene entsprechen, im letzteren über einander, und zwar in den Mittelpunkt fallen. (Die Verzweigungspunkte der Ω-Ebene sind diejenigen Punkte, in denen sich die den singulären Stromcurven entsprechenden Linien verzweigen; ihre Anzahl ist $n-1$; die betreffenden Punkte der Strahlen werden als Stosscentra bezeichnet.) Schliesslich wird durch die Substitution $\zeta'' = \frac{1}{\zeta}$ der Kreis vom Radius R'' in der $(n-1)$-blättrigen ζ''-Ebene auf der Umgebung des Kreises $R = \frac{1}{R''}$ in der gleichfalls $(n-1)$ blättrigen ζ-Ebene so abgebildet, dass das Bild des Centrums ins Unendliche fällt. Dann ist zugleich der n fache Streifen der Ω-Ebene auf der Ebene ζ so [illegible] bildet, dass die Bilder seiner Verzweigungs[illegible] d. h. [illegible] centren, im Unendlichen, die seiner G[illegible] Kreises R liegen. Die Grösse [illegible] dass $R'' = G$, falls G [illegible] im Unendlichen ist.

[illegible] immer noch [illegible] zusammen- [illegible] der [illegible]

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = 0$$

eine $(n-1)$-fache Wurzel $\zeta' = 0$ besitzen; daraus folgen $2n-2$ Relationen zwischen den in der Abbildungsfunction enthaltenen Constanten.

Für $n = 2$ ist die ζ-Ebene einblättrig; die Ebenen ζ' und ζ'' werden jetzt identisch, und als Abbildungsfunction ergiebt sich die folgende:

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\Big\{(a_1+b_1)\log\Big(1-\frac{Re^{[illegible]}}{\zeta}\Big) - (b_1+a_2)\log\Big(1-\frac{Re^{[illegible]}}{\zeta}\Big)$$
$$+ (a_2+b_2)\log\Big(1-\frac{Re^{i\alpha_2}}{\zeta}\Big) - (b_2+a_1)\log\Big(1-\frac{R}{\zeta}\Big)\Big\}.$$

Die hier vorkommenden Constanten haben folgende Bedeutung: Die Grenzen der Stromcurven, die in der Ebene Ω Parallele zur Axe Φ werden, sind $\Psi = + a_1$ und $\Psi = - b_1$ für den einen, $\Psi = + a_2$ und $\Psi = - b_2$ für den zweiten Straal; und es muss

$$a_1 > -b_1, \quad a_2 > -b_2, \quad a_2 > -b_1, \quad a_1 > -b_2$$

sein, damit die Strahlen sich treffen und damit die beiden Streifen der Ebene Ω zusammenhängen. Ferner entsprechen den Werten $\Phi = \pm\infty$ im ersten Streifen der Ω-Ebene die Punkte $\zeta' = R'$, resp. $\zeta = R'e^{i\alpha_1}$; denselben im zweiten Blatt hingegen die Punkte $\varrho' = R'e^{[illegible]}$; resp. $\zeta = R'e^{i\alpha_2}$, wobei $0 > \alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > 2\pi$ ist. Das Coordinatensystem der Ebene Ω ist so gewählt, dass $\Omega = 0$ der Verzweigungspunkt (das Stosscentrum) wird; fiele der Verzweigungspunkt nicht in $\Omega = 0$, so käme zu dem obigen Ausdruck noch eine Constante hinzu.

Zwischen den sieben Constanten $a_1, b_1, a_2, b_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ finden drei Gleichungen statt, die ausdrücken, dass $\Omega = 0$ der Verzweigungspunkt der Ebene Ω ist, und dass das Bild dieses Punktes in den Punkt $\zeta = 0$ fällt; endlich ist $\zeta' = \frac{1}{\zeta}$. Da

$-\int \zeta d\Omega$, so kann man mit Hülfe des obigen Ausdrucks

s als Function von ζ darstellen. Es ist damit, wenn

zt wird, der Zusammenhang zwischen Φ und Ψ

y andererseits dadurch vermittelt, dass jede

dieser vier Grössen durch die Hülfsvariabeln ϱ, ϑ ausgedrückt ist. Weiter werden die oben erwähnten Constanten durch die Richtungen und Breiten der Strahlen ausgedrückt und einige specielle Fälle eingehend discutirt. Die hier gefundenen Resultate lassen sich ohne Zeichnung nicht wiedergeben.

Wn.

Hugoniot. Sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini. C. R. CI. 1118-1120, 1229-1232.

Der Verfasser zeigt, dass man den analytischen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Bewegung in einer Flüssigkeit direct aus den hydrodynamischen Gleichungen ableiten kann, ohne dass man die Form der Integrale dieser Gleichungen zu kennen braucht. Er gelangt zu diesem Resultat durch folgende Argumentation. Zur Zeit t sei in der Flüssigkeit eine Fläche S vorhanden derart, dass auf einer Seite dieser Fläche die Geschwindigkeitscomponenten, Druck und Dichtigkeit $u_1, v_1, w_1, p_1, \varrho_1$ sind, auf der andern Seite dagegen $u_2, v_2, w_2, p_2, \varrho_2$. Die Grössen u_1, v_1, etc. sowohl, als auch $u_2, v_2, \dots$ genügen den Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen, und zwar mögen diese Grössen zwei verschiedene Systeme von Integralen bilden. Eine Fortpflanzung der Bewegung findet nun statt, wenn zur Zeit $t+dt$ die Be[illegible] der gesa[illegible] Flüssigkeitsmasse noch durch dieselben [illegible] In[illegible]gestellt wird, nur dass die Fläche S [illegible] (S') hat. Ist dn das zwischen [illegible] Normale von S, so ist $\frac{dn}{\ldots}$ die [illegible]gen der Continuität [illegible] als an S, die [illegible]

[illegible] $-p$ [illegible]

[illegible] muss [illegible]

$$\lambda:\mu:\nu = \frac{\partial U}{\partial x}:\frac{\partial U}{\partial y}:\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial U}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0;$$

und ganz analoge Gleichungen gelten für V, W, P. Fügt man zu diesen Gleichungen diejenigen hinzu, die sich aus der Anwendung der hydrodynamischen Gleichungen auf Punkte der Fläche S ergeben, so kann man die sämtlichen partiellen Ableitungen der Grössen U, V, W, P eliminiren und erhält dadurch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{dn}{dt}$ den Ausdruck:

$$\frac{dn}{dt} = \lambda u + \mu v + \nu w + \sqrt{\frac{1}{F'(p)}}.$$

Hierin sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten an der Fläche S, und die Function F giebt die Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit an, $\varrho = F(p)$. Die Grösse $\lambda u + \mu v + \nu w$ ist die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit sich längs der Normale von S bewegt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Bezug auf die ruhende Flüssigkeit ist daher

$$\sqrt{\frac{1}{F'(p)}} = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}.$$

Die obige Beweisführung enthält die Annahme, dass die Relation $\varrho = F(p)$ für alle Punkte der Flüssigkeit dieselbe ist. Um sich von der hierin liegenden Beschränkung frei zu machen, fügt der Verfasser in einem zweiten Aufsatz eine andere Ableitung hinzu, die von der Lagrange'schen Form der hydrodynamischen Gleichungen ausgeht, im übrigen aber auf ähnlichen Schlüssen beruht, wie die vorher mitgeteilte. Wn.

...e Saint-Venant. Mouvements des molécules de l'onde ...te solitaire, propagée à la surface de l'eau d'un canal. ...101-1105, 1215-1218, 1445-1447.

...nte Einzelwelle (onde solitaire), die in einem ...renden Wasser durch den plötzlichen Zufluss

eines kleinen Wasserquantums entsteht, zeichnet sich durch ihre regelmässige Gestalt und gleichförmige Fortbewegung aus. Die Theorie dieser Welle ist zwar von Boussinesq in seinem Essai sur la théorie des eaux courantes (1872) entwickelt; aber sie ergiebt sich dort nur als Folgerung aus allgemeineren Betrachtungen über Flüssigkeitsbewegungen. Eine directe Ableitung aus den hydrodynamischen Gleichungen, wie sie die vorliegende Arbeit enthält, ist daher nicht ohne Interesse. Zunächst werden für die in Rede stehende Bewegung die folgenden angenäherten Gleichungen abgeleitet:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + H\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial(U\zeta)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + g\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{H}{3}\frac{\partial^3\zeta}{\partial t^2\partial x} = 0.$$

Hierin bedeutet H die ursprüngliche (constante) Tiefe des Kanals, dessen Boden horizontal ist. $H+\zeta$ ist die Ordinate der Oberfläche beim Durchgang der Welle; die Axe z ist vertical, x parallel der Länge des Kanals. U ist das Mittel der horizontalen Geschwindigkeitscomponenten längs einer Verticallinie; endlich wird die Bewegung als von der Coordinate y unabhängig und als ohne Reibung stattfindend angesehen. Die Ableitung der obigen angenäherten Gleichungen aus den allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen geschieht durch ganz analoge Betrachtungen, wie sie bei einer ähnlichen Untersuchung von Boussinesq angewandt sind (cf. F. d. M. XV. 1883. 850-852). Sollen nun diese Gleichung[illegible] Bewegung [illegible]n, die sich ohne Aenderung der Gest[illegible] constan[illegible]ndigkeit ω fortpflanzt, so müssen [illegible]ein. Man kann daher die part[illegible] nach t durch solche nach x [illegible] sich dann einmal [illegible]

[illegible] schwinden.

[illegible] ver-

nachlässigt, für ζ die Gleichung

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \frac{3}{2H^3}(2h\zeta + \zeta^2).$$

Aus der Integration dieser Gleichung folgt unmittelbar die Gestalt der Welle. Eine eingehende Discussion dieser Gestalt, sowie der Bahnen der einzelnen Wasserteilchen bildet den Schluss der Arbeit. Wn.

Bazin. Expériences sur la propagation des ondes le long d'un cours d'eau torrentueux, et confirmation par ces expériences des formules données par M. Boussinesq, dans la théorie du mouvement graduellement varié des fluides. C. R. C. 1492-1494

Eine von Boussinesq in den Mém. d. Savants étrangers XXIII theoretisch abgeleitete Formel, welche die Geschwindigkeit einer in einer strömenden Flüssigkeit sich fortpflanzenden Einzelwelle (onde solitaire) betrifft, wird experimentell bestätigt.

Wn.

S. Oppenheim. Ueber die Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroids. Wien. Ber. XCII. 528-574

Weder die Annahme einer absoluten Starrheit der Erde, die bisher dem Problem der Präcessionsbewegung stets zu Grunde gelegt ist, noch die in der vorliegenden Arbeit gemachte Voraussetzung, dass die Erde vollkommen flüssig sei, entspricht den thatsächlichen Verhältnissen. Vielmehr sind beide Fälle als Grenzfälle zu betrachten, innerhalb deren der wahre Zustand [illegible] Der zweite Grenzfall nun, der bisher einer Behandlung [illegible] unterzogen ist, und bei dem die Erde als homogene [illegible] sehen wird, führt auf die folgenden beiden Auf- [illegible] mitteln, in wie fern die Gestalt der Erde [illegible] Trägheitsmomente mit der Zeit ver- [illegible] Differentialgleichungen für die ro-

tirende Bewegung eines Körpers von veränderlicher Form aufzustellen und zu integriren.

Bei der ersten der erwähnten Aufgaben wird die Erde als ein sehr wenig von einer Kugel abweichendes Sphäroid angenommen, dessen Gleichung in räumlichen Polarcoordinaten

$$r = a(1 + S)$$

ist. Die kleine Abweichung S von der mittleren Kugel wird nach Kugelfunctionen entwickelt, wobei die Kugelfunctionen der nullten und ersten Ordnung bekanntlich fortfallen, wenn der Anfangspunkt in den Schwerpunkt fällt und das Volumen des Sphäroids gleich dem der mittleren Kugel ist. Von der übrig bleibenden Reihe wird nur das erste Glied (die Kugelfunction zweiter Ordnung) beibehalten. Es sind somit in S fünf unbekannte Coefficienten enthalten, zu deren Bestimmung die Bedingung dient, dass das Sphäroid unter der Wirkung der Anziehung der Teilchen unter einander, der Centrifugalkraft und eines störenden Körpers eine Niveaufläche ist, dass also, unter U, P, V die Kräftefunctionen der genannten drei Kräfte in Bezug auf einen Punkt der Oberfläche des Sphäroids verstanden,

$$U + P + V = \text{const.}$$

ist. Was die Grössen U, P, V betrifft, so enthält P von vorn herein nur Kugelfunctionen nullter und zweiter Ordnung, für U und V werden die von Laplace aufgestellten Entwickelungen benutzt und bei den Kugelfunctionen zweiter Ordnung abgebrochen. D[illegible] Körp[illegible]ssen Kräftefunction V ist, ist der Mond [illegible] nur [illegible] wird, dass er sich in der Ebene d[illegible] bewege. V hängt daher von der Z[illegible] von den fünf Coefficienten der einzi[illegible]function. Sind diese Coefficient[illegible]tigung bestimmt, [illegible] folgen [illegible] Trägheitsproducte [illegible] durch einfache [illegible]

[illegible] her Rech-
[illegible] des Ent-
[illegible]

ist, sondern sich in concentrischen Schichten von gegen die Oberfläche hin abnehmender Dichte lagert. Ferner wird der Einfluss untersucht, den die Trägheit der Molecüle auf die Gestalt der Oberfläche ausübt. Es geschieht dies, indem in die durch Fortlassung des Quadrats der Geschwindigkeiten vereinfachten hydrodynamischen Gleichungen (ohne Reibung) die wirkenden Kräfte eingeführt werden und daraus die radiale Geschwindigkeit berechnet wird, die an der Oberfläche $= a\frac{dS}{dt}$ sein muss. Letztere Beziehung liefert die zu bestimmenden Coefficienten von S. Eine dritte Erweiterung endlich ist rein empirischer Art. Es werden nämlich in den berechneten Ausdrücken der oben erwähnten fünf Coefficienten neun willkürlich zu wählende Constanten hinzugefügt. Durch diese Hinzufügung soll gewissen Anomalien, wie sie z. B. die Ebbe- und Fluthbewegung auf der Erde aufweist, Rechnung getragen werden.

Was die zweite der zu behandelnden Aufgaben betrifft, so sind die Differentialgleichungen für die Rotation eines Körpers von veränderlicher Gestalt bereits von Liouville aufgestellt (Liouville J. (2) III. 1858). Hier werden die Gleichungen von neuem abgeleitet und in folgende einfache Form gebracht. Es seien A, B, C die Trägheitsmomente, D, E, F die Trägheitsproducte, bezogen auf drei durch den Schwerpunkt gehende senkrechte Axen; es seien p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten für diese Axen, es sei endlich

$$\alpha = \iiint \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)dm$$

und analog β und γ für die anderen Axen; dann ist die lebendige Kraft T des Körpers:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq$$
$$+ 2p\alpha + 2q\beta + 2r\gamma + \iiint\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]dm.$$

Die Differentialgleichungen für die Rotation des Körpers werden

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) - r\frac{\partial T}{\partial q} + q\frac{\partial T}{\partial r} = L \text{ etc.,}$$

wobei L, M, N die Drehungsmomente der äusseren Kräfte sind. Nachdem für A, B, C, D, E, F die in der ersten Aufgabe berechneten Werte eingesetzt, auch die Grössen L, M, N für die hier in Frage kommenden Kräfte entwickelt sind, werden die obigen Gleichungen für die Rotation des veränderlichen Sphäroids durch Weglassung von Gliedern höherer Ordnung sowie durch Substituirung von neuen Variabeln vereinfacht und dann näherungsweise integrirt unter der Annahme, dass p und q gegen r sehr klein seien. Diese wenig übersichtliche Rechnung ergiebt folgendes Resultat:

Die Präcessionsconstanten eines flüssigen Sphäroids unterscheiden sich von denjenigen eines starren nur um Grössen, die fast unmerklich sind. Insbesondere ist auch bei jenem die Schiefe der Ekliptik nur periodisch veränderlich; die Rotationsgeschwindigkeit ist nicht mehr, wie bei dem starren Körper constant, sondern einer periodischen Variation unterworfen, deren Periode von dem Umlauf des störenden Körpers abhängt. Das Resultat wird ein anderes, wenn man die bei der ersten Aufgabe gefundenen Formeln dur[illegible]legung empiris[illegible] Constanten erweitert (cf. oben). Dan[illegible]tationsge[illegible] des veränderlichen Sphäroids [illegible] einer saecularen Aenderung un[illegible] der Ekliptik. Diese Aend[illegible] verursacht eine scheinbar[illegible] von 2,[illegible] durch d[illegible] der [illegible] Accelera[illegible] lage der [illegible] nicht über [illegible]

F[illegible]. Rede [illegible] vation des [illegible] [illegible]

Zieht man bei der [illegible] die durch die Erdrotation [illegible]

gesetzte Centrifugalkraft in Rechnung, so ergiebt sich für beide Ufer eines mit der Geschwindigkeit V fliessenden Stromes von der Breite l eine Niveaudifferenz

$$s' = \frac{2l\omega V \sin\lambda}{g},$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, λ die geographische Breite bezeichnet. Diese Niveaudifferenz ist, wie an einem numerischen Beispiel gezeigt wird, nicht verschwindend klein gegenüber der Niveaudifferenz, welche von der Krümmung des Flusslaufes herrührt. (Ueber letztere vergl. Bresse, Mécanique appliquée §§ 16, 17). Man darf daher nach des Verfassers Meinung bei hydrodynamischen Aufgaben im allgemeinen nicht von der Rotation der Erde abstrahiren. Wn.

Sc. Cappa. Sulle forze interne che si svolgono nei liquidi in movimento. Torino Atti XX. 896-916.

Der Verfasser bestimmt den Druck p und die Grösse der Reibung für Punkte einer homogenen Flüssigkeit, die derart um eine verticale Axe rotirt, dass die Rotationsgeschwindigkeit ω sich mit dem Abstand r von der Axe ändert, für constantes r aber constant ist. Durch Untersuchung der auf ein Volumenelement ...nden Kräfte ergiebt sich:

$$dp = \mu\omega^2 . r dr,$$

... Dichtigkeit der Flüssigkeit ist. Zur weiteren Be... ...Problems, insbesondere zur Bestimmung von ω als ...d die weitläufigen Betrachtungen des Verfassers ... Referent kann denselben daher einen erheb... ...essen.

...rd durch Betrachtungen ähnlicher Art ...t eines festen Hohlcylinders statt... ...r den Fall, dass auf die beiden ...e Kräfte wirken, die ein... Wn.

J. Boussinesq. Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables. C. R. C. 935-937.

J. Boussinesq. Résistance qu'éprouve un cylindre circulaire indéfini plongé dans un fluide, à se mouvoir pendulairement suivant une direction perpendiculaire à son axe. C. R. C. 974-977.

Um den Druck zu bestimmen, den eine unbegrenzte Flüssigkeit auf eine in ihr sich bewegende Kugel ausübt, legt der Verfasser ein Axensystem zu Grunde, dessen Anfangspunkt der Kugelmittelpunkt ist, während die x Axe mit der als geradlinig angenommenen Bewegungsrichtung zusammenfällt. Bei einer Näherung, welche die Quadrate der Geschwindigkeiten vernachlässigt (und auf eine solche geht der Verfasser nur aus), werden die hydrodynamischen Gleichungen dieselben, als wären sie auf ein festes, statt auf das obige bewegliche Coordinatensystem bezogen. Zur Lösung dieser Gleichungen, in denen äussere Kräfte nicht vorkommen, wohl aber die die Reibung darstellenden Glieder beibehalten sind, wird gesetzt:

$$u = \Delta_2 \varphi \; [illegible]$$

[illegible]

wobei φ die [illegible] te, Δ_2 das bekannte [illegible] der Gleichung best[illegible]

[illegible]

wo [illegible]

[illegible]

dabei ist r der Abstand eines beliebigen Punktes vom Kugelmittelpunkt, $V = F'(t)$ die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes, R der Kugelradius.

Die Lösung der Gleichung (a) lässt sich, falls φ nur von r und t abhängt, mittels einfacher bestimmter Integrale darstellen, und zwar wird der Wert φ_0, den φ an der Oberfläche der Kugel annimmt,

$$\varphi_0 = -\frac{R^3}{2} V - \frac{3R}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F'\left(t - \frac{\varrho}{\varepsilon} \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$$

Für den Gesamtdruck der Flüssigkeit auf die Kugelfläche ergiebt sich ferner

$$6\pi\varepsilon R\left(V - \frac{3}{2}\frac{\varrho}{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right) - \frac{2}{3}\pi\varrho R^3 \frac{dV}{dt}.$$

Ist $F'(t) = \cos(kt)$, so lässt sich das in φ_0 vorkommende Integral ausführen, und es folgt für den Gesamtdruck, den die Kugel erleidet, der folgende, auf einem andern Wege schon 1851 von Stokes (Cambridge Trans. IX. abgeleitete Ausdruck:

$$6\pi\varepsilon RV\left(1 + R\sqrt{\frac{\varrho k}{2\varepsilon}}\right) + \frac{2}{3}\pi\varrho R^3 \frac{dV}{dt}\left(1 + \frac{9}{2R}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\varrho k}}\right).$$

Die für die Kugel gefundenen Resultate lassen sich leicht auf einen unendlich langen Cylinder vom Radius R übertragen, wenn man nur von der Coordinate z und der Geschwindigkeitscomponente w abstrahirt. Haben V und k für den Cylinder dieselbe Bedeutung wie vorher für die Kugel, so ist der auf den Cylinder ausgeübte Flüssigkeitsdruck, bezogen auf die Masseneinheit der verdrängten Flüssigkeit:

$$4AkV + (1 + 4B)\frac{dV}{dt}.$$

[illegible] A und B hängen von gewissen bestimmten [illegible] auch für den Fall $V = \cos(kt)$ nicht aus- [illegible] mmung kann man aber, wie der Ver- [illegible] Integration eines Systems zweier [illegible] ungen erster Ordnung zurück-

führen; und aus diesem ergeben sich die Näherungswerte

$$A = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-2\nu}}{8}\right), \quad B = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{e^{-2\nu}}{8}\right),$$

wobei

$$e^{-\nu} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varrho k}}$$

ist. **Wn.**

A. V. Bäcklund. **Ueber die Bewegung von Körpern mit variablem Volumen, die von einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit umgeben sind.** Lund Årsskr. XXI. 56 S.

Die Aufgabe, diejenige Flüssigkeitsbewegung zu bestimmen, welche entsteht, wenn mehrere in der Flüssigkeit vorhandene Körper gegebene Volumenänderungen erfahren, ist für den Fall von Kugeln zuerst von Herrn Bjerknes behandelt. In wesentlich andrer Art hat Herr Bäcklund die Aufgabe für beliebige Körper in einer im Jahre 1879 veröffentlichten Arbeit angegriffen (cf. F. d. M. XI. 1879. 670). Er zerlegte nämlich die Bewegung der Flüssigkeit in jedem Zeitmoment in eine Bewegung, die an den momentanen Oberflächen aller Körper senkrecht gegen diese Flächen gerichtet ist, und in eine zweite, die so stattfindet, als wären die Körper starr. Der wesentliche Unterschied dieser Betrachtung gegen die von Bjerknes besteht darin, dass die Aenderungen der Gestalten der Körper nicht mehr als gegeben angesehen werden können, sondern durch die entstehende Flüssigkeitsbewegung [illegible] sind. [illegible] stimmten die Resultate des Herrn [illegible] mit d[illegible] Bjerknes bei gewissen Vernachlässi[illegible]

In [illegible] ickelt Herr Bäcklund zunächst [illegible] die Bewegung beliebiger, [illegible] Aus der An- [illegible] und dass [illegible] die in der [illegible] erer und

äusserer Kräfte stehen, folgt die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials, das eindeutig ist falls jeder der schwimmenden Körper einen einfach zusammenhängenden Raum erfüllt. Die lebendige Kraft der Flüssigkeit ist dann durch ein Integral dargestellt, das, falls man das Geschwindigkeitspotential als Potential elektrischer Belegungen deutet, nach dem Dirichlet'schen Princip ein Minimum sein muss. Daraus folgt, dass die auf die Körper wirkenden Kräfte, gemessen durch ihre Arbeit, den Partikeln der Körper die grösstmögliche Bewegung erteilen, falls sie so wirken, dass die Flüssigkeit senkrecht zu den Oberflächen der Körper strömt. Dies Resultat giebt Anlass zu der oben erwähnten Zerlegung der Bewegung. Bei der ersten Art der Bewegung, bei der die Flüssigkeit stets senkrecht zu den momentanen Oberflächen der Körper sich bewegt, ist das Geschwindigkeitspotential φ an den Oberflächen der einzelnen Körper constant. $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ist an jenen Flächen gleich der Bewegung der Oberfläche in normaler Richtung. Aus den Werten von φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an jenen Oberflächen aber ergiebt sich nach dem Green'schen Satze unmittelbar der Wert von φ für jeden Punkt der Flüssigkeit. Weiter werden in bekannter Art die Gleichungen für die Bewegung der in der Flüssigkeit schwimmenden Körper abgeleitet. Es sind dieselben, als wären die Körper im leeren Raum und als wirkten neben den vorhandenen Kräften auf sie anziehende Kräfte, gleich und entgegengesetzt den Abstossungen, welche gewisse elektrische Belegungen der Körperoberflächen hervorbringen würden.

Die durch die genannten Gleichungen bestimmte Bewegung der Körper aber bringt ihrerseits, falls zwischen den Körpern nur innere Kräfte wirken, eine von der supponirten verschiedene Bewegung der Flüssigkeit hervor. Man kann sich daher, falls nicht äussere Kräfte von besonderer Art hinzugefügt werden, ...nt die Betrachtung der obigen Flüssigkeitsbewegung, ...chwindigkeitspotential φ war, beschränken, sondern ...ie zweite Art der Bewegung, die so stattfindet, als

wären die einzelnen Körper in jedem Moment starr, hinzufügen. Hinsichtlich der Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials $\Phi = \varphi + \varphi_1$ der resultirenden Flüssigkeitsbewegung verweist Herr Bäcklund auf seine frühere Arbeit. Diese Bestimmung beruht auf Folgendem. Man weiss, dass an der Oberfläche der einzelnen Körper in jedem Moment $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ gleich der normalen Geschwindigkeitscomponente des betreffenden Oberflächenpunktes ist. Nimmt man nun zunächst Φ als constant an den einzelnen Oberflächen an, so erhält man mittels des Green'schen Satzes einen Näherungswert für Φ; setzt man dann diesen Näherungswert in den Green'schen Satz ein, so ergiebt sich ein zweiter Näherungswert etc., so dass schliesslich Φ durch eine unendliche Reihe dargestellt ist. Die Bewegungsgleichungen der einzelnen Körper ergeben sich aus dem Obigen sofort, wenn man Φ an Stelle von φ setzt.

Im zweiten Teil seiner Arbeit wendet der Verfasser die im ersten Teil abgeleiteten allgemeinen Gleichungen auf den Fall an, dass in der Flüssigkeit nur zwei Körper vorhanden sind, die während der ganzen Bewegung nahezu kugelförmig bleiben. Die Oberfläche jedes der Körper ist durch eine Gleichung von der Form

$$r = a(1 + R)$$

dargestellt, wo r der Abstand eines Punktes der Oberfläche vom Mittelpunkt ist, a eine Constante, R eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe, die mit der Kugelfunction zweiter Ordnung beginnt. Das Geschwindigkeitspotential φ der Flüssigkeit, das nur von normaler Bewegung der Oberflächen herrührt, wird in eine nach fallenden Potenzen des Abstandes Δ der beiden Kugelmittelpunkte fortschre[illegible] [illegible]e entwickelt, und zwar bis zu den [illegible] von [illegible] $\frac{1}{r}$ einschliesslich. Die scheinbar[illegible] [illegible]unkte auf einander ausüben, [illegible] [illegible]ler Ordnung $\frac{1}{\Delta^{2}}$ genau. [illegible] [illegible] geführt, als bei

Bjerknes. Die Betrachtung der Formänderung der Körper ergiebt, dass in der obigen Reihe R der Coefficient der Kugelfunction i^{ter} Ordnung proportional mit $\frac{1}{\Delta^{i+1}}$ ist. Nachdem weiter auch für das Geschwindigkeitspotential φ_1, das zu φ hinzuzufügen ist, eine nach fallenden Potenzen von Δ fortschreitende Reihe aufgestellt ist, wird die durch die Flüssigkeitsbewegung hervorgebrachte Bewegung der Körper eingehend discutirt. Dabei wird zunächst die Annahme gemacht, dass die Körper, abgesehen von den unendlich kleinen Oscillationen der Oberflächen keine Anfangsgeschwindigkeit besitzen. Besitzen die Körper von Anfang an eine Rotationsbewegung, so muss man, damit die Grundgleichungen anwendbar bleiben, die weitere Annahme hinzufügen, dass die ursprüngliche Gestalt rein kugelförmig ist. Die einzelnen so gewonnenen Resultate lassen sich nicht in Kürze wiedergeben.

Zum Schluss wird die Bewegung mehrerer sehr kleiner Körper in einer Flüssigkeit behandelt. Indem von der Abweichung von der Kugelgestalt abstrahirt wird und nur die Glieder niedrigster Ordnung in den Entwickelungen beibehalten werden, ergiebt sich, dass die zwischen den kleinen Körpern wirkenden scheinbaren Kräfte annähernd das Newton'sche Gesetz befolgen.

Wn.

E. Gerlach. Einige Bemerkungen über den Widerstand, den eine ebene Platte und ein Keil einer gleichmässig strömenden Flüssigkeit entgegensetzen. Civing. XXXI. 77-104.

Diese Arbeit ist schon im vorhergehenden Bande des Jahrbuchs besprochen (F. d. M. XVI. 1884. 860). F. K.

C. Razzaboni. Del moto lineare dei liquidi tenendo [conto] della loro viscosità con applicazione ad alcuni [casi di] efflusso. Bologna Mem. (4) IV. 689-706. 1884.

C. Razzaboni. Del moto oscillatorio dell' acqua in due vasi prismatici communicante per mezzo di un terzo tenendo conto della viscosità del liquido. Bologna Mem (4) V. 387-400.

Der Verfasser behandelt den Ausfluss von tropfbaren Flüssigkeiten aus Gefässen unter Voraussetzung des Parallelismus der Schichten. Seine Darstellung unterscheidet sich von der üblichen, wie sie sich z. B. in den Lehrbüchern von Poisson und Duhamel findet, nur dadurch, dass neben der Schwere eine dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft als wirkend angenommen wird. Durch diese Hinzufügung der Reibung ändern die zu behandelnden Gleichungen, falls das Niveau constant bleibt, ihre Form gar nicht; es erhalten nur die Coefficienten derselben eine andere Bedeutung. Weiter wird auch der Ausfluss bei variablem Niveau betrachtet, endlich die Bewegung des Wassers in zwei communicirenden Gefässen. Die für alle diese Fälle abgeleiteten Formeln bieten wesentlich nur ein praktisches Interesse dar. Von ihrer Mitteilung kann hier um so eher Abstand genommen werden, da sich gegen die grundlegende Annahme, wonach die Reibung dem Quadrat der absoluten Geschwindigkeit proportional gesetzt wird, sowie namentlich gegen die Verträglichkeit [illegible] Annahme mit [illegible] des Parallelismus der Schichten erhebli[illegible] [illegible] gelt[illegible] [illegible] lassen.

Wn.

Hä[illegible] [illegible] h Parti[illegible] des pa[illegible]

[illegible] legt [illegible] [illegible]

die [illegible] [illegible]

wird [illegible]

unter [illegible]

auf die [illegible]

wobei Q die [illegible]

Platte fallenden Menge ist und α der Neigungswinkel, den in dem betrachteten Moment die Tangente der Bahn des Schwerpunkts mit der Horizontalebene bildet. Durch Integration des obigen Ausdrucks folgt die Menge q, welche auf die Platte trifft, wenn ihr Schwerpunkt unter dem Einfluss der Schwere eine gegebene Curve durchläuft. Die behandelte Frage wird weiter dahin ausgedehnt, dass der Schwerpunkt sich unter dem Einfluss einer beliebigen Centralkraft statt unter dem der Schwere bewegt, und dass zugleich Q von der Entfernung vom Kraftcentrum abhängt. Endlich wird statt eines Kraftcentrums eine Reihe solcher angenommen. In allen Fällen ergiebt sich die auf die Platte fallende Menge als allein abhängig von den Niveauflächen, die durch die Anfangs- und Endlage des Schwerpunktes gehen.

Wn.

N. Joukoffsky. Von der Bewegung fester Körper mit Höhlungen, die mit homogener Flüssigkeit gefüllt sind. Russ. Phys. chem. Ges. XVII. 231-280.

Ch. Chree. On the form in polarcoordinates of certain expressions occurring in elastic solids and in hydrodynamics. Edinb. M. S. Proc. III. 109-114.

Gbs.

A. de Caligny. Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrau- ...es à colonnes liquides oscillantes. Paris et Liège XI u. 963 S. 8°. 1883.

... dem Gebiete der Hydraulik seit fünfzig Jahren ... immer schaffensfreudige Verfasser hat die Er- ... ngen zu einem grösseren Werke vereinigt, ... zegeben, aber fortlaufend paginirt ist. ... ächlich technische Zwecke verfolgt

haben, so darf doch das umfangreiche Buch hier nicht unerwähnt bleiben; denn die theoretischen Schwierigkeiten, welche bei vielen hier auftretenden Fragen vorhanden sind, widerstreben einer rein mathematischen Behandlung, und daher sehen wir denn auch, dass Männer wie Poncelet und Coriolis dem damals noch jungen Forscher ihre freundliche Teilnahme geschenkt haben.

Der erste Teil (Oscillations dans les tuyaux, ondes liquides, phénomènes de succion, fontaines intermittentes, etc.) liefert im wesentlichen einen Abdruck früherer Abhandlungen des Verfassers über Fragen nach der Bewegung fliessenden Wassers und seiner Wellen, über die dabei auftretenden Erscheinungen der Reibung in Röhren, des Ansaugens von Strömungen und der Rückströmung, über Oscillationen und Seitendruck, über die Einwirkung solcher Flüssigkeitsbewegungen auf das Bett in Kanälen und Flussläufen, über die Widderstösse des wogenden Meeres u. s. w. Die ersten unter diesen Schriften datiren aus der zweiten Hälfte der dreissiger Jahre unseres Jahrhunderts und sind vorzugsweise in Liouville's Journal erschienen; manche unter ihnen haben andere Gelehrte zu besonderen Untersuchungen veranlasst; z. B. hat die Arbeit über die Theorie des Seitendruckes in oscillirenden Flüssigkeiten (in Liouville J. VIII. 1843) eine mathematische Untersuchung von Combes über denselben Gegenstand hervorgerufen. Später hat Herr de Caligny meistens die Comptes Rendus der Pariser Akademie gewählt, um seine Erfindungen und Ideen bekannt zu machen. Dort sind besonders in den siebziger Jahren viele seiner Artikel abgedruckt, und auch nach der Ausgabe des vorliegenden Werkes fährt er in seinen Mitteilungen über seine Arbeiten und Pläne an dieser Centralstelle für die Veröffentlichungen französischer Gelehrter fort. Es sind indes in den ersten Teil auch manche Sachen aufgenommen worden, die bisher ungedruckt waren, so ein Abschnitt aus einer Abhandlung über Schwingungen von Wasser in Röhren, die 1837 der Akademie vorgelegt war. Von anderen Aufsätzen, welche in der Société Philomathique vorgetragen wurden, waren bisher nur kurze Auszüge vorhanden. Endlich sind auch einige Resultate, die in den ersten Teil gehören, aber erst nach dem schon

1880 beendigten Drucke desselben gewonnen sind, in den zweiten Teil eingefügt worden.

Dieser zweite Teil (écluses de navigation, moteurs hydrauliques, machines élévatoires, machines d'épuisement, machines soufflantes et à comprimer l'air, pompes, etc.) ist den hydraulischen Anwendungen gewidmet; daher sind nach den in der Praxis gemachten Erfahrungen die hier zur Reproduction kommenden älteren Abhandlungen einer eingreifenden Ueberarbeitung unterzogen, oft völlig neu redigirt worden. Einen grossen Raum beansprucht die Beschreibung der nach den Plänen des Verfassers ausgeführten Schleuse von l'Aubois, bei der durch das zur Anwendung gebrachte Princip der grössere Teil des durchgelassenen Wassers wieder gewonnen wird. Es liegt keine Veranlassung vor, an diesem Orte auf die technischen Einzelheiten der in diesem Teile beschriebenen Apparate und Einrichtungen einzugehen, besonders da über die einzelnen Gegenstände zu ihrer Zeit in den Fortschritten der Physik regelmässig berichtet ist. Die vom Verfasser jetzt vorgenommenen Abänderungen betreffen mehr einzelne praktische Verbesserungen, als dass sie den Grundgedanken berührten. Lp.

H. Leauté. Mémoire sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations. J. de l'Éc. Pol. cah. LV. 1-126.

Den Gegenstand dieser Untersuchung bilden die Schwankungen der Geschwindigkeit, welche durch plötzliche Aenderungen des Arbeitswiderstandes in dem Gange von Maschinen und zwar speciell von hydraulischen Maschinen hervorgerufen werden. Die für die vorliegende Untersuchung wesentliche Eigenschaft dieser Maschinen ist die, dass der Regulator nicht direct auf die Grösse der Zuflussöffnung wirkt, sondern durch einen Zwischenapparat den Zufluss des Wassers regulirt, welcher von der Maschine selbst getrieben und von dem Regulator nur zu geeigneter Zeit

in Thätigkeit versetzt wird. Bekanntlich ist bei den Regulatoren directer Wirksamkeit die Grösse des Zuflusses durch die Stellung der Zwinge bedingt, und je nachdem sich dieselbe aufwärts oder abwärts bewegt, tritt eine Verkleinerung oder Vergrösserung dieses Zuflusses ein. Anders bei den Regulatoren indirecter Wirksamkeit; hier entscheidet nicht mehr der Sinn, in welchem sich die Zwinge bewegt, darüber ob eine Verminderung oder Vergrösserung des Zuflusses stattfindet; sondern ersteres tritt nur ein, wenn die Zwinge sich oberhalb einer gewissen Stelle, letzteres, wenn die Zwinge sich unterhalb einer zweiten Stelle befindet. Sind nun V und v die theoretischen Gleichgewichtsgeschwindigkeiten des Regulators für die beiden Stellen, so erkennt man, dass in Folge der Reibung eine Verkleinerung der Zuflussöffnung erst dann beginnen kann, wenn die Geschwindigkeit einen Wert $V_1 (> V)$ überschritten hat, und dass dieselbe, wenn sie einmal stattfindet, erst aufhören kann, nachdem die Geschwindigkeit unter eine gewisse Grenze $V_2 (< V)$ gesunken ist. Umgekehrt kann das Oeffnen erst beginnen, nachdem die Geschwindigkeit den Wert $v_2 (< v)$ erreicht hat, und wieder aufhören, nachdem sie grösser als $v_1 (> v)$ geworden ist.

Der Verfasser stellt nun die Zustände der Maschine durch die Punkte einer Ebene dar, indem er als Abscissen die Grösse des Zuflusses, als Ordinaten die Rotationsgeschwindigkeiten des Regulators benutzt. Die Maschine möge für einen gewissen Arbeitswiderstand einen Zustand gleichmässiger Bewegung erreicht haben, welchem der Punkt A entspricht. Es ist klar, dass bei einem gleichen Arbeitswiderstand die Geschwindigkeit um so grösser ist, je grösser die Zuflussöffnung ist; alle für einen solchen Widerstand möglichen Zustände gleichmässiger Bewegung werden also einer Curve CD entsprechen, deren Ordinaten mit den Abscissen wachsen, und zwar um so stärker wachsen, je geringer der Arbeitswiderstand ist. Wird nun der Arbeitswiderstand so vermindert, dass den bei dem verkleinerten Arbeitswiderstande möglichen Zuständen gleichmässiger Bewegung eine Curve $C'D'$ entspricht, welche nach dem Gesagten oberhalb A liegen muss, so wird die Maschine das Bestreben zeigen, in

einen Zustand überzugehen, welcher durch einen Punkt der Curve $C'D'$ dargestellt wird.

Zunächst wird die Geschwindigkeit wachsen, ohne dass eine Aenderung der Oeffnung eintritt; der Punkt, welcher den Zustand der Maschine darstellt, beschreibt also zunächst eine Parallele zur Ordinatenaxe. Sobald aber die Geschwindigkeit den Wert V_1 erreicht hat (Punkt 1), wird eine Verringerung der Oeffnung stattfinden, und gleichzeitig wird die Geschwindigkeit fortfahren zuzunehmen, da der wirklich stattfindende Widerstand für eine gleichmässige Bewegung noch immer zu klein ist. Das dauert so lange, bis wir im Punkte 2 die Curve $C'D'$ erreichen. Von da ab nimmt die Oeffnung weiter ab, und weil in Folge dessen der Widerstand für eine gleichmässige Bewegung zu gross wird, nimmt nun auch die Geschwindigkeit ab. Im Punkte 3 möge dieselbe gleich V_1 werden; dort hört das Schliessen der Oeffnung auf. Die Maschine bewegt sich von da ab also bei constanter Oeffnung mit abnehmender Geschwindigkeit, bis sie im Punkte 4 gleich v_1 wird. Nun beginnt die Oeffnung sich zu vergrössern, und die Geschwindigkeit nimmt weiter ab, bis im Punkte 5 wieder die Curve $C'D'$ passirt wird; von da ab wächst die Geschwindigkeit bei wachsender Oeffnung, bis im Punkte 6 die Geschwindigkeit v_1 erreicht ist. Von da ab steigt die Geschwindigkeit bei constanter Oeffnung, bis sie im Punkte 7 wieder den Wert V_1 annimmt. Von nun an wiederholen sich dieselben Phasen der Bewegung, wie wir sie im ersten Cyklus beschrieben haben, und das dauert so lange, bis einer der verticalen Teile die Linie $C'D'$ schneidet. Aber dieser für die Praxis wünschenswerte Fall tritt nicht immer ein; es kann kommen, dass die Cyklen, anstatt sich asymptotisch einem Punkte der Curve $C'D'$ zu nähern, nur einem gewissen Grenzcyklus zustreben, der unter Umständen grösser als der erste Cyklus sein kann und dessen Endpunkt mit seinem Anfangspunkt zusammenfällt; man kann ihn wegen dieser Eigenschaft einen geschlossenen Cyklus nennen (cycle fermé).

Davon ausgehend, dass bei einer Maschine die Lage und Geschwindigkeit aller Teile bestimmt sind, sobald man diese

Grössen für einen Teil kennt, und dass das in einem Zeitelement disponible Arbeitsvermögen gleich dem Zuwachs der lebendigen Kraft plus der geleisteten Arbeit sein müsse, entwickelt der Herr Verfasser eine verhältnismässig einfache Differentialgleichung erster Ordnung für den Gang der Maschine, in welcher die Rotationsgeschwindigkeit des Regulators die abhängige, der Winkel, um welchen sich derselbe dreht, die unabhängige Veränderliche ist. Indem er dieselbe für die vier beschriebenen Phasen der Bewegung specialisirt, gelangt er dazu, die Gestalt der noch fehlenden Teile eines Cyklus, die Dauer ihrer Wirksamkeit und ihren Effect, d. h. die durch sie bewirkte Annäherung an die Curve $C'D'$, zu bestimmen. Aus diesen Entwicklungen folgen die Bedingungen, welche zu erfüllen sind, damit geschlossene Cyklen nicht auftreten, und andere Regeln für die Beurteilung des Ganges der in Frage stehenden Maschinen bei plötzlich auftretenden Aenderungen des Arbeitswiderstandes.

Bezüglich dieser technischen Ergebnisse sowie der Einzelheiten der mathematischen Grundlage verweisen wir auf die interessante Arbeit. F. K.

F. Grashof. Theorie der Kraftmaschinen. Leipzig. L. Voss. 1 Lieferung S. 1-160.

Das in 5 Lieferungen erscheinende Werk, von denen die erste vorliegt, bildet den dritten Band der „Theoretischen Maschinenlehre" des Verfassers. Es behandelt die Kraftmaschinen in ihrem ganzen Umfange.

Die Einleitung bilden Betrachtungen allgemeinster Natur über die Formen des vorhandenen Arbeitsvermögens und deren Verwandlung sowie über die Kraftmaschinen, welche den Formen des zu technischen Zwecken benutzbaren Arbeitsvermögens entsprechen; angesichts der unersetzlichen Abnahme des Vorrats an fossilen Brennstoffen dürfte die Zukunft zu einer ausgedehnteren Benutzung der Energie des Wassers hindrängen.

Den Abschnitt über „belebte Motoren" leiten einige allgemeine Bemerkungen ein. Bedeuten K, c, t die vorteilhaftesten

Werte von Kraft, Geschwindigkeit und täglicher Arbeitszeit von Menschen oder Tieren, so gelten für andere Werte P, v, z empirische Formeln von Gerstner und Maschek, aus denen für $z = t$ (8^h) übereinstimmend folgt: $P = K\left(2 - \frac{v}{c}\right)$. Mit Hülfe dieser Beziehung wird der grösstmögliche Wirkungsgrad beim Arbeiten an einer Maschine, d. h. das Verhältnis des grössten Nutzeffects zum grösstmöglichen Totaleffect, ermittelt, und es werden noch einige besondere Beispiele behandelt. Es folgt eine ausführliche Darstellung der Arbeitsleistungen des Menschen, sowohl derer beim Tragen von Lasten wie derjenigen an Maschinen beim Angriff mit den Händen und den Füssen. Dabei ergiebt sich, dass die Muskelkraft des Menschen besonders vorteilhaft verwendet wird durch Ziehen am Seil beim Fortschreiten auf horizontaler oder wenig geneigter Bahn und vermittelst der Kurbel an einer horizontalen Welle; mit den Füssen arbeitet der Mensch vorteilhaft durch Vermittelung des Körpergewichts wie beim Tretrade. Die zur Arbeitsleistung benutzten Tiere arbeiten am vorteilhaftesten, wenn sie geradlinig fortschreitend einen Zug ausüben. Geringer ist ihre Leistung am Göpel und an Tretwerken, deren Wirkungsgrad noch als 0,8-0,85 bezw. annähernd 0,9 ermittelt wird.

In sehr eingehender Weise werden nun die Wassermotoren behandelt. Nach einigen einleitenden Bemerkungen und einer Uebersicht über die verschiedenen Arten der in Betracht kommenden Motoren werden die theoretischen Grundlagen und Regeln für die Fassung des Aufschlagwassers hydraulischer Kraftmaschinen-Anlagen gegeben, und diese theoretischen Erörterungen finden an einem Beispiele eine interessante Erläuterung. Dann werden die Wasserräder (im engeren Sinne) untersucht; die Theorie derselben hat das Ziel: „den Wirkungsgrad eines gegebenen oder zu entwerfenden Rades als Functionen seiner Elemente mit angemessener Näherung auszudrücken, um danach auch diejenigen Werte bezw. Verhältnisse der besprochenen und anderer Radelemente zu finden, welche einen möglichst grossen Wirkungsgrad unter sonst gegebenen Umständen zu Folge haben."

Demgemäss werden die sämtlichen Effectverluste eines Wasserrades bestimmt, und daraus ergiebt sich dann der Wirkungsgrad $\eta = \frac{E}{\gamma Q H}$, wo γQ das Gewicht des Aufschlagwassers in kg., H das Gefälle in Metern bedeutet, und E, der Nutzeffect, sich aus diesen Grössen und dem Wasserverluste pro 1'' Q_1, dem Gefällverlust H_1 und dem Effectverlust durch nebensächliche Widerstände E_1 also ausdrücken lässt:

$$E = \gamma(Q-Q_1)(H-H_1)-E_1.$$

Auf die erhaltenen Ergebnisse gründen sich Regeln für die Wahl einiger der wesentlichsten Radelemente, wenn H Q und die Art des Rades gegeben sind. Da aber statt Q häufig ein verlangter Nutzeffect E gegeben ist, so muss Q aus der Gleichung

$$E = \eta.\gamma Q H \qquad (\gamma = 1000\text{kg.})$$

erst bestimmt werden, und dazu ist die Kenntnis von η nötig. Es muss also vorläufig η für die verschiedenen Räder näherungsweise als Function einiger Elemente derselben, besonders von H und der Peripheriegeschwindigkeit v ausgedrückt werden, worauf, wenn Q bekannt ist, η genauer berechnet werden kann; eine erhebliche Abweichung der Werte würde alsdann eine Modification des Entwurfs erfordern. In dem angedeuteten Sinne werden nach einander das oberschlächtige, das freihängende rückenschlächtige Rad, das mittelschlächtige Kropfrad und die gewöhnlichen tiefschlächtigen Räder behandelt. Die Untersuchung des Sagebien-Rades gelangt in der ersten Lieferung noch nicht zum Abschluss.

Sbt.

G. Zahikjanz. Kinetische Analyse der Actionsturbinen mit freiem Strahl. Civiling (2) XXXI. 423-470.

Unter den im Titel genannten Turbinen versteht man bekanntlich solche, bei denen in der Spalte zwischen Leitrad und Laufrad kein Ueberdruck stattfindet, und bei denen das Wasser sich im Laufrade mit einer freien Seitenfläche bewegt. Es wird zunächst die Arbeit bestimmt, welche das Wasser leistet, indem

es durch eine derartige Turbine fliesst. Der zweite Abschnitt giebt eine Lösung der von Herrn Grashof gestellten Preisaufgabe: Die Krümmungsverhältnisse der Schaufeln von Druckturbinen sollen gemäss der Forderung untersucht werden, dass das entlang fliessende Wasser überall den gleichen Druck ausübt.

F. K.

G. Morosini. Teoria meccanica delle scrematrici.
Lomb. Ist. Rend. (2), XVIII 584-598.

Die Arbeit entwickelt, von den Bewegungsgesetzen fester und flüssiger Körper ausgehend, die Theorie derjenigen Centrifugen, welche in neuerer Zeit zur beschleunigten Trennung des Rahms von der Milch in Anwendung gekommen sind, und stellt auf Grund dieser theoretischen Erörterungen und unter Berücksichtigung der an vorhandenen Maschinen ausgeführten Experimente eine Reihe allgemeiner Sätze für die Construction solcher Maschinen auf. Im ersten Teile werden die Bedingungen erörtert, welche die Trennung des Rahms von der Milch begünstigen. Der zweite Teil handelt von der Kraft, die bei der Bewegung der Centrifugen nötig ist; der dritte von dem Drucke gegen die Gefässwandung. Die Maschine von Laval und die von Burmeister und Wain werden näher besprochen.

Lp.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

E. Betti. Lehrbuch der Potentialtheorie und ihrer Anwendungen auf Elektrostatik und Magnetismus.
Deutsche Ausgabe von W. F. Meyer. Stuttgart. Kohlhammer. XV u. 434 S.

Das bisher in Deutschland wenig bekannte Betti'sche Lehr-

buch zeichnet sich einerseits durch systematische Anordnung des Stoffes und Strenge der Beweise aus, andrerseits durch die Reichhaltigkeit der Anwendungen, endlich durch die Benutzung besonderer, zum Teil neuer Methoden. Das Buch ist daher nicht nur als Lehrbuch zur Einführung in die Theorie, sondern auch für Vorgeschrittenere empfehlenswert. Aus dem Inhalt des ersten Capitels, welches die eigentliche Potentialtheorie enthält, erwähnen wir als eigentümlich die ausführliche Behandlung des Green'schen Satzes, ferner die Ableitung der charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunction von Doppelschichten, die Bestimmung des Potentials eines Ellipsoids durch Zerlegung in Niveauschichten, die Ableitung der Potentialfunction für ebene homogene Flächen, für Polyeder und für homogene gerade Cylinder etc. Das Dirichlet'sche Princip ist, da die Grenzen seiner Gültigkeit noch nicht festgestellt sind, nicht benutzt.

Unter den Anwendungen auf Elektrostatik (zweites Capitel) seien die folgenden Probleme hervorgehoben: Verteilung der Elektricität auf zwei getrennten oder sich berührenden leitenden Kugeln, auf einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Conductor, auf einer leitenden Kugelkalotte, auf einem Ellipsoid und einer elliptischen Scheibe, auf unbegrenzten Cylindern. Das Capitel schliesst mit der Entwickelung der Theorie der Condensatoren.

Im dritten Capitel (Theorie des Magnetismus) wird u. a. der Nachweis geführt, dass die Zahl der auf der Oberfläche eines magnetischen Körpers vorhandenen Pole stets eine gerade sein muss, falls die Fläche einfach zusammenhängend ist. Die von Thomson aufgestellten Kriterien für solenoidale und lamellare Verteilung der magnetischen Axen und Momente werden hier auf anderm Wege gefunden, und hinsichtlich einer beliebigen solchen Ver[illegible] werden zwei neue Sätze aufgestellt. Mit [illegible] ilnf[illegible] zweckmässige Wahl der Fläche, welche [illegible] d[illegible] eines Magneten von der übrigen Masse [illegible] Widersprüche, die Maxwell in der [illegible] funden hat, zu beseitigen. [illegible] uns benutzte Methode

auch auf die Theorie der Dielektrica angewandt und davon, dem Vorgang von Clausius gemäss, in der Theorie des Condensators Gebrauch gemacht.

Erwähnt werden mag noch, dass die Theorie der Kugelfunctionen nirgends benutzt wird, dass ferner der Uebersetzung des italienischen Textes mehrere Zusätze des Herausgebers der deutschen Ausgabe hinzugefügt sind, die eine Erweiterung des Dirichlet'schen Verfahrens zur Transformation des Ausdrucks $\varDelta V$, den Hölder'schen Beweis des Satzes $\varDelta V = -4\pi k$, sowie einige Sätze der Functionentheorie betreffen.

Wn.

A. Seydler. Potentialtheorie. Prag (Böhmisch.)

Unter diesem Titel erschien des Verfassers II. Band der „theoretischen Physik“, der eine mit vieler Mühe und Sorgfalt, wie der Autor in der Vorrede bemerkt, sowie mit grossem Fleisse und Geschick, nach eigenem Plane, wie Referent versichert, meistens nach englischen Quellen zu Stande gebrachte Compilation repräsentirt, welche namentlich Lehrern der Physik sowie allen jenen, welche mit dem Stoffe schon einigermassen bekannt sind, recht gute Dienste zu leisten berufen ist. Obwohl sich die Knappheit der Darstellung auf der Grenze des Erlaubten bewegt, so vermisst man doch nirgends die wünschenswerte Klarheit und Bestimmtheit, erhält überdies jedoch bei der concisen Fassung der einzelnen Abschnitte die grösstmögliche Uebersicht des reichhaltigen Stoffes, welcher in 6 Gruppen oder Bücher verteilt erscheint, wovon das 1) die Potentialtheorie im allgemeinen, das 2) die Gravitation, das 3) den Magnetismus, das 4) die Elektrostatik, das 5) die Elektrokinetik und das 6) die Elektrodynamik behandelt. Zahlreiche historische und namentlich litterarische Nachweisungen dürften Anfängern sehr willkommen sein.

Std.

E. Mathieu. Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme. Ire partie. Théorie du potentiel. 1885. IIe partie. Électrostatique et magnétisme. 1886. Paris. Gauthier-Villars.

P. Paci. Sopra le discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di una superficie. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 505-507.

Es wird gezeigt, dass die von Herrn Horn aufgestellten Sätze (F. d. M. XIII. 1881. 726) sich in einfacher Weise aus gewissen Entwickelungen von Herrn Beltrami ableiten lassen (F. d. M. XII. 1880. 717). B.

U. Masoni. Sulle derivate di ordine qualunque della funzione potenziale quando l'attrazione è proporzionale all' inverso della n^{ma} potenza della distanza. Nap. Rend. XXIII. 106-108. 1884.

Ausführung der Differentiationen einer beliebigen Ordnung an einem Potential in einem ebenen Raume von n Dimensionen. B.

F. G. Mehler. Beiträge zur Potentialtheorie. Pr. Elbing. A. Riedel.

Stellt man die Coordinaten X, Y, Z eines Punktes im Raume durch die Variablen x, y, φ in der Form

$$X = x, \quad Y = y\cos\varphi, \quad Z = y\sin\varphi$$

dar, so lässt sich die reciproke Distanz zweier Punkte trigonometrisch nach den Winkeln φ entwickeln, und die Coefficienten ergeben sich dur[illegible] den Fourier'schen Satz als bestimmte Integrale. Die In[illegible] werden für mehrere Fälle durch eine [illegible] Subst[illegible] merkenswerter Weise so umgeformt, [illegible] gehörigen Variabeln x, y ge-

trennt auftreten. Die behandelten Fälle sind folgende: Lage der beiden Punkte in zwei zu einander parallelen Ebenen, auf zwei coaxialen Kreiscylindern, auf concentrischen Kugeln, auf concentrischen und coaxialen Kreiskegeln, auf Kugelkalotten mit gemeinsamem Rande, auf zwei Ringflächen. Hieran schliessen sich Betrachtungen über die Benutzung der gefundenen Transformationen zur Darstellung der Potentiale von symmetrisch um eine Axe verteilten Massen und die Behandlung der elektrischen Verteilung auf einer kreisförmigen Scheibe mit ringförmigem Rande. B.

O. Callandreau. Énergie potentielle de deux ellipsoïdes qui s'attirent. C. R. CI. 1476-1178.

Kurze Andeutung über die Berechnung des gegenseitigen Potentiales zweier homogenen Ellipsoide durch Reihenentwickelung nach den Potenzen der Excentricitäten der Hauptschnitte.

B.

F. Mertens. Eine einfache Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. Wien. Ber. XCII. 524-527

Der Kunstgriff besteht darin, dass das Raumintegral durch Hinzufügung eines Integralfactors zunächst in ein vierfaches Integral verwandelt wird, in welchem sich durch eine passende Transformation die Variabeln trennen lassen. B.

F. Grube. Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. Kronecker J. XCVIII 126-131.

Das Ellipsoid wird in unendlich dünne concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Schalen zerlegt und auf das Potential dieser eine bereits früher von dem Verfasser benutzte Umformung angewandt (F. d. M. I. 1868. 313). B.

KUMMELL. Can the attraction of a finite mass be infinite? Wash Bull. VIII 58-63.

Die Frage ist nur für das Newton'sche Anziehungsgesetz gestellt und durch eine Angabe in Price's Calculus Bd. III. Art. 201 veranlasst, nach der die Anziehung einer rechteckigen Scheibe auf einen Massenpunkt ausserhalb derselben, aber in ihrer eigenen Ebene, unendlich gross werden soll. Herr Kummell zeigt, dass das Resultat zwar einen Factor enthält, der unendlich wird, dass jedoch, da die Dicke der Scheibe unendlich klein sei, ein anderer Factor des Resultats als unendlich klein in Rechnung gesetzt werden muss und das Resultat endlich bleibt. Völlige Klarheit hierüber erhält man, indem man, von einem rechtwinkligen Parallelepiped ausgehend, die eine Kante verschwinden lässt. Es sei ja an sich absurd, dass ein unendlich kleines Element eines Körpers, der auf einen Punkt eine Anziehung von endlicher Grösse ausübe, denselben Punkt mit unendlicher Kraft anziehen soll. Aehnliches findet bei einer Kreisscheibe statt.

Lp.

TAYLOR. A slight modification of the Newtonian formula of gravitation. Wash Bull. VIII. 39-41.

B.

H. JANUSCH[illegible] [illegible]sche Massenwirkung in die F[illegible]

M. KUHN. [illegible] [illegible]nstehenden Abhandlung [illegible]

[illegible] Eliminirung [illegible] Elektricitäts [illegible] [illegible]nigen [illegible] ent[illegible] scheide[illegible] [illegible] der F[illegible]

erinnert daran, dass die Arbeiten von Herrn Schramm ebenso Berücksichtigung verdient hätten. Gr.

W. Köppen. Das Barometer als Schweremesser.

Met. Zeitschr. I. 323-325.

Der Stand des Aneroidbarometers hängt, wenn m die das Instrument belastende Luft-Masse; g den doppelten Fallraum in der ersten Sekunde bedeutet, von der Grösse mg, der Stand des Quecksilberbarometers dagegen hängt ausschliesslich von m ab. Aendert sich somit g, so müssen auch die gleichzeitig am nämlichen Orte aufgezeichneten Stände beider Gattungen von Luftschweremessern eine verschieden grosse Differenz aufweisen, und diese Differenz würde theoretisch, d. h. wenn nicht die das Resultat trübenden Fehlerquellen allzu beträchtlich wären, dazu dienen, Schwerkraftsänderungen aufzuzeigen und bei Untersuchungen über die Krümmung des Geoids eine gewisse Rolle zu spielen. v. Wüllerstorf und neuerdings Zöppritz sind denn auch mit präcisen Vorschlägen für die Anstellung solcher vergleichenden Beobachtungen hervorgetreten, doch erwartet Herr Köppen mehr von Mascart's Idee, als Vergleichskraft sich der Ausdehnungskraft eines fixen, abgeschlossenen Gasvolumens zu bedienen.

Gr.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

J. J. Thomson. On some applications of dynamical principles to physical phenomena. Phil. Trans. CLXXVI. 307-342.

(Abstract). Lond. R. S. Proc. XXXVII. 65-69.

Der Verfasser bemerkt, dass die Neigung zur Anwendung dynamischer Principien und Methoden auf die Erklärung physikalischer Erscheinungen seit der Entdeckung des Princips von der Erhaltung der Energie stetig gewachsen ist, und dass die davon herrührende Anschauung, nach welcher jede physikalische Erscheinung eine dynamische Erklärung zulässt, kaum noch in der gegenwärtigen Zeit in Frage gestellt wird. Wir können die Masse (unter Einschluss des Aethers, wenn nötig), welche bei jeder physikalischen Erscheinung beteiligt ist, ansehen, als ob sie ein materielles System bildete, und die Dynamik dieses Systems mit Hülfe irgend einer der Methoden studiren, welche wir auf die gewöhnlichen Systeme in der Dynamik starrer Körper anwenden. Da wir nicht viel über den Bau dieser Systeme wissen,

können wir nur hoffen, nutzbare Resultate dadurch zu erhalten, dass wir Methoden anwenden, die keine genauen Kenntnisse inbetreff des Mechanismus des Systems erheischen. Die Methode der Erhaltung der Energie ist eine solche; aber es giebt noch andere, die schwerlich eine grössere Kenntnis von dem Bau des Systems verlangen und uns doch bestimmtere Aufschlüsse zu geben vermögen als jenes Princip bei der gewöhnlichen Art seiner Anwendung.

Lagrange's Gleichungen und die Hamilton'sche Methode der Variation sind derartige Wege, und es ist der Zweck der vorliegenden Schrift, diese Methoden auf die Erforschung der Umwandlung einiger unter den Formen der Energie anzuwenden und ihre Brauchbarkeit sowohl für die vergleichende Anordnung von Ergebnissen verschiedener Art, als auch für das Ersinnen neuer Experimente zu zeigen. Ein grosser Teil der zu erzielenden Resultate kann durch den Gebrauch der gewöhnlichen Principien der mechanischen Wärmetheorie erhalten werden, und es ist selbstverständlich, dass diese Principien enge Beziehungen zu allen Methoden haben müssen, die sich auf Erwägungen über Energie stützen.

Lagrange's Gleichungen wurden mit grossem Erfolge durch Maxwell in seinem „Treatise on electricity and magnetism" (Bd. II, Cap. 6-8) benutzt, um die Gleichungen des magnetischen Feldes zu finden.

Um den Umfang der Schrift nicht zu sehr anschwellen zu lassen, beschränkt sich der Verfasser auf die Betrachtung der Beziehungen, welche zwischen verschiedenen Erscheinungen der Elasticität, der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus bestehen; aber selbst unter dieser Einschränkung ist es ihm nur möglich, einige der hervorragenderen Erscheinungen aus der Menge derjenigen zu betrachten, auf welche die Methode anwendbar ist.

Cly. (Lp.)

G. Zanon. Le ipotesi fisiche. Venezia. Lorenzo Tondelli

Eine Preisschrift über das vom Königlichen Venezianischen Institut der Wissenschaften vorgeschlagene Thema: Prüfung neu-

erer Hypothesen inbetreff der Ursachen der optischen, thermischen, elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Ausführliches Referat von Herrn A. M. Clerke in Nature XXXIV. 357-358.

Lp.

E. Wrobel. Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung. Ein Leitfaden zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. I. Mechanik. Rostock. Wilh. Werther.

Der Verfasser sagt im Vorwort: „Die mathematische Theorie soll nicht allein die Schüler zur Erkenntnis der Naturgesetze führen, das Experiment muss damit Hand in Hand gehen; im allgemeinen werden jedoch die Versuche in der Klasse nur zur Bestätigung der bereits abgeleiteten Gesetze dienen. Wieviel Anstalten sind endlich in der glücklichen Lage, das Experiment genügend berücksichtigen zu können, weil es an den dazu erforderlichen Apparaten fehlt; der Lehrer wird sich in diesem Falle ohnehin der mathematischen Behandlung zuwenden müssen". Lehrer der Physik, die in diesem Sinne ihren Unterricht erteilen wollen oder müssen, finden in dem Buche elementar behandelt: 1) Statik fester Körper. 2) Dynamik fester Körper. 3) Statik und Dynamik der Flüss[illegible] und Gase. Den [illegible]zelnen Teilen sind Aufgaben beigege[illegible]

Lg.

P. Berthot. Appl[illegible] [illegible]que des forc[illegible] mutuelles [illegible] aux pro[illegible] générales.

F[illegible] Beitr[illegible] [illegible] 1884. [illegible] „Die Ein[illegible] Moleculen [illegible] parallel sind [illegible] einer durch y [illegible] Reihe von Mo[illegible] der Lote zu [illegible]

Diese beiden Componenten können in gewissen Fällen verschwinden, und alle diese Einwirkungen können durch die empirische Formel $KM(m)\frac{d-x}{x^2}$ dargestellt werden, die sodann an den experimentellen Ergebnissen bestätigt wird. Lp.

G. J. Michaelis. Sur la théorie de la rotation des molécules dans un corps solide. Néerl Arch. XX. 20-35.

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verfassers über elastische Nachwirkung (F. d. M XVI. 1884. 869). Jetzt wird folgende Aufgabe analytisch behandelt: Gegeben sei ein System von Molecülen, dessen Punkte Kräfte auf einander ausüben. welche verschiedene Functionen ihrer gegenseitigen Abstände sind. In dem natürlichen Zustande des Systems sind die Kräfte im Gleichgewicht. Die Veränderung soll untersucht werden, welche die Molecüle erfahren, wenn äussere Kräfte auf das System einwirken. Hinsichtlich der Structur und der Lage der Molecüle werden dann noch besondere Annahmen gemacht, durch welche die Berechnungen sich sehr vereinfachen. Zum Schlusse werden die Ergebnisse dieser Analyse mit den experimentellen Untersuchungen von Kohlrausch verglichen. G.

O. Lehmann. Ueber spontane, durch innere Kräfte hervorgerufene Formänderungen krystallisirter fester Körper. Wiedemann Ann XXV. 173-189.

Der Verfasser beobachtete bei Chinonhydrodicarbonsäureester,
[illegible] stechusäure, Chlorammonium freiwillige Structuränderungen,
[illegible] Aenderungen der äusseren Formen begleitet waren.
[illegible] die Beobachtungen, stellt die Theorien der allo-
[illegible] ung (Theorie der Allotropie, des Polymorphismus,
[illegible] tur und der physikalischen Isomerie) zusammen,
[illegible] der Theorie der physikalischen Isomerie
[illegible] nde. über die Anomalien des Boyle-Gay-
[illegible] Ausdehnung und der Zusammendrück-

barkeit der Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen und Drucken, der Capillarität, über das Dichtemaximum und die specifische Wärme des Wassers, über Schmelzpunkt von Gemengen u. a.) hinzu, weist auf die Analogie zwischen elastischer Verschiebung und allotroper Umwandlung hin und schliesst mit Bemerkungen über Trichitenbildung und Oberflächenspannung fester Körper.

Rs.

Einhorn. The force function in crystals (abstract). Lond. R. S. Proc. XXXVII. 65-66.

Cly.

Crum Brown. On the hexagonal system in crystallography. Edinb. Proc. XIII. 118-119.

Cly.

W. C. Wittwer. Grundzüge der Molecularphysik und der mathematischen Chemie. Stuttgart. K. Wittwer. VII u. [illegible] S.

K. Lasswitz. Zur Rechtfertigung der kinetischen Atomistik. Viert[illegible]schr. f. wissensch. Phil. IX. 137-161.

Referat [illegible]mann B[illegible] IX. 544.

W. Thoms[illegible] Bezug auf eine kinetische The[illegible] [illegible]91-308.

[illegible] Rep. XXI.

Schn[illegible]

hun[illegible]

Diese Abhandlung stellt sich dar als eine Analyse eines Teiles der „Deliciae physico-mathematicae“ von Schwenter und Harsdoerffer, die ursprünglich nach der „Récréation mathématique“ des Jesuiten Leurechon (Pont à Mousson 1626) bearbeitet worden, von jedem der beiden deutschen Autoren aber mit sehr umfänglichen Zusätzen bedacht worden war. Obwohl auf die Bedeutung dieses Buches zum öftern hingewiesen ward (ziemlich ausführlich u. a. in einem Weissenburger Programm des Jahres 1872 vom Referenten), so ist doch auch diese neue Behandlung des interessanten geschichtlichen Themas keineswegs überflüssig. Der Verfasser macht zunächst auf die mancherlei Schwächen des Werkes aufmerksam, bemerkt aber richtig, dass zwar Harsdoerffer den ein halbes Jahrhundert älteren Schwenter an positiver physikalischer Kenntnis überragt, aber dafür auch geringere Urteilsfreiheit und eine weit grössere Neigung zum Fabuliren an den Tag legt. Schwenter's Naturlehre ist, wie sich von selbst versteht, in der Hauptsache die physikalische Scholastik der Peripatetiker, und Harsdoerffer hat schon zum Teile mit der aristotelischen Elementenlehre gebrochen: Luft und Wasserdampf, meint er einmal, seien „unterschiedenen Wesens und Herkommens“. Der Frage nach der Richtigkeit des coppernicanischen Weltsystemes weicht die ältere Ausgabe ersichtlich aus; es wird desselben nur gelegentlich bei der Discussion des Furttenbach'schen Versuches mit der lotrecht emporgeschossenen Kugel Erwähnung gethan. Harsdoerffer dagegen ist noch weniger überzeugter Ptolemaiker als sein Vorgänger, er entscheidet sich zwar auch nicht direct für die eine oder andere Anschauung, bemerkt aber, dass hervorragende Fachmänner coppernicanisch gesinnt seien, und sucht unparteiisch die Argumente beider Schulen einander gegenüberzustellen. Dass Harsdoerffer den Columbus unsere Antipoden auf-[illegible]nden lässt, ist nach unseren heutigen Begriffen ein starker [illegible], allein in jener Zeit wurden „Gegenwohner“ und „Gegen-[illegible]ft verwechselt. Als denkender Kopf zeigt sich Schwenter, [illegible]ser ausführt, bei seiner Beweisführung für das [illegible]ines unendlichen Raumes, während Harsdoerffer [illegible]losophische Bildung aufzuweisen hatte. Dies

bekundet er namentlich in dem den Kometen gewidmeten Abschnitte, wo er zu keiner klaren Auffassung durchdringt und sich schliesslich mit der Aufzählung aller möglichen Hypothesen begnügt. Die Optik Schwenter's beschränkt sich auf Experimente mit ebenen und hohlen Spiegeln, sowie auf einige Notizen über die Strahlenbrechung und das Fernrohr, dessen wahre Natur jedoch noch nicht erfasst gewesen zu sein scheint. Irrig ist auch die Verwendung der Refraction zur Erklärung des Umstandes, dass Sonne und Mond nahe dem Gesichtskreise besonders gross erscheinen; auf die Erklärung des Regenbogens wird von vornherein Verzicht geleistet. Der Nürnberger Patrizier kennt auch die optischen Anamorphosen und den Winkelspiegel, demonstrirt die Brechung des Lichts an einem praktischeren Apparate als Schwenter, schildert das Schleifen der Linsengläser und versucht wenigstens, seinen Lesern den Process des Sehens klar zu machen, wiewohl ihm die grossen Leistungen Kepler's und Scheiner's auf dem Gebiete der physiologischen Optik unbekannt geblieben sind.

Manches, dessen Besprechung wir erwartet hätten, fehlt in dieser ersten Abteilung und wird vielleicht in einer folgenden Programmabhandlung nachgeliefert. Dahin gehört die Theorie des Schlages, über die Schwenter rationell zu denken beginnt, die Erwähnung des Aräometers u. s. f. Gr.

F. N... der Elasti-
ci... Heraus-
g... 74 S.
8...

D...
mathem...
von Franz...

kann als das vollständigste unter allen bisher erschienenen Lehrbüchern der Elasticität bezeichnet werden. Der Herausgeber hat aus einer Anzahl von Heften aus den Jahren 1857-1874 alles, was Neumann jemals über Elasticität vorgetragen hat, zusammengestellt und zu einem einheitlichen Ganzen verbunden. Der Inhalt des Werkes ist zum Teil durch F. Neumann schon veröffentlicht, zum Teil jedoch erscheinen manche Untersuchungen hier zum ersten Male, so eine Arbeit über die Elasticität der Krystalle, die Theorie des Stosses cylindrischer Stäbe, die Bearbeitung der Biegung eines Stabes.

In den ersten Abschnitten des Werkes werden die allgemeinen Beziehungen und Formeln für Druckkräfte und Verrückungen nach verschiedenartigen Methoden entwickelt. Auf diese allgemeinen Betrachtungen folgt die Theorie der Formveränderungen elastischer Körper. Es werden die Dehnung und die Zusammendrückung, sowie die Biegung und die Torsion behandelt. Hieran schliessen sich die bis jetzt noch nicht veröffentlichten Untersuchungen Neumann's über die Elasticität von Krystallen der verschiedenen Systeme in der Vollständigkeit, wie er sie in seiner letzten Vorlesung über diesen Gegenstand (1873-1874) mitgeteilt hat. Den Mangel, dass weitere, in Vorlesungen aber niemals vorgetragene Arbeiten Neumann's über Dehnung, Biegung und Torsion von Krystallstäbchen nicht aufgenommen werden konnten, hat der Herausgeber dadurch einigermassen zu heben gesucht, dass er die Ergebnisse der auf Neumann's Anregung unternommenen Untersuchungen von Baumgarten und Voigt, sowie von anderen kurz angeführt hat.

Die zweite Hälfte des Bandes umfasst Anwendungen auf Licht und Schall. Es werden die Gesetze ebener Wellen in unkrystallinischen und krystallinischen Medien eingehend untersucht. [illegible]er ergiebt sich nur dann eine Uebereinstimmung mit der Erfahrung, [illegible] nicht Fresnel's, sondern Neumann's eigene Definition der [illegible] Polarisationsebene angenommen wird, nach welcher die [illegible]bene und die Polarisationsebene zusammenfallen. [illegible]umann's Theorie gezogene Schlussfolgerung wird [illegible] die im Anschlusse an dieselbe mitgeteilten

Untersuchungen von Lamé und C. Neumann über transversale Wellen.

Weiter folgt die Erklärung der Farbenzerstreuung nach Cauchy und nach F. Neumann's eigener Ansicht. Die letztere ist bisher nur als kurze Andeutung gelegentlich veröffentlicht worden. Zum Schlusse werden die Gesetze für die Bewegungen dünner Körper untersucht, hauptsächlich zu akustischen Zwecken, um die Theorie der schwingenden Saiten, der Klangfiguren auf Membranen und der Töne eines Klangstabes zu entwickeln. Daneben findet sich die Theorie des Zusammenstosses elastischer Stäbe, welche Neumann schon vor langer Zeit aufgestellt, aber nicht bekannt gemacht hat.

Der Herausgeber hat die Vorlesungen ohne Aenderungen getreu nach den vorhandenen Nachschriften redigirt, dann aber in Anmerkungen unter dem Texte oder in kurzen Zusätzen, die als solche gekennzeichnet sind, die späteren Arbeiten anderer Forscher genannt und ihren Inhalt, wenn es nötig schien, kurz angegeben. (Vgl. die Anzeige dieses Bandes in Wiedemann Beibl. X. 530 von O. E. Meyer). Lp.

J. J. Weyrauch. Aufgaben zur Theorie elastischer Körper. Leipzig. Teubner. X u. 350 S. gr. [illegible]

Der „Theorie el[illegible]er Körper" d[illegible] Verfassers, welche in F. d. M. XVI. 1884 [illegible] [illegible]ezeigt wur[illegible] [illegible] versprochene Aufgabensammlung [illegible] Zusammenstellung von Beispielen, [illegible] [illegible] entwickelten Theorie durchge[illegible] [illegible] sollen weiterer Klarste[illegible] [illegible] Körper dienen [illegible] [illegible] pfungs- [illegible] [illegible] haupt [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] bearbeit[illegible]

Form von Aufgaben schien dem Verfasser deshalb günstig, weil „die nötigen Voraussetzungen der Lösungen sich in der Aufgabenstellung berücksichtigen lassen“. Daher bilden diese „Aufgaben“ nun einen zweiten oder Supplement-Band zu jener „Theorie“, der wie diese studirt werden muss und nur zum Teile für Studirende Uebungsstoff bietet.

Wie die „Theorie“ schon manche Untersuchungen enthielt, die nicht gerade ausschliesslich zur Elasticitätslehre gehören, so sind auch hier Probleme gelöst, die man sonst der reinen Mechanik oder anderen Teilen der mechanischen Physik zuweist. Gemäss der vom Verfasser vertretenen Richtung sind natürlich Fragen der Bau- und Ingenieur-Wissenschaften in grösserer Zahl bearbeitet. Weniger stark sind die aus der Akustik vertreten, obwohl die Hauptaufgaben vorhanden sind. Sehr reichhaltige Litteraturnachweise ermöglichen die Auffindung von Originalarbeiten, die in vielen technischen Zeitschriften verstreut liegen.

Lp.

Ch. Duguet. De la résistance des corps solides.
Rev d'Art XXV. 146-161, 398-422; XXVI. 22-49.

Schluss der Reihe von Artikeln aus der Rev. d'Art. XXII-XXVI. (F. d. M. XV. 1883. 875, XVI. 1884. 873). Cap. VIII. Betrachtungen über die mechanische Arbeit, die Anwendung und Brauchbarkeit der Metalle. Während die ersten Teile theoretischer Natur waren, beziehen sich die jetzt vorliegenden Schlussabschnitte auf die technischen Anwendungen.

Lp.

[illegible] Duguet. Déformation des corps solides. Limite [illegible]cité et résistance à la rupture. Ire partie. [illegible] spéciale. 1881. IIe partie. Statique générale
[illegible] Gauthier-Villars.

[illegible]d besteht aus den in der Rev. d'Art. 1883-1885 [illegible] besprochenen Artikeln. Lp.

Kräftepaar wird diesmal noch eine dort wirkende Zugkraft hinzugenommen; dann haben die Gleichungen dieselbe Form, wie die, welche die Drehung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, der auf einer der drei durch den Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxen gelegen ist, bestimmen. Dies Problem ist analytisch für das Gyroskop gelöst, d. h. für einen schweren Körper, dessen zwei Hauptträgheitsmomente senkrecht zu der den festen Punkt und den Schwerpunkt enthaltenden Axe der Figur gleich sind. Daher wird für das vorliegende Problem die Annahme gemacht, dass der Stab zwei gleiche Hauptwiderstände gegen die Deformation besitze, und zur Vereinfachung noch die, dass das Kräftepaar um die Hauptaxe ungleichen Widerstandes drehe.

Es sind die beiden Fälle zu unterscheiden: A. Die zwei gleichen Widerstände sind beide Widerstände gegen Biegung. B. Ein Widerstand gegen Biegung und ein Widerstand gegen Drillung sind einander gleich. Für jeden dieser Fälle werden die Grössen der Biegung und der Drillung in den einzelnen Punkten der elastischen Centrallinie untersucht, die den Poinsot'schen Kegeln der Drehungsaxen entsprechenden windschiefen Flächen construirt, durch deren successives Aufbiegen die Ueberführung des geraden und ungedrillten Stabes in seine Gleichgewichtslage veranschaulicht werden kann, und für den ersten Fall werden auch die Coordinaten eines Punktes der elastischen Centrallinie aufgestellt, während für den zweiten Fall auf Formeln in Lottner's Arbeit „Reduction der Bewegung etc.“ in Crelle J. L. 111-125 verwiesen werden kann. Von den Resultaten sei ein Teil im Folgenden zusammengestellt.

A. Der Stab ist gleichförmig gedrillt. Für jeden Punkt der elastischen Centrallinie liegt die Axe der Spannung und jene der durch diese hervorgerufenen Gesamtkrümmung mit der Axe der Torsion in derselben Ebene, und zwar liegt die Axe der Spannung oder jene der Krümmung näher an der Axe der Tor[illegible] nae[illegible] Widerstandsmoment um die letztere g[illegible] dasjenige um eine der Axen des [illegible] der elastischen Centrallinie, an

dessen Endpunkten die Tangenten mit der variablen Richtung der Kraft einen grössten und kleinsten Winkel (ϑ_0, ϑ_1) bilden, ist um so kürzer, je grösser der Widerstand C gegen Drillung und die anfänglich erteilte Torsion n, d. h. je starker das anregende Kräftepaar Cn ist, je kleiner ferner der gleiche Widerstand A gegen Biegung, je stärker die wirkende Zugkraft M und je kleiner der anfängliche Winkel ϑ_0 der letzteren gegen die in den Stab eindringende Richtung der Stabaxe gewählt wird, einerlei, ob dieser Winkel spitz, recht oder stumpf ist. Die elastische Centrallinie wird in eine doppelt gekrümmte Curve gebogen, welche am freien Ende und in allen hiervon um Vielfache von $s_{2K} = 2K:m$ abstehenden Punkten Wendepunkte besitzt (s ist der vom freien Ende gerechnete Bogen der elastischen Centrallinie, $2K$ die Periode von u und $u = m.s$, wenn m eine Constante bedeutet). Die Biegung der Curve ist periodisch und an allen Stellen, welche von einem Wendepunkt gleich weit nach rechts oder links abliegen, gleich gross, in der Mitte eines Bogenstückes s_{2K} am grössten, nämlich $\theta'_K = \sqrt{\frac{2Ma_1}{A}}$. Die Curve der Polodie ist auf einem der Stabaxe parallelen Cylinder gelegen, dessen im freien Endquerschnitt gezeichnetes Profil eine Curve ist, welche, aus unendlich vielen congruenten blattförmigen Teilen bestehend, mit ihren Enden im Mittelpunkte des Querschnittes berührend zusammenstossen und von einem concentrischen Kreise umhüllt werden. Der Radiusvector der Curve ist die Grösse θ' der Biegung, der Radius des einschliessenden Kreises der Betrag der Maximalbiegung θ'_K. Die Blätter der Profilcurve werden um so breiter, je kleiner der Widerstand C gegen Drillung und je grösser die anfangs erteilte Torsion n, je grösser der Widerstand A gegen Biegung, je kleiner die wirkende Kraft M und je grösser der spitz genommene Anfangswinkel zwischen Kraftrichtung und Stabaxe gewählt ist. Für alle Punkte der gebogenen elastischen Centrallinie, welche Wendepunkte sind ($s = 0$, s_{2K}, s_{4K}, ...), fallen die Axen der Spannung und der durch diese hervorgerufenen Krümmung mit der Axe der Torsion zusammen; für alle dazwischen liegenden

Punkte grösster Biegung liegen die 3 genannten Axen mit der Richtung der angreifenden Einzelkraft in derselben Ebene, und zwar so, dass dieser invariablen Richtung zunächst die Axe der Torsion liegt und sodann die Axe der Spannung oder Krümmung folgt, je nachdem der Widerstand gegen Drillung grösser oder kleiner als einer der Widerstände gegen Biegung ist. Darauf wird die elastische Centrallinie näher untersucht; die Coordinaten eines Punktes der Gleichgewichtscurve werden durch doppelte unendliche Reihen dargestellt und die erhaltenen Resultate werden auf eine Reihe specieller Fälle angewendet. Schliesslich wird gezeigt, dass die Gleichgewichtsbedingungen, welche für einen Punkt der elastischen Raumcurve unter der gleich zu erwähnenden Annahme nach den Principien der Statik gebildet sind, mit den Formeln, welche sich aus der Kirchhoff'schen Theorie ergeben, übereinstimmen. Die Annahme ist die, welche man bei den Ueberlegungen über das Gleichgewicht der elastischen Curve im Raume zu machen pflegt: Das von der Biegung herrührende Moment der elastischen Kräfte in irgend einem Punkte ist der Grösse der Biegung in demselben proportional, was allein für den isotropen Stab gilt, dessen Hauptwiderstände A und B gegen Biegung einander gleich sind.

B. Damit ein Biegungs- und der Drillungswiderstand einander gleich sind [illegible] eine Bedingun[illegible] [illegible]llt werden. Es wird gezeigt, das[illegible] [illegible]edingung [illegible] [illegible]en elliptischen Querschnitt des S[illegible] [illegible] [illegible]. Die Grösse der Biegung um [illegible] [illegible] [illegible]widerstandes, um welche das k[illegible] [illegible] [illegible]st constant für alle Punkte d[illegible] [illegible] [illegible] des die S[illegible] repräsen[illegible] [illegible] durch [illegible] [illegible] [illegible] Hauptax[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] oder [illegible] der To[illegible] [illegible] per[illegible]

verschiebbare Teile nicht zerschnitten werden, sie besitzt keine Wendepunkte. Die Biegung wird am kleinsten, nämlich gleich der im freien Ende hervorgerufenen (n), für alle Punkte, deren Bogenentfernungen von diesem Ende gerade Vielfache der Grösse $K:m$ oder ungerade Vielfache der Grösse $C\pi:(2C-A)n$ sind. Die Polodie ist eine ebene Curve, deren Ebene, die Fläche der Polodie, auf der Hauptaxe X' senkrecht steht; ihre Projectionen auf die Hauptebenen $X'Y'$, $X'Z'$ sind also Stücke von geraden Linien, ihre Projection auf die Hauptebene $Y'Z'$ ist eine transcendente Curve. Drei Specialfälle werden erwähnt; für den dritten Fall, in dem der ungleiche Widerstand gegen Biegung so gross ist wie die Summe der zwei anderen gleichen Widerstände, $A = 2C$, wird der Satz erhalten: Ist der eine Widerstand eines elastischen Stabes gegen Biegung gleich dem Widerstande gegen Drillung und gleich der Hälfte des andern Widerstandes gegen Biegung, so wird die elastische Centrallinie unter dem Einflusse einer auf das freie Ende wirkenden Kraft und eines um die Hauptaxe des letztgenannten Widerstandes drehenden Kräftepaares in eine periodisch gekrümmte Curve umgebogen, welche niemals Wendepunkte hat und um welche eine Drillung des elastischen Stabes nicht vorhanden ist. Rs.

R. Hoppe. Ueber die Grenze der Stabilität eines longitudinal comprimirten geraden elastischen Stabes.

Hoppe Arch. (2) II. 108-110.

Der Verfasser hat im Jahre 1857 (in Pogg. Ann. CII. 227-245) bewiesen, dass ein gerader elastischer Stab durch longitudinale Compression erst dann gebogen werden kann, wenn dieselbe gewisse endliche Grenze überschreitet, und diese Grenze [illegible] Dagegen sei auch die auf Rechnung gestützte Ansicht [illegible] dass ein gerader Stab bei der geringsten Compression [illegible] anfange. Dies Resultat werde erhalten, indem [illegible] ation der Differentialgleichungen $\frac{1}{\varrho}$ [illegible] $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ [illegible] lie y transversal gerichtet) setzt, die höhe-

ren Potenzen der Transversalverschiebungen also vernachlässigt und die Gleichungen als lineare behandelt. Der Verfasser dagegen lässt die Gleichungen unverändert, da sie ohne Vernachlässigung in geschlossener Form integrabel sind. Er bestimmt die endliche Compression, in deren Grenzen die gerade Gestalt des Stabes stabil, die Biegung also unmöglich ist. Ein neuer Hinweis hierauf scheint dem Verfasser nicht gegenstandslos, obgleich z. B. Grashof in seiner Festigkeitslehre im Jahre 1866 erklärte, dass die falsche „gewöhnliche" Ansicht durch jene Vernachlässigung entstanden sei.

Rs.

W. Gosiewski. Ueber die mittleren Componenten der Deformation fester elastischer, homogener und insbesondere isotroper Körper. Krak. Ber. XIII (Polnisch.)

Dn.

J. Thomae. Ueber eine ein[illegible]be aus [illegible]rie der Elasticität. Leipz. Ber. [illegible]

Ein Stück eines elastischen [illegible]eiscylin[illegible] durch zwei zur Cylinderaxe [illegible]enen [illegible] werde auf eine horizontale feste [illegible] stück [illegible]olge seiner eige[illegible]eform[illegible] langte [illegible] bestimmt wer[illegible]gab[illegible] der An[illegible] Man trägt d[illegible] des Cylin[illegible]h nach de[illegible] haben.

In Art[illegible]ass d[illegible]

$$(1) \quad \frac{d^2 [illegible]}{d\lg r^2} \ldots = -4 [illegible]$$

auf welche die A[illegible]el integrirt wird. Ei[illegible] Functionen werden ent[illegible]

Der Verfasser stellt [illegible]

und die Grenzbedingungen auf. Es falle die xy-Ebene mit der unteren horizontalen Grundfläche des Cylinderstückes, das die Länge l habe, zusammen, und die z-Axe mit der Axe desselben. Die Verschiebungen seien u, v, w, und es werde gesetzt

$$u = xs, \quad v = ys, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

dann ist rs die Verschiebung in Richtung eines Strahles r (radiale Verschiebung), s wird das radiale Verschiebungsmass genannt. s und w sind Functionen von r und z. Es sei k der Radius und ϱ die Dichte des Cylinders, ϑ der Winkel, welchen r und x mit einander bilden. Die Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer homogener Körper, auf deren Inneres nur die Schwere wirkt, werden transformirt, indem r, ϑ, z als unabhängige Coordinaten eingeführt werden. Zur Abkürzung wird gesetzt

$$\bar{w} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \lg r},$$

$$\bar{s} = \frac{3}{r}\,\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\left(2\,\frac{\partial s}{\partial \lg r} + \frac{\partial^2 s}{\partial \lg r^2}\right),$$

dann erhält man

$$\text{*)}\quad \begin{cases} (\lambda + 2\nu)\bar{s} + \nu\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial z^2} + (\lambda + \nu)\bar{w} = 0, \\[2ex] \dfrac{\nu}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial \lg r^2} + (\lambda + 2\nu)\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\lambda + \nu)\left(2\,\dfrac{\partial s}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial \lg r}\right) = \varrho g. \end{cases}$$

… Mantelfläche bekommt man aus den allgemeinen Bedin… …e beiden folgenden:

$$\ldots s + \frac{\partial s}{\partial \lg r}\Big) + \lambda\,\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{k^2}\,\frac{\partial w}{\partial \lg r} + \frac{\partial s}{\partial z} = 0.$$

$$\ldots 0, \quad D_0 = \lambda\left(2s + \frac{\partial s}{\partial \lg r}\right) + (\lambda + 2\nu)\,\frac{\partial w}{\partial z}.$$

$$\ldots = -\lambda\left(2s + \frac{\partial s}{\partial \lg r}\right) - (\lambda + 2\nu)\,\frac{\partial w}{\partial z}.$$

…se den Druck auf die Unter-

Im Art. III. werden particuläre Integrale aufgesucht. Es wird gesetzt:

$$s = s_0 + s' \quad \text{und} \quad w = w_0 + w',$$

und es wird die Annahme gemacht, dass s_0 und w_0 die Gleichungen (2) befriedigen, während s' und w' diesen Gleichungen genügen, wenn in der zweiten 0 an Stelle von ϱg genommen wird. Der Verfasser setzt

$$s_0 = \lambda C', \quad w_0 = \frac{z(z-l)\varrho g}{2(\lambda+2\nu)} - Cz,$$

in welchen Gleichungen jedoch C' und C nicht willkürliche Constanten bezeichnen, da die erste der Bedingungen für die Mantelfläche eine Beziehung zwischen diesen Grössen giebt. Lösungen s' und w' werden von der Form gesucht:

$$s_n = t_n \cos \varepsilon_n z, \quad w_n = t'_n \sin \varepsilon_n z,$$

indem ε_n eine Constante bedeutet und t_n sowie t'_n nur von r abhängen. Es wird gefunden

$$s_n = t_n \cos \varepsilon_n z,$$

$$w_n = \frac{\sin \varepsilon_n z}{\varepsilon_n} \left[\frac{\nu}{\lambda+\nu} \int \varepsilon_n^2 r^2 t_n \, d\ldots \quad \frac{\lambda+2\nu}{\ldots} \left(\frac{dt_n}{d \lg r} + 2t_n \right) \right]$$

Die aus vier particulären Int[illegible] zusammengesetzte [illegible] t enthält vier willkürliche Con[illegible] h da ke[illegible] er, sondern ein voller Cylinder [illegible] ird, hat

$$t_n = A \ldots (\varepsilon_n r),$$

worin A_n und B_n Constanten [illegible] man [illegible] ε_n und [illegible] tt s und z schre[illegible] mit [illegible] erhalt[illegible] lung

$$w_n \ldots \left(\tfrac{1}{2} \varepsilon_n^2 r^2 I \ldots \right)$$

s_n und w[illegible] Grenzbed[illegible] chung bes[illegible]

[illegible]

Die zweite Ma[illegible] ung [illegible]

A_n [illegible]

B_n [illegible]

Die erste Mantelflächenbedingung wird durch die Grössen s_n, w_n nicht befriedigt, sondern man muss, um Gleichgewicht herzustellen, an dem Mantel eine normale Zugkraft wirken lassen, welche mit $H_n \cos(s_n z)$ bezeichnet wird. Die sich dann ergebenden Werte von C_n, A_n, B_n werden hingeschrieben.

Das Problem wird im Art. IV gelöst, indem

$$s = s_0 + \Sigma s_n, \quad w = w_0 + \Sigma w_n$$

gesetzt und dafür gesorgt wird, dass H für alle Werte von z zwischen 0 und l verschwindet. Unter anderem wird auch die Gleichung für eine Faser, welche in dem Cylinder ursprünglich die Entfernung r' von der Axe hatte und dieser parallel war, nach der Deformation gegeben. Doch da die Formeln jetzt umfangreich werden, sei bezüglich dieses Teiles auf die Arbeit selbst verwiesen. Rs.

P. TAIT. Note on a plane strain. Edinb. M. S. Proc. III. 42-45.

Behandelt die Resultate der Ausdehnung auf alle Werte der Coordinaten für die Deformation, welche durch

$$\xi = \frac{xy}{D}, \quad \eta = \frac{y^2 - x^2}{D}$$

gegeben wird. Gleichungen die in Saint-Venant's Untersuchungen über die Biegung von Prismen vorkommen. Gbs. (Lp.)

…REE. Two or more distinct elastic solid media in …ct separated by parallel planes, exposed to purely …s forces specially when normal. Complete solu… …n elastic solid continuously varying with the … of constant rigidity. Quart. J. XXI. 107-129.

…ste Körper mögen sich so berühren, dass die …zur Ebene $x = 0$, welche die erste der Schich… …' sind. Elasticität und Dichte mögen sich …ht ändern, und man nehme an, dass die …Drucken oder Zügen von der typischen

Form $\Pi \sin \frac{2\pi y}{a}$ unterworfen sei. Der Verfasser bestimmt für die verschiedenen Schichten die Verrückungen und die Bruchgrenzen. Zunächst wird der Fall, dass nur zwei Schichten vorhanden sind, behandelt und dann noch kurz der Fall, dass die Zahl der parallelen Schichten verschiedenen Materials r sei.

Rs.

Rayleigh. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. Lond. M. S. Proc. XVII 4-11.

Das Verhalten von Wellen auf der freien ebenen Oberfläche eines unbegrenzten festen homogenen isotropen elastischen Körpers soll untersucht werden, wenn die Störung eine Oberflächenstelle, deren Dicke mit der Wellenlänge vergleichbar ist, nicht überschreitet. Der Fall ist analog dem von Wellen auf tiefem Wasser, nur dass das Energiepotential vom elastischen Abprallen statt von der Schwerkraft abhängt.

Die freie Oberfläche wird als die Ebene $z = 0$ genommen, und es wird vorausgesetzt, dass die Dilatation

$$\theta = Pe^{[illegible]} \cdot e^{[illegible]} e^{[illegible]} e^{[illegible]}$$

ist, und die Verrückungen α, β, γ sich wie $e^{[illegible]}$ ändern. Es sei

$$\frac{\varrho p^2}{[illegible] + 2\mu} = [illegible], \quad k^2 [illegible]$$

wenn ϱ die D[illegible] μ die [illegible] Constanten bedeuten. Wenn [illegible] wirkt, erhält der Verfass[illegible], dass [illegible] zusam- [illegible]
[illegible]

Wenn man diese Gleichungen specialisirt, indem man die Bewegung in einer zur xz-Ebene parallelen Ebene betrachtet und die Gleichungen für die fortschreitenden Wellen aufstellt, ergiebt sich, dass die horizontale Bewegung in der Tiefe $0{,}1378\lambda'$, falls λ' die Wellenlänge $2\pi:l$ ist, und die verticale Bewegung in keiner Tiefe verschwindet. Indem $z=0$ gesetzt wird, erhält man die Bewegung an der Oberfläche selbst, und es zeigt sich, dass diese Bewegung in Ellipsen stattfindet, deren verticale Axen nahe doppelt so gross sind, wie die horizontalen Axen. Die Ausdrücke für die stationären Schwingungen werden auch gegeben.

Es wird noch der Fall einer bestimmten Zusammendrückbarkeit des Körpers betrachtet und schliesslich bemerkt, es sei nicht unwahrscheinlich, dass die hier behandelten Wellen eine wesentliche Rolle bei den Erdbeben und beim Zusammenstoss fester elastischer Körper spielen. Rs.

HUGONIOT. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits. (Extrait par l'auteur.) C. R. CI. 794-797.

Der Verfasser sieht von der Reibung, der Viscosität und von äusseren Kräften ab. Für eine ursprünglich homogene Flüssigkeit sind die Bewegungsgleichungen, wenn die Bewegung zwischen parallelen Schnitten so erfolgt, dass in jedem Schnitt die Geschwindigkeit aller Punkte in demselben Augenblick dieselbe und senkrecht zum Schnitte ist,

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

indem u die Verrückung des Schnittes x im Augenblick t bedeutet.

Wenn Discontinuitäten eintreten, gilt diese Gleichung nicht [illegible] So hat man z. B. für ein vollkommenes Gas, dessen [illegible] ρ und bei welchem der Anfangsdruck p_0 ist, statt der [illegible]

$$(2)\qquad \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = mp_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

die allgemeinere

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-m}\right]$$

zu nehmen, sobald Discontinuitäten vorhanden sind.

Der Körper sei durch einen Schnitt ξ in zwei Teile zerlegt, von welchen der eine die Bewegung B, der andere die Bewegung A hat; diese letztere breite sich auf Kosten der anderen, ohne dass andere Phänomene auftreten, beständig mit der Geschwindigkeit $\frac{d\xi}{dt}$ aus; dann heissen die beiden Bewegungen vereinbare.

Der Verfasser stellt die Bewegung geometrisch durch Oberflächen dar, indem er u als Ordinate, x und t als horizontale Abscissen nimmt. Dies sind Integralflächen einer und derselben partiellen Differentialgleichung. Wenn keine Discontinuitäten erzeugt werden, „vereinigen sich die beiden Integralflächen, welche vereinbare Bewegungen darstellen, längs der Schnittlinie, welche eine gemeinsame Charakteristik ist.“

Es ergiebt sich, „dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich dem Winkelcoefficienten der Horizontalprojection der Charakteristik ist“. Für eine Flüssigkeit, deren Bewegung durch Gleichung (1) dargestellt wird, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\pm\sqrt{F\frac{\partial u}{\partial x}}$.

Wenn das Ende einer ursprünglich in Ruhe befindlichen Flüssigkeitssäule irgend einer Bedingung, einer Function der Zeit, unterworfen wird, entsteht eine Bewegung, welche, falls keine Reflexionen stattfinden, geometrisch durch eine abwickelbare Fläche dargestellt wird. Die verschiedenen abwickelbaren Flächen gehören derselben Klasse an, welche, wenn man

$$F(x) = \left[\varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]^2$$

setzt, die Gleichung haben

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(0) - \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Dies wird auf Gase, für deren Bewegung Gleichung (2) gilt, angewendet. Die Berücksichtigung von Discontinuitäten bei voll-

kommenen Gasen führt zu der Bemerkung: „Wenn ein Schnitt plötzlich ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, liegt das Verhältnis von ursprünglicher und schliesslicher Dichtigkeit immer zwischen $\frac{m-1}{m+1}$ und $\frac{m+1}{m-1}$, indem m das Verhältnis der specifischen Wärmen bedeutet.“ Rs.

E. Sundberg. Transversalsvängningarne hos en tunn kristallinisk skifva med trenne symmetriplan och af elliptisk begränsning. Stockh. Öfv. XLII. No. 5: 77-94.

Der Verfasser bestimmt die Transversalschwingungen einer dünnen krystallinischen Platte mit drei Symmetrieebenen und von elliptischer Form. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen verfolgt er die von Kirchhoff (Vorlesungen, S. 455) angegebene Methode. E.

V. Hausmaninger. Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper. Berl. Ber. 49-62; Wiedemann Ann. XXV. 189-202.

Es wird untersucht, welche Abweichungen die Voigt'sche Theorie von der Newton'schen Theorie des Stosses ergiebt, wenn der Weg λ, welchen die in jedem der Stäbe entstehende longitudinale Welle während der Stossdauer zurücklegt, nicht viel grösser ist als die doppelte Länge des längeren Stabes; das geschieht für die drei Fälle: 1) Die Stäbe haben gleiche Länge und gleichen Querschnitt, 2) der eine Stab ist doppelt so lang wie der andre, die Querschnitte sind gleich, 3) der eine Stab hat die doppelte Länge, aber nur den halben Querschnitt des anderen. In allen drei Fällen zeigt sich, dass nach der Voigt'schen Hypothese der Grenzwert, welcher den gewöhnlichen Stossformeln entspricht, sehr schnell erreicht wird. Im ersten Falle dürften die Abweichungen von der alten Stosstheorie kaum die Grenzen der Beobachtungsfehler übersteigen, im zweiten würde dies schon

für $\lambda = 3l$ eintreten, und im dritten Falle konnte schon für $\lambda = 3l$ die Beobachtung kaum mehr eine Abweichung von den gewöhnlichen Stossformeln geben. Rs.

LEMAN. Sur la recherche des moments fléchissants et des efforts tranchants qui se produisent dans une poutre appuyée à ses extrémités et fléchie sous l'action d'une surcharge mobile. Belg. Bull. (3) IX. 574-586.

DE TILLY. Rapport. Belg. Bull. (3) IX. 529-530.

Lösung mittels der graphischen Statik, indem ein fester Körper betrachtet wird, dessen Schnitte die Diagramme sind, die jeder Lage der Belastung entsprechen. Mn. (Lp.)

J. ŠOLÍN. Theorie der äusseren Kräfte gerader Träger. Mit 5 lith. Tafeln. Prag. (Böhmisch.)

Das vorliegende dritte Heft, mit welchem diese Publication abschliesst, behandelt zunächst den Einfluss der Höhendifferenzen der Stützpunkte, dann den Einfluss der überragenden und eingespannten Enden eines continuirlichen Trägers constanten Querschnittes; sodann folgt die Theorie des continuirlichen Trägers von veränderlichem Querschnitte. Die Grundlage der dem Verfasser eigenen Behandlung bilden gewisse von dem Aenderungsgesetze des Trägheitsmomentes abhängige Linien (beim Träger constanten Querschnittes wären es Curven dritter Ordnung mit einer unendlich fernen Rückkehrtangente). Auf Grund dieser Linien werden die sogenannten Fixpunkte des Trägers construirt und die Lösung aller einschlägigen Aufgaben sowohl bei constanter als auch bei veränderlicher Belastung vorgenommen. Ein weiterer Abschnitt behandelt die continuirlichen Gelenkträger. Den Schluss bilden einige Ergänzungen der früher erschienenen zwei Hefte, u. a. eine eingehende Untersuchung der Grenzwerte von Momenten, von denen die Stabspannungen in Fachwerkconstructionen bei beweglicher Belastung abhängen.

In sämtlichen Entwickelungen wird die geometrische Anschauung möglichst gewahrt; aus den gewonnenen Resultaten werden sowohl graphische als auch rechnerische Lösungen der zugehörigen Aufgaben abgeleitet. Std.

J. Šolín. Zur Theorie des continuirlichen Trägers veränderlichen Querschnittes. Civiling. (2) XXXI. 209-241.

Eine ausführliche Untersuchung des im Titel genannten Gegenstandes. Unter Bezugnahme auf Mohr's geometrische Behandlung der continuirlichen Träger constanten Querschnitets wird die Construction und Berechnung der Linien, Punkte und Grössen ausgeführt, welche für die Kenntnis der fraglichen Träger wichtig sind, und zwar für ruhende und bewegte, gleichmässig verteilte und Einzelbelastung.

F. K.

H. Marcuse. Zur Berechnung der Widerstandsmomente von Trägern. Centralbl. der Bauverw. V. 383.

H. Zimmermann. Zur Bestimmung der Widerstandsmomente von Trägern. Centralbl. der Bauverw. V. 396.

Für den Zuwachs des Widerstandsmomentes eines Trägers mit doppelt-T-förmigem Querschnitt durch Verbreiterung der Gurtplatten ergiebt sich der angenähert richtige Wert $h.\Delta(F)$, wo h die Höhe des Stehblechs und $\Delta(F)$ der Zuwachs des Querschnittes bedeutet. Die Bemerkung, dass es möglich sei, in Folge dieser Formel sich mit Tabellen zu behelfen, welche die Widerstandsmomente nur für eine Gurtbreite enthalten, wird von Herrn Zimmermann durch den Einwurf zurückgewiesen, dass man gewöhnlich nicht für einen Träger das Widerstandsmoment, sondern umgekehrt zu einem vorgeschriebenen Widerstandsmoment den Träger sucht. F. K.

H. Zimmermann. Tabellen der Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte. Mit Berücksichtigung der Nietverschwächung berechnet und übersichtlich zusammengestellt. II. Auflage. Berlin. Ernst und Korn.

Besprechung Centralbl. der Bauverw. V. 124. F. K.

G. de Perrodil. Mécanique appliquée. II. Mécanique moléculaire des milieux solides homogènes ou cristallisées de forme quelconque. Paris. Gauthier-Villars.

R. Krohn. Theoretische Begründung der Schwarz'schen Knickfestigkeitsformel. Centralbl. der Bauverw. V. 400-401.

Ist für einen auf Zug beanspruchten Stab der grösste Wert von $P:F$ (P Zugkraft, F Querschnitt) gleich k, so ist der grösste zulässige Druck bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{P_1}{F} = \frac{k}{1+\frac{1}{4}\frac{k}{E}\frac{l^2}{r^2}},$$

(E Elasticitätsmodul, l Länge, r Trägheitsradius). F. K.

H. S—h. Durchbiegung eines Balkens mit sprungweise sich ändernden Querschnitten. Centralbl. der Bauverw. V. 140.

Die durch den Titel hinreichend gekennzeichnete Aufgabe wird auf dem Wege, welcher durch die Principien der Festigkeitslehre vorgeschrieben ist, in richtiger Weise gelöst. F. K.

L. Hoffmann. Ungünstigste Stellung eines Lastzuges auf einem Balken von gegebener Spannweite. Wien. Allg. Bauztg. L. 22-23.

Wenn auf einem Balken von der Länge l mehrere Lasten $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ in den constanten Abständen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ von links nach rechts auf einander folgen, so sind die Biegungs-

momente $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ in den Ruhepunkten der Lasten ganze rationale Functionen zweiten Grades des Abstandes x der Last P_1 vom linken Ende des Balkens. Es seien jetzt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ diejenigen Werte von x, für welche einer der Ausdrücke $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ seinen Maximalwert erreicht; dann bestimmt dasjenige x_μ, für welches das zugehörige M_μ grösser ist als jeder der übrigen Maximalwerte, die ungünstigste Stellung des Lastzuges. Die Abhandlung giebt Regeln für die Bestimmung von x_μ. F. K.

J. Schlotke. **Neue geometrische Bestimmung der Maximalmomente.** Civiling. (2) XXXI. 501-510.

Behandelt in anschaulicher, graphischer Weise das Problem, welches L. Hoffmann in der Wiener Bauztg. (vgl. das voranstehende Referat) auf dem Wege der Rechnung gelöst hat, und giebt eine äusserst einfache geometrische Construction des Trägerpunktes, welchem bei bewegter Last das Maximalmoment zukommt.

F. K.

A. Considère. **Efforts dynamiques produits par le passage des roues des locomotives et des wagons aux joints des rails.** C. R. CI. 992-994.

Zunächst werden bezügliche Experimente beschrieben, dann wird versucht, die Wirkungen rechnerisch abzuleiten. Die Rechnung führt zu dem durch die Experimente bestätigten Gesetze: „Die Intensität der dynamischen Wirkungen, welche erzeugt werden, wenn ein Rad eines Eisenbahnwagens über die Verbindungsstelle zweier Schienen sich bewegt, ist proportional der Geschwindigkeit des Wagens, dem Winkel, welchen die Fahrlinien benachbarter Schienen mit einander zu der Zeit bilden, wann die Verbindungsstelle passirt wird, der Quadratwurzel der Masse des Rades und der mit diesem ohne elastische Zwischenstücke verbundenen Teile und endlich proportional

der Quadratwurzel des Coefficienten der Gesamtfestigkeit des Wagens."

Aus den erhaltenen Gleichungen kann man auch noch folgenden Schluss ziehen: „Innerhalb der Grenzwerte, welche die zwischen der Schiene und dem metallischen Gerüst befindliche Masse μ in der Praxis haben kann, verursacht ihre Vergrösserung nicht eine Verminderung, sondern im Gegenteil eine Vergrösserung der dynamischen Wirkungen, welche dies metallische Gerüst durch den Vorübergang der Räder an der Verbindungsstelle zweier Schienen erleidet." Ks.

E. Winkler. Materialmenge der Träger. Dtsche Bauztg XIX. 133.

Aus dem Princip der virtuellen Verrückungen wird für einen Balkenträger, d. h. einen nur von verticalen äusseren Kräften beanspruchten Träger, welcher aus beliebigen Stabsystemen zusammengesetzt ist, das Gesetz abgeleitet:

Wenn die gezogenen wie die gedrückten Teile alle dieselbe specifische Spannung haben sollen, so muss die Materialmenge der gedrückten gleich derjenigen der gezogenen Teile des Trägers sein.

Dieses Gesetz wird zur Bestimmung der Materialmenge gewisser Trägerformen verwendet. F. K.

Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerkes. Civilbg. (2) XXXI. 289-356.

Um die Spannungen in den Teilen eines statisch nicht völlig bestimmten Stabsystems zu ermitteln, muss man bekanntlich die Principien der Festigkeitslehre zu Hülfe nehmen. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, wie man die betreffende Aufgabe unter Benutzung des Princips der virtuellen Verrückungen lösen kann, welches hier die Form

$$(1) \qquad \Sigma P\delta p + \sum_{\nu} S_{\nu}\delta l_{\nu} = 0$$

annimmt, wo P eine äussere Kraft, δp die entsprechende Componente der virtuellen Verrückung ihres Angriffspunktes, S_γ die Spannung in einem der Stäbe und δl_γ seine virtuelle Verlängerung bezeichnet.

Nun lassen sich die Spannungen sämtlich in der Form

$$(2) \qquad S_\gamma = \sum P k_\gamma + \sum_\alpha S_\alpha \mu_{\alpha\gamma}$$

darstellen, in welcher die Grössen S_α die vorläufig unbekannten Spannungen in den überschüssigen Stäben des Systems bedeuten, k_γ und $\mu_{\alpha\gamma}$ gewisse von der geometrischen Gestalt des letzteren abhängige bekannte Grössen sind. Unter Benutzung dieser Ausdrücke zerfällt die Gleichung (1) in so viel Gleichungen, als die Grössen S_γ Glieder haben; namentlich erhält man jedem überschüssigen Stabe entsprechend eine Gleichung:

$$\sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \delta l_\beta = 0.$$

Die wirklichen Formänderungen sind nun so gering, dass man sie als unendlich klein betrachten und die entsprechenden Längenänderungen:

$$\alpha l_\beta \tau + \frac{S_\gamma l_\gamma}{E F_\gamma}$$

(τ Temperaturzuwachs, α Ausdehnungscoefficient, F_γ Querschnitt des Stabes, E Elasticitätsmodul)

für δl_γ setzen darf. Dadurch erhält man dann für die Spannungen S_α soviel Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind.

Die letzten Abschnitte der Abhandlung betreffen Clapeyron's Theorem, die Abhandlung von Maxwell „On the calculation of the equilibrium and the stiffness of frames" (Phil. Mag. 1869) und die Theoreme von Castigliano. F. K.

H. Müller-Breslau. Zur Theorie des Fachwerks.

Hannov. Zeitschr. XXXI. 418-430.

Trägt man die verticalen Verschiebungen der Knotenpunkte eines Trägergurtes als Ordinaten auf, so erhält man ein gewisses Polygon, welches „Verschiebungspolygon" genannt wird. Für drei aufeinanderfolgende Verschiebungen und die horizontalen

Projectionen zweier zwischen ihnen liegenden Gurtstäbe gilt eine Gleichung, deren Analogie mit Claypeyron's Gleichung für die Biegungsmomente eines horizontalen Balkens unverkennbar ist, so dass sich viele Eigenschaften und Constructionen des Momentenpolygons unmittelbar auf das Verschiebungspolygon übertragen lassen. Nachdem für verschiedene statisch bestimmte Träger das Verschiebungspolygon construirt ist, wird es im zweiten Abschnitt auch zum Studium des statisch unbestimmten Trägers benutzt; dabei gelangen gewisse Elasticitätsgleichungen zur Verwendung, welche, ähnlich wie es von Seiten des Herrn Mohr geschieht, aus dem Princip der virtuellen Verrückungen abgeleitet werden. F. K.

H. Müller-Breslau. Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern. Wien. Allg. Bauztg. L. 85-89, 97-101.

Es handelt sich um die sogenannten Secundärspannungen, d. h. um diejenigen Biegungsspannungen, welche durch feste Vernietungen der Knotenpunkte in Fachwerkträgern entstehen.

Es bedeuten, centrische Knotenpunkte vorausgesetzt, s_m und s_{m+1} die Längen der dem m^{ten} Knotenpunkte benachbarten Gurtstäbe, J_m und J_{m+1} die Trägheitsmomente der Querschnitte dieser Stäbe bezogen auf die Schweraxe senkrecht zur Ebene des Fachwerkes, ϑ_m den Randwinkel bei m, M_m das bei m hervorgerufene, die Gurtstäbe beanspruchende Biegungsmoment J_c ein beliebiges Trägheitsmoment und endlich sei $l_m = \frac{J_c}{J_m} s_m$; dann gilt die Gleichung:

$$M_{m-1} l_m + 2M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = 6 J_c E \Delta(\vartheta_m),$$

welche der Form nach mit Clapeyron's Gleichung übereinstimmt. Das legt die Auffassung nahe, an Stelle der polygonalen Fachwerkgurtung einen ursprünglich geraden continuirlichen Balken constanten Querschnitts zu betrachten, dessen Felder die Länge l haben, und dessen Momentenpolygon durch die Ordinaten M_{m-1}, M_m, M_{m+1} gegeben ist. Das sogenannte „Normalglied“ $N_m = 6 J_c E \Delta(\vartheta_m)$, welches sich, wie § 2 zeigt, durch die Span-

nungen in den einzelnen Stäben ausdrücken lässt und daher bekannt ist, vertritt gewissermassen das von der Belastung und den Stützensenkungen abhängige Glied der Clapeyron'schen Gleichung. Von dem so gewonnenen Standpunkt aus wird nun die graphische Construction der Knotenpunktsmomente entwickelt. Auch für excentrische Knotenpunkte wird ein Verfahren angegeben. Zum Schluss wird der Einfluss der Biegung der Gurtungsform durch die Spannkraft S und das Eigengewicht untersucht. Die allgemeinen Entwickelungen werden durch specielle Zahlenbeispiele erläutert. F. K.

Th. Landsberg. Beitrag zur Theorie der Fachwerke. Hannov. Zeitschr. XXXI. 361-372.

Der Artikel ist der Untersuchung des Einflusses der festen Knotenpunktsverbindungen gewidmet. Nachdem im Abschnitt I. dieser Einfluss im allgemeinen geschildert ist, wird im Abschnitt II. die Grundgleichung für denselben aufgestellt, während der Abschnitt III. der graphischen Bestimmung der Knotenpunktsmomente gewidmet ist. Im Abschnitt IV. wird ein Beispiel behandelt. F. K.

Th. Landsberg. Ebene Fachwerke mit festen Knotenpunkten und das Princip der Deformationsarbeit. Centralbl. der Bauverw. V. 165-168.

Es handelt sich um Stabsysteme, welche unter Voraussetzung drehbarer Stabenden statisch bestimmt wären, d. h. solche, bei denen zwischen der Zahl der Knotenpunkte r und der Stäbe n die Relation

$$n = 2r-3$$

besteht. Für jeden Stab sind dann drei Unbekannte vorhanden, nämlich die Spannung S und die Werte, welche das Biegungsmoment in seinen Endpunkten annimmt. Die Statik liefert für diese $6r-9$ Unbekannten entsprechend den r Knotenpunkten $3r$ Gleichungen, von denen jedoch 3 in Folge der allgemeinen

Barkhausen. Auftragung von Einflusslinien für Bogen.
Hannov. Zeitschr. XXXI. 159-176.

Die sogenannten Influenzlinien sind bekanntlich für die Theorie der Stabsysteme insofern von besonderer Wichtigkeit, als sie besonders geeignet zur Erledigung der Frage nach der ungünstigsten Beanspruchung sind.

Der Herr Verfasser beabsichtigt, indem er ein von ihm bei der Construction von Bogen benutztes Verfahren mitteilt, welches auf den Principien von Mohr (Hannov. Zeitschrift 1870, S. 380 u. 1874 S. 323) und Müller-Breslau (Theorie der Bogenbrücken) beruht, weniger die Theorie zu bereichern, als seinen Facngenossen Fingerzeige für die praktische Ausführung zu geben. Es werden nach einander behandelt I. das Bogenfachwerk mit zwei oder drei Gelenken. II. der unversteifte Bogen, und zwar

A) der gegliederte Bogen, zunächst der Parabelsichelbogen und dann der gegliederte Bogen beliebiger Gurtungsform,

B) der vollwandige Blechbogen. F. K.

M. Westphal. Durchbiegung einer ebenen beliebig gekrümmten Feder. Z. dtsch. Ing. XXIX. 726.

Als Mass der Verlängerung resp Verkürzung einer gekrümmten Feder constanten Querschnittes, welche durch eine an den Enden wirkende Zug- oder Druckkraft beeinflusst wird, ergiebt sich

$$\delta = \frac{P}{EJ} T,$$

und zwar ist P die ziehende Kraft, E der Elasticitätsmodul, J das Trägheitsmoment des Federquerschnittes und endlich T das über die Länge der Feder erstreckte Integral $\int x^2 ds$, wo x den Abstand des Elementes ds von der Kraftrichtung bezeichnet.

F. K.

M. Koenen. Der auf Wirbeldrehung beanspruchte Ring.
Centralbl. d. Bauverw. V 370-371.

Es werden die Deformationen und elastischen Kräfte bestimmt, welche in einem Kreisringe beliebigen Querschnittes durch äussere der Länge des Ringes nach gleichmässig verteilte Kräfte, die unter einander im Gleichgewicht sind, hervorgerufen werden.

Die entwickelten Formeln werden auf ein der Praxis entnommenes Beispiel angewandt. F. K.

J. Hofmann. Berechnung des zweigelenkigen Bogens. Centralbl. d. Bauverw. V. 463-464.

Die Kämpferreactionen, welche eine auf einen zweigelenkigen Bogen wirkende verticale Kraft hervorruft, schneiden die Kraftrichtung in einem bestimmten Punkte. Kennt man nun die Curve, welche der letztgenannte Punkt beschreibt, während der Angriffspunkt der Kraft den Bogen durchläuft, so kann man für jede Stellung der Last die Kämpferreactionen bestimmen. Da nun für Zwecke der Praxis die Annahme hinreicht, dass die Curve ein Parabel- oder Kreisbogen ist, welcher zur Symmetrielinie des Bogens selbst symmetrisch liegt, so genügt es für die Bestimmung der fraglichen Curve, diejenigen Punkte aufzusuchen, welche der Bogenmitte und den Kämpfern entsprechen; das geschieht in der vorliegenden Abhandlung. Beispiele werden zur Erläuterung ausgeführt. F. K.

E. Bagge. Ueber die Berechnung von Kettenhaken. Z. dtsch. Ing. 11-13.

Ph. Bredt. Berechnung der Kettenhaken. Z. dtsch. Ing XXIX. 283-285.

Aus der Biegungstheorie gekrümmter Stäbe werden in beiden Abhandlungen Regeln über die günstigste Form der Kettenhaken abgeleitet. F. K.

Hüppner. Zur Ermittelung der Druckverteilung Mauerquerschnitten. Civiling. (2) XXXI 39-50.

Geht die Resultante der auf einen Mauerquerschnitt wirkenden Kräfte nicht durch den Centralkern, so macht die Bestimmung der Druckverteilung Schwierigkeiten, wenn man voraussetzt, dass Mauerwerk keine Zugspannung auszuhalten vermag. Hier wird die Druckverteilung für symmetrische Querschnitte auf Grund eines von Mohr für rechteckige Querschnitte gegebenen graphischen Verfahrens (Hannov. Zeitschr. 1883. p. 163) ermittelt. F. K.

E. Rivals. Des effets du tir des pièces rayées sur le matériel. Toul. Mém. (8) VII. 341-352.

In dieser Arbeit soll Poisson's bezügliche Abhandlung ergänzt werden, indem 1) die zur Zeit Poisson's unbekannten gezogenen Geschütze in Betracht gezogen werden und 2) die vollständige Bewegung der Laffette nach der Abfeuerung des Geschützes untersucht wird. Ein dritter Mangel der Poisson'schen Arbeit für die Jetztzeit kann nach der Ansicht des Verfassers noch nicht beseitigt werden; es bleibt der Zukunft vorbehalten, die zerstörenden Wirkungen zu berechnen, welche auf die Laffette, die Rahmen und den Geschützdamm durch die ausgeübten Drucke oder verlorenen Kräfte ausgeübt werden, obgleich im Jahre 1881 in der Revue d'Artillerie ein bezüglicher Versuch veröffentlicht ist. In dem vorliegenden Anfang der Arbeit beschäftigt sich der Verfasser nur mit diesem Versuch, indem er sich bemüht nachzuweisen, dass jene Darlegungen keine Beweiskraft haben, die dort gefundenen Grössen für die zerstörende Wirkung zu gross seien. Rs.

H. Léauté. Théorie du frein à lame. J. de l'Éc. Pol. Cah. LIV. 117-136.

Der Inhalt dieser Arbeit ist durch den Verfasser in zwei Noten der C. R. 1884 auszugsweise veröffentlicht worden, worüber in F. d. M. XVI. 1884. S. 878-880 berichtet ist. Die dort gegebenen Referate machen eine abermalige Inhaltsangabe überflüssig.

Lp.

F. Grashof. Ueber die Formen des zu technischen Arbeitszwecken verwendeten natürlichen Arbeitsvermögens. Z. dtsch. Ing. XXIX. 161.

Allgemeine Betrachtungen in der durch den Titel angegebenen Richtung von vorwiegend technischem Interesse. Genauere Inhaltsangabe würde uns hier zu weit führen. F. K.

C. Capillarität.

V. A. Julius. Bydrage tot de theorie der capillaire verschijnselen. Amst. Verh. XXIV. 63 Seiten.

Beitrag zur Theorie der Capillarität, von dem Standpunkt der gegenwärtigen molecularen Theorie aus betrachtet. Hauptsächlich wird die Frage behandelt, in wie fern die durch Laplace und Gauss erhaltenen Ergebnisse richtig bleiben, wenn man an der Grenze zweier Körper nicht eine scharfe Trennung annimmt, sondern einen wirklichen Uebergang. Die Behandlung derselben geschieht durch Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in Verbindung mit dem Princip von Hamilton und des zweiten Satzes der mechanischen Wärmetheorie. Durch Lord Rayleigh (Phil. Mag. 1883) war eine solche Untersuchung unternommen und die Behauptung aufgestellt, dass bei genügend regelmässigem Uebergang die capillaren Kräfte sehr klein werden. Der Verfasser beleuchtet diese Ansicht; seine Berechnung lehrt, dass alles von dem Verhältnis der Dicke der Grenzschicht zu dem Radius der Wirkungssphäre abhängt. Während, wenn beide Grössen von gleicher Ordnung sind, capillare Kräfte, wie sie Laplace fand, bestehen bleiben, werden diese Kräfte sehr klein, wenn die erste der obengenannten Grössen viel grösser als die zweite wird. Dem steht entgegen, dass die erste vom Verfasser angewandte Methode von Gauss gerade in diesem Falle zu einer sehr grossen Capillaritäts-Constante fl
So gelangt er zu einer Vergleichung der Resultat

Betrachtungsweisen und weiter zu dem Schluss, dass in dem stationären Zustand, der von selbst auftritt, die Dichtigkeit der Grenzlage von derselben Ordnung sein muss, wie der Radius der Wirkungssphäre.

In einer Nachschrift wird der Fall von zwei Stoffen behandelt, welche in einander diffundiren. Da hier kein stationärer Zustand eingetreten ist, kann die Uebergangsschicht sehr dick werden; die Berechnungsweise von Laplace (die einzige, die man alsdann anwenden kann) führt zu kleinen Capillarkräften.

Die langen Rechnungen sind mit grosser Genauigkeit ausgeführt, so dass diese Abhandlung nicht nur einen Beitrag zur Theorie, sondern auch eine vortreffliche Uebersicht über den gegenwärtigen Zustand der wichtigen Aufgabe liefert.

G.

A. Chervet. Sur les constantes capillaires des solutions salines. C. R. CI. 235-238.

Eine Flüssigkeit benetze eine cylindrische Glasröhre vom Radius r vollständig und werde in der Röhre um die Höhe h gehoben. Ferner sei ϱ die Dicke, λ der moleculare Wirkungsradius, $\varphi(x)$ eine Function, welche von der Natur der Flüssigkeit abhängt und welche für die Werte von x, die grösser als λ sind, verschwindet; dann hat man

$$a = rh = \varrho\int_0^{\lambda}\varphi(x)dx.$$

Das Product $F = a\varrho$ ist die Kraft der Adhäsion der Flüssigkeit auf sich selbst. Für eine zweite Flüssigkeit von der Dichte ϱ_1 erhält man

$$F_1 = a\varrho_1^2\int_0^{\lambda_1}\varphi_1(x)dx.$$

Wenn zwei Flüssigkeiten sich berühren, λ' die Grenzentfernung ist, bis zu welcher die Molecularwirkungen der einen Flüssigkeit auf die andre stattfinden, und $\varphi'(x)$ eine Function bedeutet, die von der Natur jeder der beiden Flüssigkeiten abhängt, ist

die Adhäsionskraft der beiden Flüssigkeiten auf einander

$$H = \varrho\varrho_1 \int_0^{\lambda'} \varphi'(x)dx.$$

Nach diesen Vorbemerkungen wird für die Adhäsion eines Gemisches von Flüssigkeiten die Formel gegeben

$$(1) \qquad F = v^2 F + 2vv_1 H + v_1^2 F_1,$$

wenn vorausgesetzt wird, dass die Functionen $\varphi, \varphi_1, \varphi'$ unabhängig von der Diffusion der Flüssigkeiten in einander sind.

Eine Salzlösung enthalte ein Gewicht p wasserfreien Salzes und $(1-p)$ Wasser, d sei die Dichte der Lösung und D die des Salzes. Der Verfasser nimmt die Adhäsionskraft des Wassers als Einheit an und setzt die des wasserfreien Salzes gleich k, die des Wassers zum Salze gleich H. Mit Benutzung der Formel (1) erhält er dann für die Capillaritätsconstante der Salzlösungen

$$a = d(1-\alpha p+\beta p^2),$$

indem zur Abkürzung gesetzt ist

$$\alpha = 2\left(1-\frac{H}{D}\right), \quad \beta = 1+\frac{k}{D^2}-\frac{2H}{D}.$$

Die dritte Betrachtung bezieht sich auf die Grenze der Löslichkeit bei einer gegebenen Temperatur. Zu einer Lösung wasserfreien Salzes in Wasser wird mehr wasserfreies Salz gegeben und so fort bis zur Sättigung. Die Dichte der gesättigten Lösung bei einer bestimmten Temperatur sei d_1, und p_1 sei das Verhältnis des Salzes in der gesättigten Lösung. Indem der Verfasser den Satz von Dupré benutzt: Die Diffusion findet statt, wenn die Vereinigungskraft zweier Flüssigkeiten zu einander das arithmetische Mittel ihrer bezüglichen Vereinigungskräfte überschreitet (Théorie mécanique de la chaleur p. 372), findet er für die Coefficienten α und β die folgende Bedingungsgleichung:

$$\alpha(D-d_1)(D-p_1 d_1) - \beta(D-p_1 d_1)^2 - (D-d_1)^2 = 0.$$

Experimente sollen diese aus der Theorie gefolgerten Sätze bestätigt haben. Rs.

P. Duhem. Applications de la thermody[namique aux] phénomènes capillaires. Ann. de l'Éc Norm[...]

Sobald man annimmt, dass die Flüssigkeiten in der Nähe ihrer Oberflächen Aenderungen erleiden, kann man nicht mehr mit Hülfe der gewöhnlichen Mechanik das Problem der Capillarität behandeln, sondern muss es mit Hülfe der Principien der Thermodynamik thun. Indem dies geschieht, wird die Hypothese der molecularen Attraction aus diesem Teile der Physik entfernt.

Auf das System wirke der normale über die Oberfläche gleichmässig verteilte Druck, dessen Wert für die Flächeneinheit P sei. Wenn das System in allen Punkten dieselbe absolute Temperatur T hat, existirt für dasselbe ein thermodynamisches Potential, welches, wenn U die innere Energie, S die Entropie, V das Gesamtvolumen des Systems, E das mechanische Aequivalent der Wärme ist, durch die Gleichung bestimmt wird

$$\Phi = E(U - TS) + PV.$$

Das Potential wird berechnet. Die allgemeine Bedingung für das Gleichgewicht des Systems kann durch die eine Hypothese erhalten werden: Wenn die verschiedenen Körper, aus welchen das System besteht, Aenderungen der Dichte und des Zustandes in der Nähe der Oberfläche erfahren, erfolgen diese Aenderungen nur in einer Schicht, deren Dicke λ einen unmerklichen Wert hat. Die ausserordentliche Kleinheit von λ gestattet die Berechnung oft zu vereinfachen, wofür gleich ein Beispiel gegeben wird. Dabei ergiebt sich, dass das thermodynamische Potential des Systems aus zwei Teilen besteht. Der eine Teil ist eine lineare und homogene Function der Massen der verschiedenen Körper, welche das System bilden, der andre ist eine lineare und homogene Function der Oberflächen, welche die verschiedenen Körper des Systems begrenzen.

Es wird angenommen, dass ausser dem normalen und constanten Druck auch noch die Schwere wirke, jedoch die durch dieselbe erzeugten störenden Einflüsse, vermöge welcher die Dichte der Flüssigkeit variabel und der äussere Druck nicht mehr gleichmässig sein wird, vernachlässigt werden.

Um die Wärme zu bestimmen, welche bei einer Veränderung des Systems entsteht, sei der Zustand des Systems durch die absolute Temperatur T und durch eine gewisse Anzahl anderer

Parameter $a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_n$ bestimmt. Die Bedingung für das Gleichgewicht des Systems ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_p} = 0, \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

Das System erleide unter dem Drucke P eine Aenderung, wobei die Temperatur um dT, die Parameter um $da_1, da_2, \ldots, da_p, \ldots, da_n$ variiren; das System entwickelt dabei die Wärmemenge

$$dQ = \frac{1}{E} T d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right).$$

Der Verfasser wendet diese Gleichung auf die schon vorher betrachteten Systeme sich berührender Flüssigkeiten an. Dann folgt die Anwendung auf die Theorie der Aenderung des Aggregatzustandes und zwar auf die Theorie der Verdampfung und die des Schmelzens. Bekannte Versuchsresultate werden theoretisch erläutert, beziehungsweise bisher noch vereinzelt darstehende Beobachtungen durch die Theorie in Zusammenhang gebracht.

Rs.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

F. Neumann. Vorlesungen über theoretische Optik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeb. von E. Dorn. Leipzig. B. G. Teubner. VIII u. 310 S. mit dem Bilde Neumann's.

Ueber die Bedeutung und den Wert der Neumann'schen Vorlesungen im allgemeinen hat sich Referent bereits vor zwei

Jahren in den Fortschritten ausgesprochen (F. d. M. XV. 1883. 758). Die hier vorliegenden Vorlesungen über Optik beginnen mit einer kurzen historischen Einleitung, besprechen dann die Hypothesen der Undulationstheorie und die zu benutzenden Principien der Mechanik, ferner die analytische Behandlung von Lichtstrahlen (Zusammensetzung und Zerlegung etc.). Es folgt die Entwickelung der Interferenz- und Beugungserscheinungen, letzterer in grosser Ausführlichkeit. Nachdem sodann die Erscheinungen der Polarisation besprochen sind, werden die Formeln für Reflexion und Brechung an isotropen Medien abgeleitet incl. derjenigen für totale Reflexion. Daran schliesst sich die Doppelbrechung in einaxigen Krystallen nebst dem Problem der Reflexion für dieselben, weiter die Doppelbrechung in optisch zweiaxigen Medien. Dabei wird für einaxige Medien die Gestalt der Wellenfläche als bekannt vorausgesetzt, für zweiaxige Medien aber nur die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebene, während die Gestalt der Fresnel'schen Wellenfläche abgeleitet wird. Hinsichtlich des Beweises der hier gemachten Voraussetzungen wird auf die Theorie der Elasticität verwiesen, wo die betreffenden Gesetze ihre Ableitung finden. Nachdem auf dieser Grundlage die Gesetze der Doppelbrechung (incl. der konischen Refraction) ausführlich entwickelt sind, folgt die Ableitung der durch Krystallplatten hervorgebrachten Farbencurven, endlich die Doppelbrechung im Quarz nebst den Farbenerscheinungen der Quarzplatten. Der Herr Herausgeber hat sich aller einschneidenden Aenderungen an dem Neumann'schen Texte enthalten und nur am Schluss verschiedene eigene Zusätze hinzugefügt; die wichtigsten derselben betreffen die Theorie der Diffractionserscheinungen, die Farben dicker Platten, den Jamin'schen und Babinet'schen Compensator, die Metallreflexion. Auf die neuere Literatur ist in einer grossen Zahl von Anmerkungen, die den betreffenden Textstellen beigefügt sind, hingewiesen.

Wn.

E. Verdet. Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von K. Exner. II. Bd. II. Abt. Braunschweig. Vieweg u. Sohn. 144 S.

Die vorliegende Abteilung von Band II. des Verdet'schen Werkes (über die erste Abteilung ist F. d. M. XVI. 1884. 892 berichtet) bespricht sehr ausführlich die circulare Doppelbrechung (Rotationspolarisation) in theoretischer und experimenteller Hinsicht und geht dann etwas genauer, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt, auf die accidentelle Doppelbrechung ein, wie sie z. B. bei isotropen Körpern durch einseitigen Druck entsteht. Dabei ist überall die neuste Literatur berücksichtigt, wie auch das Abhandlungsregister bis auf die neuste Zeit fortgesetzt ist. Wn.

E. Ketteler. Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Zugleich mit den experimentellen Belegen. Mit 44 Holzstichen und 4 lithographirten Tafeln. Braunschweig. Vieweg u. Sohn. XII. u. 652 S.

Herr Ketteler hat seit dem Jahre 1876 eine grössere Reihe von Arbeiten veröffentlicht, die zunächst eine Erklärung der anomalen Dispersion bezweckten, allmählich aber auf fast alle Teile der theoretischen Optik, mit Ausnahme der Beugungserscheinungen, ausgedehnt wurden. Die in diesen Arbeiten entwickelte Theorie wird in dem vorliegenden Buche, vervollständigt und systematisch geordnet, im Zusammenhange entwickelt; und damit glaubt Herr Ketteler die theoretische Optik auf neuer Grundlage aufgebaut zu haben. Referent kann dieser Ansicht nicht beipflichten, ist vielmehr der Meinung, dass gerade die Grundlage der neuen Theorie der Begründung völlig entbehrt. Zwar die Grundanschauung, wonach bei der Lichtbewegung eine Wechselwirkung zwischen den ponderabeln Molecülen und den Aetherteilchen stattfindet (diese Annahme wird als Sellmeier'sches Princip bezeichnet), wird allseitig als zutreffend anerkannt werden. Die weiteren Annahmen über die Art der Wechsel-

wirkung erscheinen dem Referenten nur zum Teil als annehmbar. Die Betrachtungen jedoch, mittels deren aus jenen Annahmen die Grundgleichungen abgeleitet werden, hält Referent für verfehlt. Er verweist in dieser Hinsicht auf die Bemerkungen, die er an die früheren Arbeiten des Herrn Ketteler geknüpft hat, namentlich F. d. M. XVI. 1884. 917, XV. 1883. 966 etc. Keine der Grundgleichungen der Theorie ist durch strenge Schlüsse aus den Principien der Mechanik abgeleitet, alle sind nichts als willkürliche Aufstellungen; und selbst manche der weiteren Operationen mit diesen Gleichungen sind mathematisch nicht stichhaltig. Nun muss allerdings anerkannt werden, dass es dem Verfasser gelungen ist, Gleichungen zu finden, aus denen manche bisher nicht erklärte Erscheinungen sich ableiten lassen; aber da jenen Gleichungen selbst die Begründung völlig fehlt, so kann man sie höchstens als empirische Formeln ansehen, ihre Aufstellung nicht als Theorie, sondern höchstens als Vorarbeiten für eine spätere Theorie bezeichnen. An eine wirkliche Theorie sind hinsichtlich der Strenge der Begründung viel höhere Anforderungen zu stellen.

Die geäusserten Bedenken beziehen sich selbstverständlich nur auf den theoretischen Teil des Buches, der experimentelle Teil, welcher das letzte Drittel des Werks umfasst, fällt nicht in den Kreis des Jahrbuchs. Wn.

P. G. Tait. On radiation. Edinb. Proc. XII. 531-533.

Auszug aus einer Abhandlung für die Transactions.

Cly.

Gouy. Sur la théorie des miroirs tournants. C. R. CI. [illegible], Exner [illegible] XXI. 816-819.

Homogene L[illegible]ungen, die von einer sich bewegenden [illegible] aus[illegible]en mit anderer Schwingungsdauer [illegible] als wenn die Lichtquelle fest [illegible]ungsperiode wird durch das

Doppler'sche Princip gegeben. Herr Gouy nimmt nun an, mit dieser Aenderung der Schwingungsdauer sei auch eine Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verbunden, und daraus folgert er, dass die Wellenfläche derartiger Wellen noch die Kugelform hat, nur dass die verschiedenen Zeitepochen entsprechenden Kugeln nicht mehr concentrisch, sondern excentrisch sind. Dies Resultat ist übrigens, was Herr Gouy nicht erwähnt, keine strenge Folgerung der vorhergehenden Prämissen, sondern nur angenähert richtig. Endlich wird gezeigt, dass die daraus hervorgehende Erscheinung dieselbe ist, als geschehe die Fortpflanzung in concentrischen Kugeln, nur mit veränderlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit; und es ergiebt sich für die geänderte Fortpflanzungsgeschwindigkeit dasselbe Gesetz, das Herr Gouy in einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. XII. 1880. 749, XIV. 1882. 848) abgeleitet hat.

Aus diesen, nach Ansicht des Referenten nicht ganz einwandfreien Betrachtungen folgt, dass man bei Messung der Lichtgeschwindigkeit mittels eines rotirenden Spiegels (Foucault's Experiment) nicht die wahre, sondern die modificirte Lichtgeschwindigkeit misst. Wn.

S. v. Kowalevski. Ueber die Brechung des Lichtes in krystallinischen Mitteln. Acta Math. VI. 249-304.

In der vorliegenden Arbeit wird zum ersten Male die allgemeine Lösung desjenigen Systems partieller Differentialgleichungen aufgestellt, von denen die Lichtschwingungen in einem homogenen krystallinischen Medium abhängen. Die Grundlage der Untersuchung bildet folgende von Herrn Weierstrass herrührende, bisher noch nicht veröffentlichte Integrationsmethode.

Der Anfangspunkt O der rechtwinkligen Coordinaten u, v, w sei von einer Schar ähnlicher Flächen σ_t umgeben mit O als Aehnlichkeitspunkt. Der variable Parameter t ist gleich dem Abstandsverhältnis $OP:OP_1$, wenn P der Punkt ist, in welchem σ_t, P_1 der Punkt, in welchem die Grundfläche S der Schar vom Radius OP getroffen ird; jede der Flächen σ_t umschliesse den Punkt O ganz und werde

von jedem von O ausgehenden Radius nur in einem Punkte getroffen. Es werde ferner das über den Raum zwischen den Flächen σ_{t_0} und σ_t erstreckte dreifache Integral

$$\iiint F(u, v, w)\,du\,dv\,dw = \int\limits_{(t_0 \ldots t)} F(u, v, w)\,d\omega$$

gesetzt. Dann bestehen, falls F eine überall mit Ausnahme der Nähe des Punktes O stetige Function bezeichnet, die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} F(u, v, w)\,d\omega = \int \dfrac{F(u, v, w)\,d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}, \\ D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} D_u F(u, v, w)\,d\omega = D_t \int \dfrac{u' F(u, v, w)\,d\sigma_t}{\sqrt{u'u' + v'v' + w'w'}}, \\ D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} D_u F(u, v, w)\,d\omega = D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} u' F(u, v, w)\,d\omega. \end{cases}$$

Darin ist $u' = \dfrac{\partial t}{\partial u}$, $v' = \dfrac{\partial t}{\partial v}$, $w' = \dfrac{\partial t}{\partial w}$; ferner ist $d\sigma_t$ ein Oberflächenelement der Fläche σ_t, endlich bezeichnet D_t die partielle Differentiation nach t etc.

Setzt man ferner

$$(2)\qquad F(x, y, z, t) = D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} \varphi(u, v, w)\, f(x + u, y + v, z + w)\,d\omega,$$

und ist f überall stetig, φ und F überall mit Ausnahme der Nähe des Punktes O, so folgt aus den Formeln (1), dass F einer Gleichung von der Form genügt:

$$(3)\qquad \begin{cases} A \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + C \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ + 2A' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + 2B' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + 2C' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ = D_t^3 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} P.f(x + u, y + v, z + w)\,d\omega \\ - D_t^2 \int\limits_{(t_0 \ldots t)} Q.f(x + u, y + v, z + w)\,d\omega \\ + D_t \int\limits_{(t_0 \ldots t)} R.f(x + u, y + v, z + w)\,d\omega, \end{cases}$$

wo die P, Q, R gewisse Functionen von φ, u', v', w' und ihren Ableitungen nach u, v, w, dagegen die Factoren $A, B, C, \ldots$ constant sind.

Durch zweckmässige Wahl der Function φ und der Flächen σ ergiebt sich aus (3) eine Lösung der Gleichung

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \\ &\quad + 2A'\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} + 2C'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}, \end{aligned}\right.$$

unter der Voraussetzung, dass die Fläche zweiten Grades, welche $A, B, C, \ldots$ zu Coefficienten hat, ein Ellipsoid ist. Die bei der Lösung von (4) auftretenden Flächen σ werden ähnliche Ellipsoide, deren Gleichung ist:

$$\begin{aligned} \vartheta^2 = {} & \frac{BC - A'A'}{G}u^2 + \frac{CA - B'B'}{G}v^2 + \frac{AB - C'C'}{G}w^2 \\ & + 2\frac{B'C' - AA'}{G}vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G}wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G}uv. \end{aligned}$$

Dabei ist ϑ der variable Parameter und

$$G = \begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix}.$$

Ausserdem ist $\varphi = \frac{1}{\vartheta}$ zu setzen, damit Gleichung (3) in (4) übergeht. So ergiebt sich aus (2) eine Lösung von (4), aus der man das allgemeine Integral leicht ableiten kann. Es ist das folgende:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \psi = {} & \frac{1}{2\varpi} D_t^2 \iiint\limits_{(\vartheta^2 < 1)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)}\, du\, dv\, dw \\ & + \frac{1}{2\varpi} D_t \iiint\limits_{(\vartheta^2 < 1)} \frac{f_1(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)}\, du\, dv\, dw. \end{aligned}\right.$$

Hier ist die Integration über das Innere des Ellipsoids $\vartheta = 1$ zu erstrecken; ferner ist $f(x, y, z)$ der Wert von ψ, $f_1(x, y, z)$ der Wert von $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ für $t = 0$. Endlich ist:

$$\varpi = \iiint\limits_{\vartheta = 1} \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u, v, w)} = 2\pi\sqrt{G}.$$

Auf die Integration der Gleichung (4) lässt sich, wie weiter gezeigt wird, die Integration der Elasticitätsgleichungen für isotrope Medien zurückführen.

Die vorstehende Methode benutzt Frau v. Kowalevski zur Integration der Gleichungen für die Lichtschwingungen in krystallinischen Medien. Die erste derselben lautet:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}{\partial y} - b^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)}{\partial z},$$

während die beiden andern aus dieser durch cyklische Vertauschung von x, y, z, resp. ξ, η, ζ und gleichzeitig von a, b, c hervorgehen. Dazu kommt die mit den Gleichungen (6) vereinbare Bedingung für die Incompressibilität des Aethers. Zur Integration jener Gleichungen wird gesetzt

$$(7) \qquad \xi = D_t \int \varphi_1(u, v, w)\, f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega,$$

und entsprechend sind die Ausdrücke für η und ζ. Die Integration soll auf alle Punkte des Raumes erstreckt werden, die innerhalb der geschlossenen Fläche $\vartheta(u, v, w) = t$ liegen. Es handelt sich darum, die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (die beiden letzteren treten in η resp. ζ an Stelle von φ_1) sowie auch ϑ so zu bestimmen, dass die Ausdrücke (7) den Gleichungen (6) genügen, während f willkürlich bleibt. Die Einsetzung von (7) in (6) giebt unter Anwendung der Formeln (1), dass den Gleichungen (6) genügt wird, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die partiellen Ableitungen einer Function φ nach u, v, w sind, und wenn zwischen ϑ, φ und einer neuen Function ψ sechs Gleichungen bestehen, von denen die beiden ersten sind:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \vartheta}{\partial w} - \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \vartheta}{\partial v} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \vartheta}{\partial w} - \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \vartheta}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned} \right.$$

während die übrigen aus diesen durch cyklische Vertauschung von u, v, w und gleichzeitig von a, b, c folgen. Aus diesen Gleichungen lässt sich eine Gleichung für ϑ allein ableiten; dieselbe stimmt überein mit derjenigen, welche bereits Lamé (Théorie de l'élasticité § 119) für den Parameter der Fresnel'schen Wellenfläche aufgestellt hat. Die Flächen $\vartheta = t$ sind also hier die Wellenflächen

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{u^2}{u^2+v^2+w^2-a^2t^2} + \dfrac{v^2}{u^2+v^2+w^2-b^2t^2} \\ \qquad + \dfrac{w^2}{u^2+v^2+w^2-c^2t^2} = 1. \end{cases}$$

Da die Formeln von Weierstrass nur einfache geschlossene Flächen voraussetzen, so sind die beiden Schalen der Wellenfläche zu trennen. Dies geschieht mittels einer Darstellung der Punkte der Wellenfläche durch Hülfsvariable, auf die zuerst Herr H. Weber aufmerksam gemacht hat. Man setze

$$(10)\quad \begin{cases} u = t.b \operatorname{sn} u_1 \operatorname{Dn} u_2, \\ v = t.a \operatorname{cn} u_1 \operatorname{Cn} u_2, \\ w = t.a \operatorname{dn} u_1 \operatorname{Sn} u_2, \end{cases}$$

wo sn, cn, dn elliptische Functionen mit dem Modul $\varkappa^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$, dagegen Sn, Cn, Dn elliptische Functionen mit dem Modul $\lambda^2 = \dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$ sind. Durch Elimination von u_1 und u_2 aus (10) folgt (9). Die durch (10) bestimmten Punkte u, v, w liegen also sämtlich auf der Wellenfläche mit dem Parameter t, und zwar liegen sie auf der äusseren Schale, wenn u_1 und u_2 reell sind und u_1 zwischen $-K$ und $+K$, u_2 zwischen $-2L$ und $+2L$ variirt. Dagegen gehören die Punkte der inneren Schale an, wenn u_1 zwischen $K-iK_1$ und $K+iK_1$ und zugleich u_2 zwischen $L-i2L_1$ und $L+i2L_1$ variirt, wobei nur die imaginären Bestandteile von u_1 und u_2 sich ändern. K und K_1 sind die vollen elliptischen Integrale für den Modul $\varkappa$, L und L_1 die für den Modul λ. Durch Einführung der Variabeln u_1 und u_2 wird nicht nur die Trennung der beiden Schalen der Wellenfläche erreicht, sondern

mit ihrer Hülfe gelingt es auch, die Gleichungen (8) zu integriren. Diesen Gleichungen wird genügt durch $\varphi = u_2$, $\psi = -bu_1$, so dass die Integrale (7) der Gleichungen (6) nunmehr sind:

$$(11)\qquad \xi = D_t \int_{(t)} \frac{\partial u_2}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \text{ etc.,}$$

wobei die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist, der von dem äussern resp. innern Mantel der Wellenfläche mit dem Parameter t begrenzt ist. Das Resultat bedarf insofern einer Einschränkung, als zu prüfen ist, unter welchen Bedingungen die bei der Ableitung benutzte partielle Differentiation in Bezug auf x, y, z unter dem Integralzeichen vorgenommen werden kann. Es lässt sich aber zeigen, dass die besagte Differentiation gestattet ist, wenn die willkürliche Function f 1) in dem betrachteten Raume überall eindeutig, endlich und stetig ist, 2) Ableitungen nach x, y, z besitzt, die in demselben Raum überall endlich sind. Uebrigens lassen sich die dreifachen Integrale, durch die ξ, η, ζ ausgedrückt sind, mit Hülfe der ersten der Gleichungen (1) leicht in Integrale über die Oberfläche einer der beiden Schalen der Wellenfläche verwandeln.

Um zu ermitteln, welche Werte die obigen Ausdrücke (11) für $t = 0$ annehmen, werden dieselben noch auf eine andere Form gebracht. Diese ist, falls man nur die äussere Schale der Wellenfläche ins Auge fasst, folgende:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi = t \int_{-K}^{+K}\int_{-2L}^{+2L} \Big[V_3 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial y} \\ - V_2 \frac{\partial f(x+u, y+v, z+w)}{\partial z} \Big] du_1\, du_2 \\ \text{etc.,} \end{aligned}\right.$$

wobei

$$V_2 = \frac{\partial u_1}{\partial w} V, \quad V_3 = \frac{\partial u_1}{\partial v} V,$$

$$V = 1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 u_1 - \lambda^2 \operatorname{Sn}^2 u_2 - (1 - \varkappa^2 - \lambda^2) \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{Sn}^2 u_2$$

ist. Hieraus folgt, dass ξ, η, ζ für $t = 0$ verschwinden, während ihre Differential[illegible]en nach t resp. [illegible]

$$0, \quad \frac{4\pi}{b}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}, \quad -\frac{4\pi}{b}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$$

werden. Geht man ferner von den Formeln aus, die (12) analog sind, aber sich auf die innere Schale der Wellenfläche beziehen und statt der willkürlichen Function f die willkürliche Function F enthalten, so wird für $t=0$ ebenfalls $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$; ihre Differentialquotienten nach t aber werden resp.

$$-\frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}, \quad \frac{4\pi}{b}\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}, \quad 0.$$

Durch Combination beider Lösungen erhält man die allgemeinste Lösung der Gleichungen (6), bei denen ξ, η, ζ ungerade Functionen von t sind, und die zugleich den Bedingungen der Incompressibilität genügen. Nimmt man von diesen Ausdrücken die ersten Ableitungen nach t, so kommt man zu einem System von Integralen, das für $t=0$ nicht verschwindet. Die Combination des letzteren Systems mit dem vorhergehenden endlich giebt die gesuchte allgemeine Lösung.

Zum Schluss wird noch kurz gezeigt, wie man auch zu denjenigen Lösungen von (6) gelangen kann, bei denen die räumliche Dilatation nicht verschwindet. Wn.

D.-S. Stroumbo. Expériences sur la double réfraction.

C. R. CI. 505-506.

Um die Doppelbrechung, welche das Licht in einer planparallelen Krystallplatte erfährt, sichtbar zu machen, lässt der Verfasser Lichtstrahlen so auf die Platte fallen, dass sie den Mantel eines geraden Kegels bilden, dessen Spitze in der Oberfläche der Platte liegt. Es geschieht das dadurch, dass das einfallende Bündel paralleler Strahlen auf die Mantelfläche eines abgestumpften geraden Kegels fällt und die an der Kegelfläche reflectirten Strahlen durch eine kleine Oeffnung im Mittelpunkte der kleineren Grundfläche des Kegelstumpfs hindurch die Krystallplatte treffen. Die gebrochenen Strahlen innerhalb der Platte bilden dann zwei Kegelflächen mit derselben Spitze; und die Durch-

schnitte dieser Kegel mit der gegenüberliegenden Plattenfläche werden durch Projection auf eine Tafel sichtbar gemacht.

Wn

D. W. B. BRACE. Ueber die magnetische Drehung der Polarisationsebene und einige besondere Fälle der Refraction. Wiedemann Ann. (2) XXVI. 576-607.

Von mathematischem Interesse sind in der wesentlich experimentellen Arbeit zwei Abschnitte, die Folgendes besprechen.

Fällt Licht aus einem isotropen auf ein doppeltbrechendes Medium, so erzeugt jeder einfallende Strahl zwei gebrochene Wellen, daher auch zwei gebrochene Strahlen. Bei gewissen Lagen der brechenden Ebene und gewissen Einfallswinkeln können die beiden gebrochenen Wellen so liegen, dass ihre Strahlen zusammenfallen. Die Bedingungen dafür werden für einaxige Krystalle in wenig durchsichtiger Darstellung entwickelt; für zweiaxige Krystalle werden nur die Grundzüge der Entwickelung angedeutet, diese selbst aber nicht durchgeführt. Dabei wird die Gleichung der Enveloppe der Schnittlinien je zweier zu demselben Strahl gehörigen Wellenebenen für einaxige Krystalle aufgestellt und discutirt.

Ausserdem wird, ohne Zusammenhang mit dem Vorstehenden, die Aenderung discutirt, welche die Ablenkung eines gebrochenen Strahls bei Aenderung des Einfallswinkels und bei Aenderung des Brechungs[illegible]ponenten erfährt, desgleichen die Aender[illegible] der Intensitä[illegible] [illegible]brochenen und reflectirten Lichtes bei A[illegible] des B[illegible]onenten. Dabei werden, ohne we[illegible] [illegible] und Brechungsexponent als von [illegible]

Wn

A. [illegible] [illegible]nda ottenuti [illegible]alla [illegible] fenomeno [illegible] batt[illegible] [illegible]

Um eine Interferenzerscheinung der Lichtstrahlen zu erhalten, die den Schwebungen bei Tönen analog ist, müsste man Lichtstrahlen von verschiedener Schwingungsdauer zur Interferenz bringen. Strahlen, die von verschiedenen Stellen desselben Spectrums ausgegangen sind, interferiren aber nicht. Der Verfasser sucht daher seinen Zweck dadurch zu erreichen, dass er Licht, das geradlinig, circular oder elliptisch polarisirt ist, durch eine schnell rotirende doppeltbrechende Krystallplatte hindurchgehen lässt. Der senkrechte Durchgang des Lichts durch eine solche Platte wird in bekannter Art verfolgt; nur wird angenommen, dass der Winkel α, welchen der Hauptschnitt der Krystallplatte mit einer im Raum festen Ebene bildet, nach dem Gesetz $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n t$ sich ändert, wo t die Zeit, α_0 und n Constante sind. Dadurch ergeben sich folgende Resultate: 1) Natürliches Licht von der Schwingungszahl N falle zuerst auf einen Nikol, dann auf eine doppeltbrechende Platte, deren Schwingungsrichtungen unter 45° gegen die des Nikols geneigt sind. Die Dicke der Platte sei so gewählt, dass der ordentliche Strahl gegen den ausserordentlichen um $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer verzögert wird. Rotiren dann Platte und Nikol gemeinsam, so tritt aus der Platte ein circular polarisirter Strahl aus mit der Schwingungszahl $N+n$ oder $N-n$, je nach dem Sinne der Rotation. 2) Geht circular polarisirtes Licht von der Schwingungszahl N durch dasselbe System, so tritt ein circular polarisirter Strahl von der Schwingungszahl $N+2n$ resp. $N-2n$ aus. 3) Fällt ein circularer Strahl auf eine rotirende doppeltbrechende Platte von solcher Dicke, dass die beiden durch die Platte gehenden Strahlen eine relative Verzögerung von einer halben Schwingungsdauer erfahren, so tritt ein circularer Strahl aus von der Schwingungsdauer $N+2n$ oder $N-2n$, je nach dem Sinne der Rotation. An die Resultate werden Vorschläge zu Experimenten geknüpft.

In einem Anhang wird untersucht, an welcher Stelle das [illegible] leuchtenden Punktes erscheint, den man durch ein [illegible] Quarzparallelepipedon betrachtet. Dabei werden nur [illegible]sichtigt, die nahezu senkrecht in das Parallel-

epipedon eintreten; und für die Brechung an der Diagonalfläche wird die Ablenkung der gebrochenen Strahlen von den einfallenden als sehr klein angenommen. Wn.

H. Pitsch. Ueber die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle. Wien. Ber. XCI. 527-552.

Für die von Lommel eingeführte Isogyrenfläche (cf. F. d. M. XV. 1883. 920) wird hier folgende Definition gegeben: Die Isogyrenfläche ist der geometrische Ort aller Wellennormalen, für welche wenigstens eine der zugehörigen Schwingungsrichtungen zu einer gegebenen Richtung senkrecht steht. Von dieser Definition, die aus der Lommel'schen folgt, gelangt man etwas einfacher zu der Gleichung jener Fläche, als Lommel; zugleich liegt darin eine neue physikalische Eigenschaft der Fläche.

Weiter wird die Isogyrenfläche, die im allgemeinen eine Kegelfläche dritter Ordnung ist, einer eingehenden Discussion unterworfen, die zu folgenden Resultaten führt. Zunächst ergiebt sich, dass die Schwingungsebenen, deren Wellennormalen die Isogyrenfläche bilden, einen Kegel zweiter Ordnung K, berühren. Der Schnitt desselben mit einer zu der gegebenen Richtung senkrechten Ebene ist eine Parabel, deren Lage mittels trimetrischer Coordinaten bestimmt wird. Mit Hülfe dieses Kegels lässt sich die Isogyrenfläche selbst leicht construiren. Legt man nämlich an den Kegel K, eine beliebige Tangentialebene τ, ferner durch die Spitze des Kegels und die gegebene Richtung eine zu τ senkrechte Ebene ε, so ist die Schnittlinie von τ und ε eine Erzeugende der Isogyrenfläche. Man hat damit zugleich eine Construction für den Schnitt der Isogyrenfläche mit einer zu der gegebenen Richtung senkrechten Ebene. Aus der analytischen Untersuchung dieses Schnittes folgt ferner, dass derselbe eine circulare Curve dritter Ordnung mit einer reellen Asymptote ist. Daraus ergiebt sich eine neue Construction der Curve sowie interessante Beziehungen derselben zu der vorher erwähnten Parabel. Endlich sei erwähnt, dass die in Rede stehende Curve dritter Ordnung ein specieller Fall der Brennpunkts-

curve von Kegelschnitten ist, welche vier gegebene Gerade berühren.

Zum Schluss wird gezeigt, wie man mit Hülfe der vorstehend skizzirten Resultate die Isogyren für eine gegebene Platte construiren kann. Diese Construction lässt sich indessen nicht in Kürze wiedergeben. Wn.

P. Volkmann. Ueber Mac Cullagh's Theorie der Totalreflexion für isotrope und anisotrope Medien.

Gott. Nachr 336-358

Von seiner Theorie der Totalreflexion hat Mac Cullagh vor mehr als 40 Jahren nur einige Resultate ohne Ableitung in kurzen, oft schwer verständlichen Notizen mitgeteilt. Nach den darin enthaltenen Andeutungen unternimmt es Herr Volkmann, jene Theorie, deren Vorzug in der anschaulichen geometrischen Deutung des Vorgangs bei der totalen Reflexion besteht, auszuarbeiten.

Die Grundlage bildet folgende analytische Darstellung der Punkte einer Ellipse im Raume durch einen variabeln Parameter φ:

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi_1 = p\cos\alpha\sin\varphi + q\cos\alpha'.\cos\varphi, \\ \eta_1 = p\cos\beta\sin\varphi + q\cos\beta'.\cos\varphi, \\ \zeta_1 = p\cos\gamma\sin\varphi + q\cos\gamma'.\cos\varphi. \end{cases}$$

Darin sind p, q die Längen zweier conjugirten Durchmesser der Ellipse, α, β, γ resp. α', β', γ' die Winkel, welche diese Durchmesser mit den Coordinatenaxen, deren Anfangspunkt im Mittelpunkt der Ellipse liegt, bilden. Da die allgemeinste Bewegung eines Aetherteilchens in einer Ellipse stattfindet, so sind die Componenten der Schwingungen, in welche ein Punkt des anisotropen Mediums durch die bei der totalen Reflexion entstehende gebrochene Welle versetzt wird, von der Form

$$(2)\qquad \xi = s.\xi_1,\quad \eta = s.\eta_1,\quad \zeta = s.\zeta_1,$$

wo ξ_1, η_1, ζ_1 die Ausdrücke (1) sind, darin

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(lx + my + nz - st)$$

gesetzt, während

$$s = e^{-\frac{2\pi}{\lambda} r(fx+gy+hz)}$$

ist. Uebrigens ist $fx+gy+hz=0$ die Grenzebene des Mediums und $lx+my+nz=0$ die gebrochene Wellenebene. Setzt man die Ausdrücke (2) in die Gleichung, welche die Incompressibilität ausdrückt, ein, so findet man, dass dieselben eine Bewegung darstellen, die nicht mehr in der Wellenebene $lx+my+nz=0$ stattfindet, also nicht mehr transversal ist; und in sofern kann man sagen, dass bei der totalen Reflexion der Mac Cullagh'sche Begriff der Wellenebene, resp. Wellennormale ein andrer ist, als bei der gewöhnlichen Lichtbewegung. Doch gehen beide Begriffe an der Grenze der totalen Reflexion ($r=0$) in einander über. Ferner ergiebt sich, dass die Schwingungsellipsen sämtlich auf einem zur Einfallsebene senkrechten Cylinder zweiter Ordnung liegen; sein Schnitt mit der Einfallsebene hat zu conjugirten Durchmessern Linien, welche parallel zur Grenzebene des Mediums und zur Wellenebene sind, und deren Längen sich wie $r:1$ verhalten.

Weiter werden die Ausdrücke (2) in die Differentialgleichungen eingesetzt, von denen die Lichtbewegung in optisch zweiaxigen Krystallen abhängt. Die Relationen, welche sich dadurch zwischen den Constanten der Schwingungscomponenten ergeben, sind ganz analog denen, die man erhalten würde, wenn man statt von den elliptischen Schwingungen (2) von linear polarisirten ($q=0$) ausgehen würde; nur treten an Stelle der bei linearen Schwingungen vorkommenden Grössen $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, $p\cos\gamma$ hier die Ausdrücke

$$A = p\cos\alpha + iq\cos\alpha', \quad B = p\cos\beta + iq\cos\beta',$$
$$\Gamma = p\cos\gamma + iq\cos\gamma'$$

auf. Durch Elimination von A, B, Γ erhält man aus den genannten Relationen eine Gleichung zwischen r, s, l, m, n, f, g, h und den Elasticitätsconstanten des Mediums; durch Scheidung des reellen und imaginären Bestandteils entstehen daraus zwei Gleichungen, von denen für $r=0$ die eine in die Fresnel'sche

Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit übergeht, während die andre den Grenzwinkel der totalen Reflexion bestimmt. Falls aber r nicht verschwindet, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit s nicht mehr, wie in der Fresnel'schen Theorie, durch die Wellennormale allein gegeben, sondern es ist dazu noch die Kenntnis des Einfallswinkels nötig, unter dem die totale Reflexion stattfindet. Uebrigens ist die Gleichung für s^2 auch hier vom zweiten Grade, so dass aus einer einfallenden zwei gebrochene Wellen entstehen. Gab die Elimination von A, B, Γ aus den zwischen den Constanten stattfindenden Relationen zwei Gleichungen für r und s, so giebt die Elimination von s neben der Incompressibilitätsbedingung eine weitere Gleichung zwischen A, B, Γ, aus der die Lage der Ebene der Schwingungsellipse sich ableiten lässt. Diese Ebene genügt in Verbindung mit dem oben erwähnten Cylinder vollständig zur Bestimmung der elliptischen Bahn des Punktes. Das so gewonnene analytische Resultat wird geometrisch gedeutet (Mac Cullagh's Regel). Bemerkenswert sind übrigens bei allen hier erwähnten Resultaten gewisse Vereinfachungen, die sich für einaxige Krystalle ergeben.

Nachdem so die Grundgleichungen der allgemeinsten Lichtbewegung in einem anisotropen Medium erledigt sind, wird die Reflexion des Lichtes betrachtet, das aus einem isotropen Medium auf ein derartiges anisotropes fällt und an der Grenze beider Medien total reflectirt wird. In der Nähe der Grenzebene entstehen dann auch im anisotropen Medium zwei gebrochene Wellen von der Form (2), die allerdings in geringer Tiefe verschwinden, aber für den Verlauf der Erscheinung wesentlich sind. Auch die Componenten der einfallenden und reflectirten Schwingung sind von der Form (2), nur dass für beide $r = 0$, also $s = 1$ ist. Die Grenzbedingungen von Mac Cullagh sind dieselben wie die von Kirchhoff und Neumann, nämlich Gleichheit der Verrückungscomponenten zu beiden Seiten der Grenzfläche sowie Erhaltung der lebendigen Kraft für den Act der Reflexion und Brechung. Aber nicht nur die Grenzbedingungen sind in der Mac Cullagh'schen Theorie einerseits, in der Kirchhoff-Neumann'schen andererseits identisch, sondern beide Theorien ergeben

in voller Uebereinstimmung mit den Quincke'schen Beobachtungen; die Abweichungen bleiben innerhalb der Beobachtungsfehler. Auch die absoluten Verzögerungen der Componenten werden für gewisse Fälle berechnet; und hier ergiebt sich, dass in einer sehr dünnen Metallschicht beim senkrechten Durchgang des Lichtes eine Beschleunigung stattfindet. Damit ist eine bisher als unerklärlich angesehene Beobachtung von Quincke erklärt.

Wn.

W. Wernicke. Ueber die Phasenänderungen bei der Reflexion und über die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XXV 203-232.

W. Wernicke. Berichtigung zweier Formeln. Wiedemann Ann. (2) XXV. 674-675.

Einer grösseren experimentellen Untersuchung schickt der Verfasser eine Formel für die Intensität des von einer dünnen Metallschicht reflectirten Lichtes voraus. Die dünne Schicht wird als zwischen zwei durchsichtigen Medien liegend angenommen. Durch Specialisirung ergiebt sich daraus die Intensitätsformel auch für den Fall, dass die dünne Schicht aus einem isotropen durchsichtigen Medium besteht. Die Ableitung dieser nur auf allgemein angenommenen mechanischen Grundsätzen basirten, von jeder besonderen Theorie der [illegible] aber unabhängigen Formel wird nicht [illegible] In [illegible] Aufsatz war die Formel falsch angeg[illegible] sie berichtigt.

[illegible] [illegible]ntellen Untersuchungen zu den [illegible] Isotrope Körper von gering[illegible] parallel zur Einfalls[illegible] [illegible]keln ohne merk[illegible] [illegible] äussere oder [illegible] [illegible]hene p[illegible]

W[illegible]

G. Basso. Fenomeni di reflessione cristallina interpretati secondo la teoria elettromagnetica della luce. Torino Atti XX. 537-562

Der Verfasser reproducirt zunächst in ausführlicher Darstellung die Maxwell'sche Ableitung der Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie für isotrope und krystallinische Medien (cf. Maxwell „Electricity and Magnetism" II. Chap. XX.) und bespricht dann das Problem der Reflexion für den Fall, dass Lichtwellen aus einem isotropen Medium auf einen einaxigen Krystall fallen, dessen optische Axe senkrecht zur brechenden Ebene ist. Die Grenzbedingungen sind: Gleichheit der Verrückungen zu beiden Seiten der Grenzfläche, Gleichheit der nach x und y genommenen Differentialquotienten dieser Verrückungen (falls $z = 0$ die Grenzfläche), Erhaltung der lebendigen Kraft. Die Durchführung der Rechnung bietet kein besonderes Interesse dar. Wn.

L. Graetz. Notiz über die Grösse der Maxwell'schen Molecularwirbel und über die Dichtigkeit des Lichtäthers. Wiedemann Ann. (2) XXV 165-172

Aus einer von Maxwell für die magnetische Drehung der Polarisationsebene aufgestellten Formel (cf. Maxwell „Treatise on Electricity and Magnetism" II. § 822-829, Phil. Mag. 1861, 1862) in Verbindung mit der Fresnel'schen Annahme über die Dichtigkeit des Lichtäthers in ponderablen Körpern kann man zunächst eine Formel für die relativen Werte der Radien der Molecularwirbel [illegible] verschiedenen Substanzen ableiten. Wendet man diese auf [illegible] Beobachtungen von Kundt über die Drehung der Polari[illegible]ebene des Lichtes beim Durchgang durch Eisen an, so [illegible] den Radius der Molecularwirbel im Eisen 3000-mal [illegible] im Wasser. Andrerseits lässt sich aus der kinetischen [illegible] Radius eines Quecksilbermoleculs berechnen. [illegible] dieselbe Grösse an und setzt voraus, dass [illegible] resp. ihr Aether als Ganzes wirbeln, so

hat man eine obere Grenze für den Radius der Molecularwirbel im Eisen, daher auch für die entsprechende Grösse im Wasser; und daraus folgt mittels der Maxwell'schen Formel, dass die Dichtigkeit des freien Aethers, auf Wasser bezogen, kleiner als 9.10^{-16}. Aus einer Formel von Thomson ergiebt sich ferner diese Dichtigkeit grösser als $0,1.10^{-17}$. Man hat damit, freilich auf hypothetischer Grundlage, zwei sehr nahe Grenzen für jene Dichtigkeit. Wn.

E. Ketteler. Die optischen Constanten der magnetischen Medien. Wiedemann Ann. (2) XXIV. 119-127.

Der Herr Verfasser bemerkt, dass in einer experimentellen Untersuchung von Kundt über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch Eisen etc. nur die eine Seite der Erscheinung berücksichtigt, dagegen die jene Drehung begleitende Depolarisation unbeachtet gelassen sei. Zur Bestimmung der optischen Constanten der betreffenden Medien sei daher eine Ergänzung der Kundt'schen Beobachtungen nötig. Für eine solche werden dann die theoretischen Gesichtspunkte in engem Anschluss an frühere Arbeiten des Herrn Ketteler (cf. F. d. M. XIV. 1882. 844, XV. 1883. 905) dargelegt. Wn.

E. v. Fleis[illegible] Del[illegible] Lichtwellenfläche im magne[illegible] (2) XXV. 308-324.

Abdruck [illegible] vorigen Jahre (cf. F. d. M. XV[illegible] Wn.

[illegible] Ueber [illegible] Lichts [illegible] isotrop[illegible] [illegible]ines [illegible] magnet[illegible] [illegible]

[illegible]

J. McConnel. An experimental investigation into the form of the wave-surface of quartz. Lond. R. S. Proc. XXXIX. 409-411.

Auszug aus einer in den Transactions für 1886, Bd. CLXXVII. gedruckten Abhandlung. Cly.

K. Exner. Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit im Quarz. Wiedemann Ann. (2) XXV. 141-144.

Aus einer von Cauchy und V. v. Lang aufgestellten Formel für den Brechungsquotienten einer beliebigen ebenen Welle eines einaxigen, circular polarisirenden Mediums wird die Folgerung abgeleitet: Für irgend eine Richtung ist das arithmetische Mittel der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich dem arithmetischen Mittel jener Geschwindigkeiten, welche derselben Richtung ohne Rotation entsprechen würden. Wn.

Gouy. Sur les effets simultanés du pouvoir rotatoire et de la double réfraction. C. R. C. 100-103.

Um den Durchgang des Lichtes durch eine Platte zu verfolgen, die zugleich doppeltbrechend ist und Drehungsvermögen besitzt, verfährt der Verfasser folgendermassen.

Besitzt zunächst die Platte Doppelbrechung ohne Drehungsvermögen und fallen senkrecht auf dieselbe parallele, elliptisch-[illegible]sirte Strahlen, so zerlegen sich die einfallenden Strahlen [illegible] zwei geradlinig polarisirte Schwingungen; aber jeder [illegible] Innern nimmt gleichzeitig an beiden Schwingungen [illegible] er in Wirklichkeit eine Ellipse beschreibt. [illegible]tnis sowohl, als die Lage der grossen Axe der [illegible] mit dem Abstand l des Punktes von der [illegible] Man kann nun leicht die Aenderungen [illegible]formation der Ellipse) und die Drehung [illegible], die eintritt, wenn man sich inner- [illegible] Oberfläche entfernt. Eine ganz

analoge Betrachtung kann man für den Fall machen, dass die Platte rein circular polarisirend (ohne Doppelbrechung) ist. Auch hier ist die wirkliche Bahn des schwingenden Punktes eine Ellipse, daher obige Betrachtung anwendbar. Besitzt endlich die Platte gleichzeitig Drehungsvermögen und Doppelbrechung, so hat man, um die unendlich kleine Modification zu erhalten, die das Axenverhältnis und die Lage der grossen Axe erfahren, falls man sich um dl von der Oberfläche entfernt, nur die beiden vorher berechneten Werte dieser Aenderungen zu addiren (Princip der Unabhängigkeit gleichzeitiger Wirkungen). Einige Folgerungen aus dieser Betrachtung werden ohne Ableitung mitgeteilt. Wn.

E. Lommel. Zur Theorie der Fluorescenz. Wiedemann Ann. (2) XXV. 643-655.

Herr Lommel verteidigt seine Theorie der Absorption und Fluorescenz (cfr. F. d. M. X. 1878. 690) gegen Einwürfe, die Wüllner in der 4ten Aufl. seines Lehrbuchs der Experimentalphysik dagegen erho[illegible] Der hauptsä[illegible] dieser Einwürfe besteht darin, [illegible] Lommel's De[illegible] genen Lichtes unzulässig se[illegible] Defini[illegible] nach Wüllner's Ansic[illegible] auskling[illegible] zu bleiben, ein wirr[illegible] Lommel darauf hin, [illegible] pendel[illegible] Schwingun[illegible] ein[illegible] ng von de[illegible]

x

kein[illegible] auf das [illegible] tensit[illegible] abnimm[illegible] zeigen, [illegible] Wirklich[illegible] daran, das[illegible] Wüllner's, [illegible] bewegungszustan[illegible] bar befinde, wir[illegible] Zustand der Körper[illegible]

der Bewegungszustand der Lichtquelle stationär bleibe; erst die Aenderung der Bewegung der Lichtquelle habe auch eine solche für die Bewegung der Körperteilchen zur Folge. Eine letzte Unvollkommenheit der Lommel'schen Theorie findet Wüllner darin, dass der Unterschied zwischen Absorption ohne und mit Fluorescenz nicht erklärt werde. Die Erklärung liegt aber einfach darin, dass bei Absorption ohne Fluorescenz die betreffenden Körperschwingungen nicht mehr sichtbar sind.

Wn.

M. Réthy. Bemerkungen zur Abhandlung J. Fröhlich's „Kritisches zur Theorie des gebeugten Lichtes.“ Wiedemann Ann. (2) XXIV. 282-287.

Gegenüber der Fröhlich'schen Kritik (F. d. M. XVI. 1884. 931) seiner früheren Arbeit macht Herr Réthy Folgendes geltend: Die Behauptung von Fröhlich, dass die Réthy'schen Formeln in Bezug auf die Intensität des gebeugten Lichtes der Erfahrung widersprechen, bedarf zu ihrer Begründung der Benutzung eines Satzes, welcher von Kirchhoff für weite Oeffnungen als sehr wahrscheinlich erwiesen ist, den aber Fröhlich ohne weiteres auf sehr enge Oeffnungen anwendet. Jene Kritik wird damit hinfällig. Da die Réthy'schen Formeln von dem genannten Satze unabhängig sind, so können sie selbst bei engeren Gittern als Näherungs-[illegible]meln gelten. Uebrigens rühren, wie Herr Réthy bemerkt, [illegible] Formeln (cf. F. d. M. XII. 1880. 770) nicht von Kirchhoff [illegible]dern sind in dem Clebsch-Lamé'schen allgemeinen Lösungs-[illegible] Elasticitätsgleichungen enthalten. Wn.

[illegible] Ueber die Theorie und Gestalt neu beob-[illegible]renzcurven. Wiedemann Ann. (3) XXIV. 417-439.

[illegible]benen Interferenzstreifen, von denen die [illegible]nge, die andere nur durch ein Fern-[illegible]rischen zwei planparallelen, aus [illegible] die unter dem Winkel 2φ

gegeneinander geneigt sind. Die Lichtquelle und das Auge liegen zu verschiedenen Seiten einer zu beiden Platten senkrechten Ebene derart, dass ein von der Fläche der ersten Platte reflectirter Strahl auf der Halbirungslinie des Neigungswinkels 2φ senkrecht steht und nach der Reflexion an der zweiten Platte ins Auge resp. ins Fernrohr gelangt. Da jeder Strahl an der Oberfläche jeder der Platten sich teilt, indem er teils direct reflectirt wird, teils in die Platte tritt und nach einer Reflexion an der Hinterfläche der Platte dieselbe verlässt, so entstehen aus jedem einfallenden Strahle vier von der Oberfläche der zweiten Platte ausgehende; von diesen kommen für die Interferenz diejenigen Paare in Betracht, die zusammen an sämtlichen vier Plattenflächen reflectirt sind. Für die Phasendifferenz der interferirenden Paare ergiebt sich

$$\varDelta = 2d\{\sqrt{n^2 - \sin^2 e_1} \pm \sqrt{n^2 - \sin^2 e_2}\},$$

wenn e_1 und e_2 die Winkel sind, welche die zwischen den Platten verlaufenden Strahlen mit deren Normalen bilden, n der Brechungsexponent, d die Dicke der Platten. Die Reflexionsebenen der Strahlen fallen [illegible] dem Obigen mit der Neigungsebene der Platten nicht [illegible]. Es we[illegible] in Folge dessen nach dem Vorgang von [illegible] de[illegible] [illegible]en Interferenzstreifen die Winkel e_1 [illegible] Winkel ϱ, den e_1 (resp. e_2) mit [illegible] Plattennormalen bildet, den Winkel 2φ [illegible]kel ϑ der Ebenen [illegible] mit 2φ [illegible] Const. die Inter[illegible] [illegible] Ausdruck für $\varDelta$ [illegible] Art. Die [illegible] ϱ stets [illegible] $\varDelta$ er[illegible] giebt [illegible] gesc[illegible] Mittelp[illegible] der Einst[illegible]

E. Gumlich. Theorie der Newton'schen Farbenringe im durchgehenden Lichte. Wiedemann Ann. 2) XXVI. 337-374.

Die Untersuchungen, welche Referent über die Theorie der Newton'schen Ringe im reflectirten Lichte angestellt hat (cfr. F. d. M. XIII. 1881. 759; XV. 1883. 923), überträgt der Verfasser der vorliegenden Arbeit auf die im durchgehenden Lichte entstehenden Ringe. Er geht dabei nicht nur von denselben Grundvorstellungen aus, wie die vorgenannten beiden Arbeiten, sondern schliesst sich auch in der Durchführung der Rechnung Schritt für Schritt dem Vorgange des Referenten an. Die Ringe werden entstanden gedacht an einer Lamelle, die aus einer planparallelen Platte und einer sie mit der convexen Fläche berührenden planconvexen Linse besteht. Eine auf die Platte fallende Lichtwelle tritt in die Lamelle, von da teils direct, teils nach doppelter Reflexion an den beiden Grenzflächen der Lamelle in die Linse; beide Wellen werden an der ebenen Linsenfläche in die Luft zurückgebrochen und interferiren hier. Um die Stellen zu ermitteln, an denen die Interferenz am deutlichsten ist, wird zunächst die vom Referenten seiner ersten Arbeit zu grunde gelegte Hülfsvorstellung der Hauptpaare benutzt. Für diese werden die Wegdifferenzen berechnet und einander gleich gesetzt, was eine Bedingungsgleichung von genau derselben Form ergiebt, wie bei der Erscheinung im reflectirten Lichte. Die Bedingungen für die hellen und dunklen Stellen dagegen werden etwas andere. Weiter wird der Einfluss untersucht, den die mehrmals in der Luftlamelle reflectirten Strahlen auf die Ringe ausüben. Das [illegible]er gefundene Resultat stimmt äusserlich mit dem des Referen[illegible]herein; die daraus für die Erscheinung zu ziehenden Fol[illegible]n sind aber andere. Die mehrfach reflectirten Strahlen [illegible]ner an den hellen Stellen die Helligkeit, vermindern [illegible]elheit an den dunklen Stellen, genau umgekehrt [illegible]ten Lichte. Endlich wird gezeigt, dass die vom [illegible]ner zweiten Arbeit durchgeführte strengere [illegible] alle interferirenden Strahlenpaare Rücksicht [illegible]n Resultate führt, wie die vorige auf einer

hypothetischen Hülfsvorstellung basirende Rechnung. Das Hauptergebnis der Arbeit ist, dass auch beim durchgehenden Lichte die Newton'schen Ringe auf einer Regelfläche dritter Ordnung liegen, die nur bei dem Einfallswinkel 0 sich auf eine Ebene reducirt. Diese Regelfläche ist, falls die Dicke der planconvexen Linse gleich der der planparallelen Platte ist, genau das Spiegelbild derjenigen Interferenzfläche, die beim reflectirten Lichte auftritt. Die Ringe selbst sind die Schnittcurven der genannten Regelfläche mit coaxialen elliptischen Cylindern, deren Leitlinien parallel der Axe des Beobachtungsmikroskops laufen. Die Projection der Ringe in der Richtung der Mikroskopaxe auf eine Horizontalebene ergiebt ein System concentrischer Kreise. Die dunklen Ringe im durchgehenden Lichte sind ferner die Spiegelbilder der hellen im reflectirten Lichte, nicht nur ihrer Lage nach, sondern auch hinsichtlich des Wechsels der Helligkeit.

Der Grund dafür, dass die Newton'schen Ringe im durchgehenden Lichte viel weniger deutlich sind als im reflectirten, liegt darin, dass im letzteren Falle je zwei interferirende Strahlen gleich viel Reflexionen erlitten haben, während im ersteren Falle der eine Strahl zweimal, der andere gar nicht reflectirt ist, so dass hier der eine der interferirenden Strahlen eine viel geringere Intensität hat als der andere. Wn.

…rische Optik.

M… …e géométrique Rom. Acc. L.

… über die Lage

… Öffnung ein-

… Arch

In der ersten Abhandlung wird die Zahl und Lage der Bilder eines innerhalb eines Winkelspiegels befindlichen leuchtenden Punktes in sehr breiter Darstellung bestimmt. Die Resultate sind keineswegs neu, wie der Verfasser meint, sondern alle wesentlichen finden sich schon bei Gallenkamp (Poggend. Ann. 1850; Fortschritte der Physik VI. 383), bei Klein (Poggend. Ann. CLII., F. d. M. VI. 1874. 668), bei Hess, der alle möglichen einzelnen Fälle zu einer Formel zusammengefasst hat (F. d. M. XI. 1879. 366), endlich bei Schubert (F. d. M. XIV. 1882. 466). Zum Schluss werden die Bilder eines Systems von Punkten, resp. eines ausgedehnten Gegenstandes besprochen. Die hier abgeleiteten Sätze sind lediglich einfache Folgerungen aus den für einen Punkt geltenden.

In der zweiten Arbeit wird für die Zahl der Bilder eines leuchtenden Punktes eine einfache, alle Fälle umfassende Formel aufgestellt, die sich von der oben erwähnten Formel von Hess nur in der Bezeichnung unterscheidet, also ebenso wenig neu ist, wie der Inhalt der ersten Arbeit. Wn.

H. Vogt. Geometrische Beweise des Satzes von der Minimalablenkung im Prisma. Schlömilch Z. XXXIII. 111-112.

Von den zwei Beweisen, die hier mitgeteilt werden, beruht der eine auf folgender Ueberlegung. Die Ablenkung des Prismas hängt nur ab von der Summe von Eintritts- und Austrittswinkel; von diesen ist stets der eine kleiner, der andere grösser als der Eintrittswinkel des gleichschenklig durchfallenden Strahls. Mithin treten, da man Eintritts- und Austrittswinkel vertauschen kann, auf beiden Seiten des gleichschenkligen Strahls die Ablenkungswerte paarweise auf. Die Ablenkung des gleichschenkligen Strahles selbst ist also ein Maximum oder ein Minimum.

Der zweite Beweis stützt sich auf die Betrachtung dreier Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie g besitzen, während die [illegible]berliegenden Ecken auf einem um eine Ecke von g mit [illegible]us $\frac{1}{n}g$ (n der Brechungsexponent) beschriebenen Kreise

liegen. Die der Seite *g* gegenüberliegenden Winkel der Dreiecke sind ferner die Nebenwinkel resp. vom Eintritts- und Austrittswinkel eines beliebigen Strahls und vom Eintrittswinkel des gleichschenkligen Strahls. Wn.

J. v. Hepperger. Ueber die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgang eines Strahlenbüschels monochromatischen Lichtes durch ein Prisma mit gerader Durchsicht. Wien. Ber. XCI, 640-666.

Ein Prismensatz aus drei Prismen sei so eingerichtet, dass jeder senkrecht zur Halbirungslinie des brechenden Winkels des mittleren Prismas auffallende Strahl von bestimmter Wellenlänge durch den Durchgang durch das Prisma weder eine Ablenkung noch eine Verschiebung erleidet. Dazu ist nur nötig, dass zwischen den Brechungsexponenten und den brechenden Winkeln der Prismen eine gewisse leicht aufzustellende Bedingungsgleichung (a) stattfindet. Es fragt sich dann, wo man das Bild eines leuchtenden Punktes, der durch das Prisma betrachtet wird, sieht. Natürlich kann man von einem Bilde, d. h. von einem Vereinigungspunkte der von einem Punkte ausgegangenen Strahlen, nur sprechen bei Beschränkung auf einen Strahlenkegel von sehr kleiner Oeffnung. Die Lage des genannten Bildes wird unter der Annahme, dass ein ohne Ablenkung das Prisma passirender S[illegible] dem Str[illegible] von kleiner Oeffnung angehört, durch [illegible] Betrachtungen gestützte Rechnung [illegible] Rechnung beschränkt sich [illegible] einem Hauptschnitt des Prisma [illegible] die aus dem Haupt- [illegible] ergiebt sich, dass [illegible] des Strahls [illegible] wird um eine

und den Brechungsexponenten der Prismen abhängige Factoren, c ist die Länge der Seite des mittleren gleichschenkligen Prismas, λ endlich ist die Entfernung des Punktes, in welchem der einfallende Strahl die erste Prismenfläche trifft, von der zugehörigen brechenden Kante. Die Formel zeigt, dass die Verschiebung v durch Entfernung des Prismensatzes von dem Ausgang der Strahlen nicht geändert wird, dass aber eine seitliche Ortsänderung des leuchtenden Punktes auch v ändert, da dann λ einen andern Wert erhält. Die Aenderung von v kann, wie an einem numerischen Beispiel gezeigt wird, mehrere Millimeter betragen. Soll die Verschiebung v für alle leuchtenden Punkte dieselbe sein, so muss der Factor S verschwinden. Das giebt eine zweite Relation b) zwischen den Brechungsexponenten und den Prismenwinkeln. Aus den beiden Bedingungsgleichungen a) und b) kann man, falls die Brechungsexponenten gegeben sind, die brechenden Winkel (dieselben sind für die beiden äusseren Prismen gleich, ebenso wie die Brechungsexponenten) finden. Dies führt auf eine Gleichung vierten Grades, die genauer discutirt und zu numerischer Rechnung benutzt wird. Wn.

J. v. Hepperger. Ueber Krümmungsvermögen und Dispersion von Prismen. Wien Ber. XCII. 261-300.

Bei den Spectralapparaten werden die von dem Lichtspalt ausgehenden Strahlen, ehe sie auf das Prisma treffen, durch eine Collimatorlinse parallel gemacht. Ist O derjenige Punkt des Spaltes, der zugleich Brennpunkt der Linse ist, so treten die von O ausgegangenen Strahlen der Linsenaxe parallel aus und bleiben sämtlich in ihrem weiteren Verlauf in den Hauptschnitten des Prismas. Dagegen treten die von einem andern Punkte A (oberhalb oder unterhalb O) des Spaltes ausgehenden Strahlen zwar unter einander parallel aus der Linse aus, bilden aber mit [illegible] Linsenaxe kleine Winkel und verlaufen deshalb nicht in den [illegible]schnitten des Prismas. Die Folge davon ist, dass diese [illegible]ne grössere Ablenkung erleiden, als die von O aus

gehenden, und aus diesem Grunde erscheinen die Spectrallinien gekrümmt.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Weg der von A ausgesandten Strahlen verfolgt, die an den Prismenflächen eintretende Brechung mittels sphärischer Dreiecke berechnet, endlich die Abweichung der Projection des austretenden Strahles auf die Hauptschnittebene von dem im Hauptschnitt verlaufenden Strahl durch längere Rechnung ermittelt. Angenähert ergiebt sich auf diese Weise für die Gestalt der Spectrallinien eine Parabel, deren Gleichung von Ditscheiner (Wien. Ber. LI.) schon 1865 auf anderm Wege abgeleitet ist. Der Parameter der Parabel ist $\frac{p}{K}$, wo p die Brennweite der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohrs darstellt, während K nur von den Constanten des Prismas abhängt. Für diejenige Stellung des Prismas, bei der die von O ausgegangenen Strahlen das Minimum der Ablenkung erfahren, ist

$$K = \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\sin(\frac{1}{2}\gamma)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\frac{1}{2}\gamma)}},$$

wenn γ der Prismenwinkel, n der Brechungsexponent ist.

An diese Formel wird die wichtige Bemerkung geknüpft, dass, wenn

$$K = \frac{n^2 - 1}{2n} \cdot A$$

gesetzt wird, die Dispersion des Prismas $\Delta = A.dn$ ist. Unter Dispersion ist dabei der Winkel verstanden, den zwei im Hauptschnitt verlaufende Strahlen nach dem Durchgang durch das Prisma bilden, falls beide Strahlen das Prisma unter gleichem Einfallswinkel treffen, ihre Brechungsexponenten sich um dn unterscheiden und der eine das Minimum der Ablenkung erfährt.

Analoges gilt auch dann, wenn die Strahlen nach einander mehrere Prismen [illegible] laufen. So ist für zwei Prismen, wenn [illegible] die auf [illegible] Prisma bezüglichen Grössen durch [illegible]

$$\Delta = A\,dn + A'dn'$$

Der Verfasser berechnet weiter die Grösse *K* für Systeme von drei resp. fünf neben einander liegenden Prismen, speciell für Systeme mit gerader Durchsicht; er untersucht dann, unter welchen Bedingungen das Krümmungsvermögen $K = 0$ ist. Für ein System von drei Prismen mit gerader Durchsicht ergiebt sich, dass der brechende Winkel der beiden äusseren Prismen 90° betragen muss, während die Bedingungen für fünfgliedrige Prismen complicirtere werden. Diese Bedingungen werden schliesslich zu numerischen Rechnungen verwertet. Wn.

N. Jadanza. Teorica dei cannocchiali esposta secondo il metodo di Gauss. Torino. E. Loescher. XI u. 182 S.

In diesem ausführlichen Lehrbuch der Linsentheorie beginnt der Verfasser mit der Gauss'schen Darstellung der Brechung an einem System centrirter Kugelflächen, erörtert dann die Eigenschaften der Cardinalpunkte, die Bestimmung derselben für ein zusammengesetztes System sowie die Unterschiede der verschiedenen Arten von Linsen. Daran schliessen sich graphische Constructionen, ferner die Theorie des Auges und der optischen Instrumente. Hier kommen manche für die praktische Anwendung wichtige Dinge zur Sprache, wie das anallatische und das reducirte Fernrohr. Den Schluss bildet die Besprechung des Achromatismus und die experimentelle Bestimmung der Constanten eines optischen Systems. Die sphärische Aberration und ihre Verbesserung wird nicht berührt. Ein dem Buche vorangestelltes Literaturverzeichnis ist, wenigstens hinsichtlich der neueren deutschen Arbeiten, recht unvollständig. Wn.

N. Jadanza. Sui punti cardinali di un sistema diottrico centrato et sul cannocchiale anallatico. Torino Atti XX. 917-933.

Der Verfasser gelangt folgendermassen zu den Cardinalpunkten eines Linsensystems. Zwischen den Abscissen ξ, ξ_1 zweier

M. F. Monoyer. Allgemeine Theorie centrirter dioptrischer Systeme. Exner Rep. XXI. 58-84.

A. Batelli. Ueber die centrirten katoptrischen Systeme. Exner Rep. XXI. 128-149.

A. Batelli. Ueber die Fortpflanzung des Lichtes in einem katadioptrischen Systeme. Exner Rep. XXI. 267-281.

A. Batelli. Die sphärische Aberration in den Spiegelteleskopen von Gregory und Cassegrain. Exner Rep. XXI. 524-530.

O. E. Meyer. Zwei Modelle zur Erläuterung der Lichtbrechung. Wiedemann Ann. (2) XXV. 539-542.

Das erste der sehr instructiven Modelle erläutert das Brechungsgesetz der Lichtwellen. Dasselbe beruht auf dem Satze, dass, wenn man die Lage der gebrochenen Welle durch die bekannte Huygens'sche Construction ermittelt, der Ort für den Schnittpunkt der einfallenden und der gebrochenen Welle ein vom Einfallswinkel unabhängiger Kreis ist.

Das zweite Modell zeigt, wie das durch eine Linse erzeugte Bild B eines leuchtenden Punktes A mit A seine Lage ändert. Diesem Modell liegt der aus der einfachen Linsenformel (bei Vernachlässigung der Linsendicke) folgende Satz zu Grunde, dass, wenn man einen beliebigen Punkt D der Linse mit den Axenpunkten A und B verbindet, die Linien AD und BD bei einer Lagenänderung von A [illegible] art um D drehen, dass das zwischen AD und BD (r[illegible] AD und der Verlängerung von BD) [illegible] der Axe senkrechten Linie einen [illegible] Wn.

F. Roth. Ueber die Divergenz des durch einen Wassertropfen gespiegelten und gebrochenen Lichtes. Met. Zeitschr. II. 52-62.

Um einen sphärischen Wassertropfen vom Radius r, auf dessen Aussenfläche ein Bündel paralleler Lichtstrahlen fällt, wird mit beliebigem Radius ϱ eine concentrische Kugel beschrieben. Das Stück dieser Kugelfläche, welches von dem aus dem Tropfen kommenden Lichte beschienen wird, sei s_1, die Querschnittsgrösse des noch intacten Bündels sei s_2, dann heisst der Bruch $\frac{s_1}{s_2}$ die „Divergenz der Strahlen.“ Eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, dass die Divergenz des von einer Kugelfläche zurückgeworfenen Lichtes allenthalben gleich gross ist, wogegen die Divergenz der gebrochenen Strahlen für den Brechungsexponenten n gleich

$$\left(\frac{2(n-1)\varrho}{nr}\right)^2$$

gefunden wird. Die Discussion dieses Ausdruckes ergiebt u. a., dass bei schwacher Beleuchtung, wenn der Abstand sich vergrössert, das rote Licht am längsten sichtbar bleiben muss.

Gr.

W. Zenker. Der braune Ring um die Sonne bei totalen Sonnenfinsternissen. Met. Zeitschr. II. 400-406.

Auch ohne die Rauchmassen des Krakatau-Ausbruches zu Hülfe zu nehmen, muss man doch glauben, dass in jüngster Zeit irgend etwas Neues zu den bereits in der Luft vorhandenen Objecten hinzugetreten sei, um die Ringbildungen zu erklären, und zwar muss der Ort des braunen Ringes jenseits der Wolkendecke gesucht werden. Der Verfasser sucht die lineare kürzeste Entfernung H der Entstehungsschicht von der Erde zu ermitteln, indem er die Sonnenhöhe φ und den scheinbaren Ringhalbmesser ϱ direct misst; irgend ein Punkt der Peripherie habe die Winkel- ... ω und stehe von unserm Auge linear um D ab. Der Bogen ...en dem obersten Punkte des Lichtkranzes und dem in Rede

stehenden willkürlichen Punkte sei $= \psi$. Die in dem Umfange des braunen Ringes befindlichen Teilchen erfüllen an und für sich eine Ellipse, deren Scheitelpunkte resp. die Höhen $(\varphi \pm \varrho)$ haben, deren Axenverhältnis $\frac{a}{b}$ aber gleich

$$\frac{\cos\varrho}{\sqrt{\sin(\varphi+\varrho)\sin(\varphi-\varrho)}}$$

ist. Für $\varphi = \varrho$ würde $\frac{a}{b} = \infty$, die braune, den Horizont berührende Parabel würde aber jetzt ganz undeutlich werden. Des ferneren ist $D = H.\mathrm{cosec}\,\omega$, $\sin\omega = \sin(\varphi + \varrho\cos\psi).\cos(\varrho\sin\psi)$, und eine von dem angenommenen Punkte auf die Axe des Projectionskegels gefällte Senkrechte ist durch den Ausdruck

$$L = \frac{H\sin\varrho}{\sin(\varphi+\varrho\cos\psi)\cos(\varrho\sin\psi)}$$

gegeben.

Bei centraler Verfinsterung fällt die Axe des Schattenkegels mit der so eben erwähnten Axe zusammen, und wenn für einen in dieser Linie befindlichen Punkt der letzte Punkt der Sonnenscheibe um t Secunden früher verschwindet als der letzte Punkt des Ringes, so hat der Mond in dieser Zeit $t - L$ Kilometer zurückgelegt. Da t, φ und ψ der Beobachtung zugänglich sind, so lässt sich aus der Gleichung $t = L$ auch H ermitteln. Eine Controllformel erhält man, sobald man den zuletzt verschwindenden Punkt des Ringes beobachtet, eine zweite, indem man nahe der Grenze der Totalitätszone den Augenblick fixirt, in welchem zu beiden Seiten des höchstgelegenen Ringpunktes symmetrisch-gleiche Stücke des braunen Ringes sichtbar sind, deren Grösse zu bestimmen ist. Der Verfasser findet, dass die grosse totale Sonnenfinsternis vom 19. August 1887 günstige Voraussetzungen für die Anwendung seines Messungsverfahrens darbietet, weil die Dauer der vollständigen Bedeckung zwischen $2^m 20^s$ und $3^m 54^s$ schwankt. Freilich kann auch der das Substrat jenes Ringes abgebende (kosmische oder terrestrische) Staub bis zum fraglichen Augenblick schon wieder verschwunden sein und mit

ihm das Phänomen selber; wenn dieser Bericht gedruckt vorliegt, ist auch die hier in der Schwebe gelassene Frage längst durch die Thatsachen entschieden. (Bekanntlich im ungünstigen Sinne.) Gr.

L. Weber. Intensitätsmessungen des diffusen Tageslichtes. Wiedemann Ann. (2) XXVI. 375-389.

Trägt man auf allen von einem Punkte P ausgehenden Radien Längen ab, die resp. proportional sind der Lichtmenge, die auf ein in P befindliches und zum betreffenden Radius senkrechtes Flächenelement von einer gegebenen Lichtquelle fällt, so wird die von den Endpunkten gebildete Fläche Helligkeitskörper für P genannt. Dieser Helligkeitskörper, der die Helligkeit des diffusen Lichtes in P darstellt, ist eine Kugel, falls die Lichtquelle ein weit entfernter Punkt ist, dagegen ein Rotationskardioid, falls die Lichtquelle eine überall gleich helle Halbkugel ist, und der beleuchtete Punkt P in der Mitte der Basis liegt. Der grösste Teil der Arbeit ist rein experimentell. Wn.

L. Weber. Intensitätsmessungen des diffusen Tageslichtes. Met. Zeitschr. II 163-172, 219-224, 451-455.

Ein Punkt wird von diffusem Lichte getroffen; man zieht von ihm aus Strahlen und trägt auf diesen Strecken ab, proportional denjenigen Lichtmengen, welche auf die in den Endpunkten senkrecht zur Strahlenrichtung gelegten Flächenelemente entfallen würden. Eine durch die Endpunkte dieser sämtlichen Strecken hindurchgehende Fläche umschliesst den zu dem Ausgangspunkte gehörigen „Helligkeitskörper der verschiedenen Lichtquellen.“ Ist die Licht aussendende Fläche eine sphärische, so ist auch der Helligkeitskörper von einer solchen umschlossen; ist dagegen erstere bloss hemisphärisch, wie in der Natur der Fall, so wird der Helligkeitskörper ein Rotationskardioid. Zur Messung bediente sich der Verfasser des transparenten Lichtes einer matt

geschliffenen Milchglastafel; wenn ν den Transmissionscoefficienten dieser Platte, h die wirklich auffallende Lichtmenge, i den Incidenzwinkel, p einen Proportionalitätsfactor, H endlich die „Helligkeit" (claritas visa nach Lambert) vorstellt, so hat man

$$H = \frac{h\nu}{\pi} = p\cos i.$$

Mit Rücksicht auf diese Formeln ergab die Beobachtung: Die Helligkeit des transparenten Lichtes einer matten, diffus beleuchteten Milchglasplatte kann zu der für die Lage der Platte „indicirten" Helligkeit als proportional gelten. Gemessen wurde jene erstere Helligkeit mittels der „Meternormalkerze", d. h. durch jenen Bestrahlungseffect, welchen die Einheitskerze in 1 Meter Entfernung bei senkrechter Incidenz auf eine Fläche ausübt. Die Vielfarbigkeit wurde durch ein dem Auge vorgehaltenes grünes Glas unschädlich gemacht. Die auf dem angedeuteten Wege für die Helligkeit des diffusen Tageslichtes erhaltenen Ergebnisse werden in umfänglicher tabellarischer Zusammenstellung vorgeführt. Gr.

Capitel 3.
Elektricität und Magnetismus.

E. Beltrami. Sulla teoria dell' induzione magnetica secondo Poisson. Bologna Mem. (4) V. 551-584; Il nuovo Cimento (3) XVI. 200-235.

a) Es seien U das Potential der äussern magnetisirenden Kraft, (α, β, γ) die Momente der Volumeneinheit im Punkte (x, y, z), $d\tau$ das Volumenelement des Magneten, V das Potential der inducirten Magnetisirung M, im gewöhnlichen Sinne genommen, d. h. für einen innern Punkt ebenso wie für einen äussern berechnet, also

$$(1) \qquad V = \int\left(\alpha\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \cdots\right)d\tau$$

Das wirkliche Potential der Magnetisirung M in einem im Innern oder auf der Oberfläche eines magnetischen Elements liegenden Punkt p ist $= V + v_1$, wo v_1 nur von der Magnetisirung im Punkt p abhängt. (Beschreibt man nämlich um p eine unendlich kleine Kugelfläche und bezeichnet mit V_a das Potential des ausserhalb derselben gelegenen Magnetismus im Punkt p, mit v das Potential der Kugel, so ist $V + v_1 = V_a + v$; da nun mit unendlich abnehmendem Kugelradius $\lim(V_a - V) = 0$ ist, so folgt $\lim v_1 = \lim v$). Die Bedingungsgleichung in jedem Punkte p eines magnetischen Elements ist nach Poisson

$$(2) \qquad U + V + v_1 = \text{const}$$

Es sei nun σ die Oberfläche dieses magnetischen Elements, h' die auf ihm stattfindende, irgend einem andern äussern Potential U' entsprechende Flächendichtigkeit, welche also der Gleichung $\int h'\,d\sigma = 0$ genügt; aus (2) ergiebt sich dann

$$\int (U + V + v_1) h'\,d\sigma = 0,$$

oder wenn $(\alpha', \beta', \gamma')$ die der zweiten Magnetisirung M' entsprechenden Momente sind und (x, y, z) einen Punkt im Innern des Elements, ∂ sein Volumen bezeichnet, und man die nur von der Magnetisirung M abhängigen Grössen $\frac{d(U + V)}{dx} = A$ etc. setzt,

$$(2^a) \qquad \frac{1}{\partial}\int v_1 h'\,d\sigma = A\alpha' + B\beta' + C\gamma'.$$

Das Potential der Magnetisirung M auf die Magnetisirung M', deren Potential V' sei, ist also

$$(3) \quad Q = \int\left[\left(\frac{dV}{dx} + A\right)\alpha' + \cdots\right]d\tau - \int\left[\left(\frac{dV'}{dx} + A'\right)\alpha + \cdots\right]d\tau,$$

mithin, da

$$\int\left(\frac{dV}{dx}\alpha' + \cdots\right)d\tau = \int\left(\frac{dV'}{dx}\alpha + \cdots\right)d\tau \text{ ist,}$$

$$\int (A\alpha' + \cdots)d\tau = \int (A'\alpha + \cdots)d\tau.$$

Da diese Gleichung auch für einen beliebigen Teil des Magneten gelten muss, weil die Magnetisirung eines beliebigen Teils einem bestimmten äussern Potential entspricht, so ist sie gleichbedeutend mit

$$(4) \qquad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = A'\alpha + B'\beta + C'\gamma,$$

woraus folgt, wenn ψ eine homogene quadratische Function von (α, β, γ) bezeichnet,

$$A = \frac{d\psi}{d\alpha} \text{ etc.},$$

oder

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(U+V)}{dx} + \frac{d\psi}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d(U+V)}{dy} + \frac{d\psi}{d\beta} = 0, \\ \frac{d(U+V)}{dz} + \frac{d\psi}{d\gamma} = 0, \end{aligned} \right.$$

durch welche drei Gleichungen sich die Poisson'sche Gleichung (2) oder die ihr wegen der Willkürlichkeit von α', β', γ' gleichwertige Gleichung (2*) ersetzen lässt. Für einen homogenen Körper kann man ψ durch geeignete Wahl der Coordinatenaxen in die Form bringen

$$[illegible] + \frac{\beta^2}{b} [illegible]$$

wo a, b, c Constan[illegible] Gleichungen [illegible] netes [illegible] eines kr[illegible] isotrop[illegible] [illegible] die [illegible]

Kra[illegible]

$$\int [illegible] A\alpha' [illegible]$$

Sind die k[illegible]

$M_x = \int \alpha\, d\tau$ [illegible]

diese Gleichung [illegible]

$$\int [illegible]$$

oder wenn man α', β', γ' als Functionen von X', Y', Z' ausgedrückt denkt,

$$M_x = \frac{d}{dX'}\int (X\alpha' + \cdots) d\tau;$$

hiernach lassen sich die Gesamtmomente für eine beliebige Magnetisirung durch die einer beliebigen, aber constanten magnetisirenden Kraft entsprechende Magnetisirung ausdrücken.

Rühren die Kräfte X', Y', Z' von einem in einem äussern Punkte p befindlichen Einheitspol her, und sind $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ die durch denselben erzeugten Momente, so geht die Gleichung (5) über in

$$(6) \qquad V_p = \int \left(\frac{dU}{dx} \alpha_p + \cdots \right) d\tau,$$

wodurch das Potential des Magneten in einem äussern Punkte p mittels derjenigen Magnetisirung ausgedrückt ist, welche ein in p befindlicher Einheitspol hervorruft. Bezeichnet also G^q_p das Potential der einem äussern Pol q entsprechenden Magnetisirung in einem andern äussern Punkte p, so ist

$$G^q_p = \int \left(\frac{d\frac{1}{r_q}}{dx} \alpha_p + \cdots \right) d\tau = G^p_q.$$

Durch bekannte Umformungen erhält man leicht statt (6)

$$\left\{ \begin{aligned} V_p &= \frac{1}{4\pi}\int \left(U \frac{dG^p_o}{dn} - \frac{dU}{dn} G^p_o \right) d\sigma \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{dU}{dn} - \frac{dU_o}{dn} \right) G^p_o \, d\sigma \\ &= \int h G^p_o \, d\sigma = \int h G^o_p \, d\sigma; \end{aligned} \right.$$

[...] die innere Normale, G^p_o, resp. G^o_p, das Potential [...] entsprechenden Magnetisirung in einem Punkte [...] Innenseite der Oberfläche, U_o den im äussern [...] des Potentials einer Flächenbelegung h, [...] he auf U reducirt; die Gleichung [...] zeigt, auch für einen inneren

Punkt p. Damit ist das Problem der Magnetisirung auf die Bestimmung einer der Green'schen Function der Elektrostatik analogen Function G_p^c zurückgeführt. Lbg.

O. Heaviside. On the electromagnetic wave-surface. Phil. Mag. (5) XIX. 397-419.

Die Bildung der Gleichung für die elektromagnetische Wellenfläche durch die Methode der Quaternionen wird erörtert und diese Gelegenheit wird benutzt, um zu zeigen und zu erläutern, welcher Weg für die Einführung und Entwickelung der auf die Physik angewandten Quaternionen als der einfachere zu betrachten ist. Gbs. (Lp.)

A. Seydler. Das Princip der Energie in seiner Anwendung auf die ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen des [illegible] Stromes. [illegible] 235-255.

Es sei W die [illegible] Energie [illegible] also $dA = -dW$ die Arbeit [illegible] Kräfte [illegible] Energie, U der Wär[illegible] die [illegible] Kräfte, dann wird, wenn kein [illegible] von [illegible] das Princip der Energie d[illegible] ung [illegible]

(1) [illegible]

D[illegible] bemerkt [illegible] fu[illegible] Gesamt[illegible] beson[illegible] folgt [illegible] eine sol[illegible] stirt [illegible]

Es s[illegible] änderl eben [illegible] U, d[illegible] motorischen K[illegible] den [illegible] es werde die [illegible] dynamisches Pot[illegible]

(2) [illegible]

besitzen, sodass die Arbeit der sämtlichen elektrodynamischen Kräfte ist

$$(3)\qquad dA = -dW = J_1 J_2 dV - J_1 d(J_2 V + J_1 V_1) - J_2 d(J_1 V + J_2 V_2).$$

Die Arbeit der etwaigen äussern mechanischen Kräfte sei dA_1, die Aenderung der kinetischen Energie dT; die Arbeit der elektromotorischen Kräfte E_1, E_2 ist

$$dA'_1 = (E_1 J_1 + E_2 J_2)dt,$$

die Aenderung des Wärmeinhalts

$$dU = (R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2)dt.$$

Dadurch geht die Gleichung (1) über in

$$(4)\qquad \begin{cases} 0 = -\dfrac{dA_1}{dt} + \dfrac{dT}{dt} - J_1 J_2 \dfrac{dV}{dt} \\ + J_1\left[\dfrac{d}{dt}(J_2 V + J_1 V_1) + R_1 J_1 - E_1\right] \\ + J_2\left[\dfrac{d}{dt}(J_1 V + J_2 V_2) + R_2 J_2 - E_2\right]. \end{cases}$$

Ist das Potential der zwei Stromkreise auf einander

$$P = \iint \frac{1}{r}\cos(ds_1, ds_2)\, ds_1\, ds_2,$$

so ist erfahrungsmässig die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte $= J_1 J_2 dP$, mithin

$$(5)\qquad \frac{dA_1}{dt} + J_1 J_2 \frac{dP}{dt} = \frac{dT}{dt};$$

...tzen wir also hypothetisch

$$(6)\qquad V = P,$$

...h dann auch V_1 und V_2 gleich den mit P analogen Selbst-...n P_1 und P_2 werden, so löst sich die Gleichung (4) ... Gleichung (5) und in

$$\begin{cases} J_1\left[\dfrac{d}{dt}(J_2 P + J_1 P_1) + R_1 J_1 - E_1\right] \\ J_2\left[\dfrac{d}{dt}(J_1 P + J_2 P_2) + R_2 J_2 - E_2\right] = 0. \end{cases}$$

...uf der linken Seite dieser Gleichung durch ... beliebig klein gemacht werden kann. ... unabhängig ist, so muss jedes

für sich = 0 sein, also

$$(7^a)\qquad R_1 J_1 = E_1 - \frac{d}{dt}(J_2 P + J_1 P_1),$$

$$(7^b)\qquad R_2 J_2 = E_2 - \frac{d}{dt}(J_1 P + J_2 P_2),$$

welche Gleichungen das Inductionsgesetz aussprechen.

An Stelle der Gleichungen (4) und (5) stellt Helmholtz („die Erhaltung der Kraft“) die Gleichungen auf

$$0 = \frac{dT}{dt} + J_1(R_1 J_1 - E_1) + J_2(R_2 J_2 - E_2), \qquad \frac{dT}{dt} = J_1 J_2 \frac{dP}{dt};$$

er vernachlässigt also die elektrodynamische Arbeit $-dW$, und erhält daraus die der Gleichung (7^b) entsprechende Gleichung

$$R_2 J_2 = E_2 - J_1 \frac{dP}{dt}$$

nur dadurch, dass er J_2 als so klein annimmt, dass die Induction auf den ersten Stromkreis vernachlässigt, also $R_1 J_1 - E_1 = 0$ gesetzt werden kann, wobei dann aber, wie die vollständige Gleichung (4) zeigt, das Glied $J_1 J_2 \frac{dP}{dt}$ das eine Mal vernachlässigt, das andere Mal beibehalten sein würde. Ein ähnlicher Fehler findet sich bei Wiedemann.

In analoger Weise wendet der Verfasser das Princip der Energie auf das System eines Stroms und eines Magneten an.

Lbg.

J. H. Poynting. [illegible] the transfer of energy in the [illegible]ectromagnet[illegible] Phil. Trans. CLXXV. 343-361.

[illegible]lektr[illegible]haltender Raum kann als ein Feld [illegible] an gewissen Punkten in ihre [illegible] umgewandelt wird durch [illegible]lektrische Einwirkungen [illegible] Feldes diese Energie [illegible] Arbeit, die durch

elektromagnetische Kräfte verrichtet wird, oder in irgend eine Form von Energie, welche durch elektrische Ströme geliefert wird. Früher wurde ein Strom als etwas angesehen, das sich längs des Leiters fortbewegt, da die Aufmerksamkeit vornehmlich auf den Leiter gerichtet war. Aber das Vorhandensein inducirter Ströme und elektromagnetischer Fernewirkungen vom primären Strome aus hat uns unter der Führung von Faraday und Maxwell dazu gebracht, das den Leiter umgebende Mittel als sehr wesentlich beteiligt bei dem Spiel der Entwickelung der Erscheinungen anzusehen. Da wir an die Continuität der Bewegung der Energie glauben, so sind wir zu dem Schlusse genötigt, dass das umgebende Medium wenigstens einen Teil der Energie enthält und dazu fähig ist, es von Punkt zu Punkt zu übertragen.

Auf dieser Grundlage hat Maxwell eine Theorie errichtet, gemäss welcher Ströme wesentlich in einer gewissen Verteilung von Energie in einem Leiter und um ihn bestehen, unter gleichzeitiger Umwandlung und demzufolge unter Bewegung von Energie durch dieses Feld. Das Ziel vorliegender Abhandlung ist der Nachweis, dass es ein allgemeines Gesetz für die Uebertragung der Energie giebt, nach welchem sie sich an irgend einem Punkte senkrecht zu der die Linien elektrischer und magnetischer Kraft enthaltenden Ebene fortpflanzt, und dass der die Einheit der Fläche innerhalb dieser Ebene in der Secunde durchlaufende Betrag derselben gleich dem Producte der Intensitäten beider Kräfte und des durch 4π dividirten Sinus des Winkels zwischen ihnen ist, während die Richtung des Energiestromes diejenige ist, in welcher eine rechtsgewundene Schraube sich bewegen würde, wenn sie von der positiven Richtung der elektromotorischen nach der positiven der magnetischen Kraft herumgedreht würde. Nach der Erforschung dieses allgemeinen Gesetzes werden mehrere Beispiele gegeben, um zu zeigen, wie die Energie sich in der Nachbarschaft verschiedener geschlossener Stromträger bewegt. Cly. (Lp.)

J. H. Poynting. On the connexion between electric current and the electric and magnetic inductions in the surrounding field. Phil. Trans CLXXVI. 277-306. (Abstract.) Lond. R S Proc. XXXVII. 168-172.

Mit Bezugnahme auf die vorangehende Abhandlung bemerkt der Verfasser, dass er dort keine Annahme inbetreff der Uebertragung elektrischer und magnetischer Inductionen gemacht habe, der elektrischen und der magnetischen Zustände innerhalb des Mittels, indem er bloss die Bewegung der Energie betrachtet habe. Er nimmt sich nun vor, eine Hypothese über die Fortpflanzung des inductiven Zustandes im Medium und seine Bewegung auf stromleitenden Drähten zu entwickeln.

Wenn wir die elektrischen und magnetischen Zustände des Feldes durch Inductionsröhren symbolisiren, welche in den Intensitätsrichtungen verlaufen, mit der Annahme, dass in jedem Falle die Röhren (tubes so construirt sind, dass die gesamte Induction über einen Querschnitt die Einheit beträgt, so hat man Grund zur Annahme, dass die elektrischen Röhren continuirlich sind, ausgenommen wo sich elektrische Ladungen befinden, während die magnetischen Röhren wahrscheinlich in allen Fällen continuirlich und in sich zurücklaufend sind.

In der Nachbarschaft eines einen Strom enthaltenden Drahtes können die elektrischen Röhren im allgemeinen als parallel zum Drahte genommen werden, während die magnetischen Röhren ihn umringen. Die vorgeschlagene Hypothese ist die, dass die Röhren [illegible] dem Drahte, indem ihre Plätze mit [illegible] werden, die vom Sitze der sogen[illegible] ausgesandt werden. Der in [illegible] der Anschauung besteht [illegible] vielmehr seitlich denn [illegible] fortgepflanzt [illegible] Annahme [illegible] und wenn [illegible]

Fortgange das umgebende Mittel beeinflusst. Da keine Möglichkeit vorhanden ist, durch Beobachtung des Mittels zu untersuchen, was darin vorgeht, sondern nur die Leiter erforscht werden können, so ist die Hypothese gegenwärtig einer Bestätigung nicht fähig; ihr Gebrauch kann nur gerechtfertigt werden, wenn sie besser als andere Hypothesen bekannte Thatsachen erklärt.

Der Verfasser beginnt mit einer ausführlichen Aufstellung der drei allgemeinen Principien, aus denen Maxwell seine allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes abgeleitet hat, und dann stellt er die Modificationen des zweiten und dritten Princips her, welche Modificationen die Basis seiner eigenen Theorie sind. Cly. (Lp.)

G. Kirchhoff. Zur Theorie der Gleichgewichtsverteilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. Berl. Ber. 1007-1013.

Bezeichnen E_1, E_2 die Ladungen, g, h die Potentiale auf den zwei Kugeln, so ist bekanntlich

$$E_1 = a_{11}g + a_{12}h, \quad E_2 = a_{12}g + a_{22}h.$$

Der Verfasser zeigt, dass die von ihm in Crelle J. LIX. für die Coefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} aufgestellten Reihen Glied für Glied mit den von W. Thomson (Phil. Mag. 1853) aufgestellten übereinstimmen. Der Verfasser formt dieselben in andere stärker convergirende um. Lbg.

Himstedt. Eine Bestimmung des Ohms. Berl. Ber. 753-757; Wiedemann Ann. XXVI. 547-575.

Das Princip ist folgendes. Ein primärer Stromkreis enthält den zu bestimmenden Widerstand $r = 1S$ mit einer Nebenschliessung vom Widerstand w, ferner die Batterie und eine [illegible] Spirale; ein secundärer Stromkreis enthält die secundäre [illegible]alvanometer, durch welches nach Regulirung einer [illegible]elle nur der Schliessungsstrom oder nur der [illegible]urchgeht, und einen Widerstand $r_1 = r$,

sein gesamter Widerstand ist $w_1 + r$, wo $w_1 = w$ ist. Ist V das Potential der zwei Spiralen auf einander, G der Reductionsfactor des Galvanometers, und wird der primäre Strom i n-mal in 1″ unterbrochen, so ist der Ablenkungswinkel α_1 bestimmt durch

$$G\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{niV}{w+r}\,.$$

Wird darauf der primäre Stromkreis dauernd geschlossen und in denselben w_1 an Stelle von w als Nebenschliessung eingeschaltet, und ist i_1 der Strom in r, i_2 in der Nebenschliessung, so ist

$$i = i_1 + i_2, \quad ri_1 = wi_2, \quad \text{also} \quad (w+r)i_1 = ri,$$

mithin die Ablenkung

$$G\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 = i_1 = \frac{ri}{w+r}\,.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$r = nV\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}\,.$$

Die primäre Rolle enthielt nur eine einzige Windungslage von einer Länge, gegen welche ihr Radius sowie die Dimensionen der ihre Mitte umgebenden secundären Spirale sehr klein waren: es konnte daher $V = 4\pi^2R^2kb(1+2a)$ gesetzt werden, wo R und k den Radius und die Windungszahl auf die Längeneinheit der primären Spirale, b die ganze Windungszahl der secundären Spirale, $2a$ die von den F[illegible] der primären Spirale her rü[illegible] Correction beze[illegible] welche nach Maxwell (2. Aufl. [illegible] [illegible]chnet wur[illegible] Correctionen werden ein[illegible] [illegible] Al[illegible] [illegible]tungen, welche zwischen [illegible] $r = 18$ [illegible] 0,94356 Ohm [illegible]

Lbg.

[illegible] par la méthode [illegible]

[illegible] [illegible]ehrigen Be- [illegible] wesent[illegible]

lich kleineren Wert ergeben haben, als die nach andern Methoden ausgeführten, auf folgende zwei Gründe zurückführen zu können.

1) Auf eine Ungenauigkeit in der Theorie der Methode. Es sei G die Galvanometer-Constante, L der Selbstinductions-Coefficient und R der Widerstand der Rolle, K das Trägheitsmoment und M das magnetische Moment des Magneten, H die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus, x der Ablenkungswinkel und J die Stromstärke zur Zeit t, $C\frac{dx}{dt}$ die von Reibungswiderständen herrührende Kraft. Bei geschlossener Rolle ist dann die Gleichung des Stroms und die der Bewegung des Magneten

$$(1) \qquad L\frac{dJ}{dt} + RJ + MG\frac{dx}{dt} = 0,$$

$$(2) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + MHx = MGJ,$$

während bei geöffneter Rolle die Bewegungsgleichung ist

$$(2^a) \qquad K\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + MHx = 0.$$

Bei geöffneter Rolle ist also, wenn τ_0 die Schwingungsdauer und λ_0 das logarithmische Dekrement bedeutet,

$$x = Be^{-\varepsilon_0 t}\sin\gamma_0 t,$$

wo

$$\varepsilon_0 = \frac{\lambda_0}{\tau_0} = \frac{C}{2K}, \quad \gamma_0^2 + \varepsilon_0^2 = n_0^2 = \frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\tau_0^2} = \frac{MH}{K}.$$

Bei geschlossener Rolle ergiebt sich aus (1) und (2), wenn man

$$\frac{M^2G^2}{2KR} = \alpha$$

setzt,

$$(3) \qquad \begin{cases} L\left(\frac{d^3x}{dt^3} + 2\varepsilon_0\frac{d^2x}{dt^2} + n_0^2\frac{dx}{dt}\right) \\ + R\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 2(\varepsilon_0 + \alpha)\frac{dx}{dt} + n_0^2 x\right) = 0, \end{cases}$$

$$x = Ae^{ct} + A'e^{c't} + A''e^{c''t},$$

wo $\varrho, \varrho', \varrho''$ die Wurzeln der Gleichung sind:

$$(4) \qquad L(\varrho^3+2\varepsilon_0\varrho^2+n_0^2\varrho)+R(\varrho^2+2(\varepsilon_0+\alpha)\varrho+n_0^2)=0.$$

Da $\frac{L}{R}$ sehr klein ist, so ist die reelle Wurzel ϱ dieser Gleichung sehr gross und nahezu $= -$ [redacted] $/L$; man kann also setzen

$$(5) \qquad \begin{cases} x = Ae^{-\frac{R}{L}t}+A_1e^{-\varepsilon' t}\sin\gamma(t-t_0) \\ \;\;= Ae^{-\frac{R}{L}t}+A_1e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}t}\sin\frac{\pi}{\tau}(t-t_0). \end{cases}$$

Zur genauern Bestimmung von ϱ' und ϱ'' setzen wir $\varrho = u+y$,

$$u^2+2(\varepsilon_0+\alpha)u+n_0^2=0,$$

also

$$u = -(\varepsilon_0+\alpha)\mp i\beta, \quad \beta^2 = n_0^2-(\varepsilon+\alpha)^2;$$

schreiben wir die Gleichung (4) in der Form

$$Lf(\varrho)+R\varphi(\varrho)=0,$$

so ergiebt sich als erster Näherungswert von y

$$y = -\frac{L}{R}\frac{f(u)}{\varphi'(u)} = -\frac{L}{2R}u\frac{u^2+2\varepsilon_0u+n_0^2}{u+\varepsilon_0+\alpha}$$

Setzen wir also

$$\alpha' \quad \ldots \quad -\alpha), \quad \ldots \quad \frac{l}{L}\frac{\alpha}{4}(2\beta^2-n_0^2),$$

so wird

...

also

...

m...

was d...

Die in $\varepsilon = \frac{\lambda}{\tau}$ vorkommende Schwingungsdauer τ lässt sich nicht mit hinreichender Genauigkeit beobachten, sondern muss aus τ_0 berechnet werden. Setzt man zu diesem Zweck

$$\varphi^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}, \quad \varphi_0^2 = 1 + \frac{\lambda_0^2}{\pi^2},$$

also

$$\varepsilon^2 + \gamma^2 = \pi^2 \frac{\varphi^2}{\tau^2}, \quad \varepsilon_0^2 + \gamma_0^2 = n_0^2 = \pi^2 \frac{\varphi_0^2}{\tau_0^2},$$

so folgt aus Gleichung (6) $\frac{\varphi}{\tau} = \frac{\varphi_0}{\tau_0}\left(1 + \frac{L}{R}\alpha\right)$,

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\lambda}{\tau} - \frac{\lambda_0}{\tau_0} = \frac{\varphi_0}{\tau_0}\left(\frac{\lambda}{\varphi} - \frac{\lambda_0}{\varphi_0}\right) + \frac{L}{R}\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0),$$

wodurch Gleichung (7) übergeht in

$$(8) \quad \begin{cases} R = \dfrac{M^2 G^2}{2K} \dfrac{\tau_0}{\varphi_0} \dfrac{1}{\dfrac{\lambda}{\varphi} - \dfrac{\lambda_0}{\varphi_0}} \left(1 + \dfrac{L}{R}\varepsilon\right) \\ \quad = \dfrac{M^2 G^2}{2K} \dfrac{\tau_0}{\varphi_0} \dfrac{1}{\dfrac{\lambda}{\varphi} - \dfrac{\lambda_0}{\varphi_0}} \left(1 + \dfrac{L}{R} \dfrac{\varphi_0}{\tau_0} \dfrac{\lambda}{\varphi}\right) \\ \quad = R_1\left(1 + \dfrac{L}{R_1}\varepsilon\right), \end{cases}$$

wo R_1 den ohne Berücksichtigung der Selbstinduction bestimmten Wert von R bezeichnet. Die Correction wegen der Selbstinduction ist also nur die Hälfte der gewöhnlich angewandten, welche sich aus Gleichung (7) ergeben würde, wenn man darin

ε ... $= \frac{\varphi_0}{\tau_0}\left(\frac{\lambda}{\varphi} - \frac{\lambda_0}{\varphi_0}\right)$, also $\frac{\varphi}{\tau} = \frac{\varphi_0}{\tau_0}$ oder $\varepsilon^2 + \gamma^2 = \varepsilon_0^2 + \gamma_0^2$

... d. h. wenn man in Gleichung (6) $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha$, $\gamma = \beta$ setzte,

... chung (4) $L = 0$ annähme.

... hung (8) stimmt genau mit der von Dorn, Wiedemann

... F. d. M. XVI. 1884. 974, auf anderm Wege ab-

... D. Ref.)

... ist noch nicht genügend, um die Diffe-

... eitern Grund sieht der Verfasser in

... erzeugten Transversal Magnetis-

mus des Magneten. Bezeichnet man mit v sein Volumen, so kann man das dadurch erzeugte magnetische Moment $= hvGJ$ setzen; dadurch bleibt Gleichung (1) ungeändert, während in Gleichung (2) ein Drehungsmoment des Erdmagnetismus $= HhvGJ$ hinzukommt, so dass die rechte Seite zu ersetzen ist durch

$$MGJ\left(1-hv\frac{H}{M}\right);$$

dadurch wird jetzt

$$\alpha = \frac{M^2G^2}{2KR}\left(1-hv\frac{H}{M}\right),$$

mithin

$$R = R_1\left(1+\frac{L}{R}\varepsilon\right)\left(1-hv\frac{H}{M}\right).$$

Beide Ursachen vereinigen sich also, um den Wert von R zu verkleinern. Lbg.

J. Kessler. Ueber die directe Messung von Ampères, Volts und Ohms mit der Tangentenbussole. Z. Realsch. X. 396-400.

Verfasser hat eine Tangentenbussole mit excentrischer Nadelaufhängung construirt. Wenn R den mittleren Radius der Windungen, a die Entfernung des Nadelmittelpunkts vom Mittelpunkt des m[illegible] die Länge der Magnetnadel in Centimeter[illegible] eine gewisse Constante und J die [illegible] Stromintensität bedeutet, so ist

$$J \text{ [illegible] } \frac{l^2 \sin^2\alpha}{(R^2+a^2)^2}\Big].$$

[illegible] wird [illegible] R und k die [illegible] J dan[illegible] α multipli- [illegible] Weise [illegible]

H. A. Lorentz. Over de toepassing van de tweede wet der mechanische warmte-theorie op de thermo-electrische verschijnselen. Amst. Versl en Meded. (3) I. 327-358.

H. A. Lorentz. Sur l'application aux phénomènes thermo-électriques de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur. Neerl Arch. XX. 129-170.

Eine physikalisch-mathematische Untersuchung über die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf die thermo-elektrischen Erscheinungen. Verfasser wurde dazu angeregt durch die Untersuchungen von W. Thomson, Clausius, Peltier, Budde und Le Roux, welche denselben Gegenstand auf theoretischem oder experimentellem Wege behandelten. Die drei Annahmen, auf welche Verfasser seine Untersuchung gründet, sind die folgenden: 1) Wenn ein isolirter Leiter elektrische Ladung besitzt, wird diese bei Erwärmung oder Abkühlung nicht ihre Grösse ändern. 2) Wenn der Leiter in allen Punkten dieselbe Temperatur hat, verteilt sich eine elektrische Ladung darüber nach den gewöhnlichen Gesetzen der Elektrostatik, so dass bei Erwärmung oder Abkühlung keine andere Aenderung in der Verteilung auftritt, als der veränderten Grösse und Gestalt entspricht. Die Kräfte, welche in Folge der Ladungen zwischen den verschiedenen Teilen eines Leiters wirken, können aus den gewöhnlichen Regeln der Elektrostatik abgeleitet werden. 3) Die Anwesenheit eines elektrischen Leiters in Berührung mit der Luftmasse hat keinen Einfluss auf den Druck dieser letzten; dieser hängt in gewöhnlicher Weise von der Temperatur und dem Volumen der Masse ab. Eine ausführliche Berechnung wird sodann auf diese Annahmen gegründet. Die Ergebnisse kommen zum Teil mit denen der obengenannten Forscher überein, in einigen Hinsichten weichen sie davon ab.

G.

e potentiel-thermodynamique et ses applica-

nnann. 1886

1) Im Folgenden bezeichnet dQ immer eine in dem System erzeugte und nach aussen abgegebene Wärmemenge, in Arbeitseinheiten ausgedrückt; es werden nur isotherme Zustandsänderungen betrachtet. Nach Clausius ist bekanntlich der Aequivalenzwert einer reversiblen Zustandsänderung $\int \frac{dQ}{T} = -\Delta S$, d. h. gleich dem negativen Zuwachs der Entropie S des Systems. Bei einer nicht reversiblen Zustandsänderung ist der Aequivalenzwert N der nicht compensirten Verwandlungen gleich dem ganzen Aequivalenzwert eines Kreisprocesses, welcher besteht aus der gegebenen Zustandsänderung und aus einer reversiblen Zustandsänderung, durch welche das System aus dem Endzustand 1 in den Anfangszustand 0 zurückgeführt wird; folglich, da nach dem Obigen der Aequivalenzwert der letztern $= \Delta S$ ist,

$$N = \int_0^1 \frac{dQ}{T} + \Delta S.$$

Nennen wir also bei einer isothermen, irreversiblen Zustandsänderung $TN = A_n$ die „nicht compensirte Arbeit“, so ist

$$\text{(a)} \qquad A_n = Q + T\Delta S.$$

Ist nun A_a die Arbeit der äussern Kräfte, L die erzeugte lebendige Kraft, U die innere Energie, so ist nach dem ersten Hauptsatz

$$A_a = Q + L + \Delta U,$$

mithin die nicht compensirte Arbeit A_n und die „compensirte Arbeit“ A_c

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} A_n = -\Delta U + T\Delta S - L + A_a, \\ A_c = Q - A_n = -T\Delta S = -\Delta Z, \text{ wo } Z = TS. \end{cases}$$

Ist L [illegible] ΔW, wo W das Potential der äussern Kräfte, falls ein [illegible] ex stir [illegible] hnet, so wird

$$[illegible] - \Delta\Omega,$$

wo [illegible]

[illegible]

„das th[illegible] genannt wird. Bestehen [illegible] Druck [illegible]

Volumen kann man also $W = 0$, mithin

$$(2b) \qquad \Omega = F = U - TS$$

gleich der „freien Energie" nach von Helmholtz setzen; und für Zustandsänderungen bei constantem Druck

$$(2c) \qquad \Omega = \Phi = U - TS + pv.$$

Da A_n immer positiv ist, also Ω nur abnehmen kann, so ist die Bedingung des stabilen Gleichgewichts des Systems die, dass Ω ein Minimum, also $\delta\Omega = 0$ ist für jede virtuelle Zustandsänderung.

2) Diese Begriffe und Sätze wendet der Verfasser zur Ableitung einer grossen Zahl interessanter Resultate an, welche allerdings zum Teil aus den neueren Untersuchungen von v. Helmholtz, Gibbs, Massieu u. A. schon bekannt waren, welche aber mittels der vorstehenden Begriffe eine einfache und strenge Begründung und einen übersichtlichen Ausdruck erhalten; wir heben im Folgenden nur das auf die Elektricität Bezügliche hervor.

a) Zunächst berechnet der Verfasser die Werte von Φ und Z für ein System elektrisch geladener Körper $a, b, c, \ldots$ mit den Ladungen q_a etc.; es ergiebt sich

$$(3) \qquad \begin{cases} \Phi = \Phi_0 + W + (\vartheta_a q_a + \vartheta_b q_b + \cdots), \\ Z = Z_0 + (h_a q_a + h_b q_b + \cdots); \end{cases}$$

darin bedeuten $\Phi_0 = U_0 - TS_0 + pv_0$ und $Z_0 = TS_0$ die Werte von Φ und Z für das ungeladene System, wenn man dessen sonstigen Zustand (also z. B. auch die Volumina, welche bekanntlich durch die Ladung eine Aenderung erfahren können) als identisch mit dem gegebenen Zustand des geladenen Systems annimmt;

$$W = \tfrac{1}{2}\int V dq$$

das elektrostatische Potential des Systems auf sich selbst; ϑ_a und h_a gewisse Constanten, welche bloss von der Natur des Körpers a, nicht von seinen Dimensionen etc. abhängen. Die ...ng des elektrostatischen Gleichgewichts des Systems ...m Obigen die, dass $d\Phi = 0$ ist für jede virtuelle

Verschiebung einer Elektricitätsmenge dq. Sind also die Körper der Art, dass die Elektricität durch sie hindurchgehen kann, ohne eine Zustandsänderung (z. B. chemische Zersetzungen) zu bewirken, und kommen keine Contacte zweier verschiedenartigen Körper vor, so muss bei Bewegung von dq innerhalb eines beliebigen der Korper $d\Phi = dW = 0$ sein, also $V =$ Const. Berühren sich zwei verschiedenartige Körper a und b, so muss $d\Phi = 0$ sein beim Uebergang von dq von a zu b, d. h.

$$(V_b - V_a)dq + (\vartheta_b - \vartheta_a)dq = 0,$$

also

$$(4) \qquad V_a - V_b = \vartheta_b - \vartheta_a,$$

d. h. im elektrischen Gleichgewichtszustand haben zwei sich berührende verschiedenartige Körper eine nur von ihrer Natur abhängige Potentialdifferenz.

b) Zur Berechnung der Wärmeerzeugung durch einen galvanischen Strom stellt der Verfasser folgende Hypothese auf: „Geht durch einen homogenen Teil eines Stromkreises in der Zeit dt eine Elektricitätsmenge $Jdt = dq$ von einem Punkte 1 nach einem Punkte 2, so ist die dabei erzeugte compensirte und nicht compensirte Arbeit dieselbe, als wenn während des Durchganges dieser Elektricitätsmenge alle übrigen elektrischen Ladungen unbeweglich [illegible] blieben." Ist [illegible] Stück (1,2) vom Widerstand R homogen, [illegible] die compensirte Arbeit $= 0$, die [illegible] Wärme muss also gleich der [illegible] mithin

$$RJ^2dt \text{ [illegible] } (V_1 - V_2)dq,$$

[illegible]

also [illegible]

Nach (3) und (4) ist aber

$$A_n = -d\Phi = (V_1 - V_2)dq + (\vartheta_b - \vartheta_a)dq$$
$$- (V_1 - V_2)dq + (V_{a0} - V_{b0})dq,$$

also ist auch hier die in dem Stück erzeugte Joule'sche Wärme gleich der nicht compensirten Arbeit. Folglich muss die beim Uebergang der Elektricität von b nach a erzeugte Peltier'sche Wärme gleich der compensirten Arbeit sein, d. h. nach (3)

$$(5) \qquad \Pi dq = A_c = (h_b - h_a)dq.$$

Hiernach ergiebt sich a priori keine Beziehung zwischen der Peltier'schen Wärme und der Potentialdifferenz an der Berührungsstelle $V_{a0} - V_{b0} = \vartheta_b - \vartheta_a$, was auch die Versuche zu bestätigen scheinen.

c) Befinden sich zwei Metalle z und k in einer zersetzbaren Flüssigkeit (z. B. Zink und Kupfer in Kupfervitriol), so ist in der offenen Kette wieder die Bedingung des elektrischen Gleichgewichts die, dass $d\Phi = 0$ sein muss beim Uebergang einer Elektricitätsmenge dq von z zu k, wobei eine mit dq proportionale Menge Zink aufgelöst und Kupfer ausgeschieden wird. Setzen wir nun die nicht compensirte Arbeit (oder Wärme), welche auch ausserhalb der Kette durch die stattfindenden chemischen Reactionen erzeugt werden würde, $-d\Phi_0 = Edq$, so ist nach (3), da man, wie der Verfasser zeigt, die Aenderung des auf die Flüssigkeit bezüglichen Teils von ϑ vernachlässigen kann,

$$(6) \qquad \frac{d\Phi}{dq} = V_k - V_z + \vartheta_k - \vartheta_z - E;$$

die Gleichgewichtsbedingung ist also

$$V_k - V_z + \vartheta_k - \vartheta_z = E,$$

...rend sie bei directer Berührung der Platten nach (4) sein

$$V'_k - V'_z + \vartheta_k - \vartheta_z = 0.$$

$$(V_k - V_z) - (V'_k - V'_z) = E,$$

...schenschaltung der Flüssigkeit wächst die Po...
...Polen der offenen Kette um E. Wird
...lüssigkeit durch einen Draht, z. B.

Arbeit nach Gleichung (1) des vorigen Referats

$$A_n = -\Delta U + \int_M^{M'} TdS,$$

wo dS die auf einem Wegelement von der Temperatur T statt findende Aenderung der Entropie bedeutet. ΔU hat denselben Wert, als wenn dq durch einen Draht von der Temperatur T_0 von M nach M' übergeht; dann ist aber $-\Delta U$ gleich der ganzen compensirten und nicht compensirten Arbeit, d. h. nach Gleichung (3) des vorigen Referats

$$-\frac{\Delta U}{dq} = -\frac{d(\Phi + Z)}{dq} = V + \vartheta + h - (V' + \vartheta' + h'),$$

also

$$\text{(a)} \qquad \frac{A_n}{dq} = (V + \vartheta + h) - (V' + \vartheta' + h') + \frac{1}{dq}\int_M^{M'} TdS.$$

Der Conductor bestehe z. B. aus drei Metallen a, b, c; die Temperaturen der Contactstellen seien T_1 und T_2; sind N und P zwei der Contactfläche unendlich nahe Punkte der Metalle a und b, so ist nach Gleichung (3) des vorigen Referats

$$\frac{1}{dq}\int_N^P TdS = \frac{1}{dq}\int_N^P dZ = -h_a(T_1) + h_b(T_1).$$

In $\frac{1}{dq}\int_M^N TdS$ ist $\frac{dS}{dq}$ proportional dem Wegelement ds und ist $=0$, wenn auf demselben T constant ist, man kann es also $= \lambda \frac{dT}{ds} ds$ setzen, also

$$\frac{1}{dq}\int_M^N dS = \int_M^N \lambda \frac{dT}{ds} ds.$$

Haben nun M und N dieselbe Temperatur, so kann man dq auf einem [illegible] von d[illegible]peratur von M nach N übergehen lass[illegible] [illegible]glich muss λ eine blosse Function [illegible] $\mu_a(T)$, so wird

$$[illegible]\, dT.$$

Dadurch wird

$$
\text{(b)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{dq} \displaystyle\int_M^{M'} TdS = -h_a(T_1) + h_b(T_1) - h_b(T_2) + h_c(T_2) \\ + \displaystyle\int_{T_0}^{T_1} \mu_a(T)dT + \int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)dT + \int_{T_2}^{T_0} \mu_c(T)dT. \end{cases}
$$

Also

$$
(1) \quad \begin{cases} \dfrac{A_n}{dq} = (V+\vartheta) - (V'+\vartheta') - [h_a]_{T_0}^{T_1} - [h_b]_{T_1}^{T_2} - [h_c]_{T_2}^{T_0} \\ + \displaystyle\int_{T_0}^{T_1} \mu_a(T)dT + \int_{T_1}^{T_2} \mu_b(T)dT + \int_{T_2}^{T_0} \mu_c(T)dT \\ \qquad = (V+\vartheta) - (V'+\vartheta') + E, \end{cases}
$$

wo $[h]_{T_0}^{T_1} = -h(T_0) + h(T_1)$. Die Bedingung des elektrischen Gleichgewichts ist $A_n = 0$, d. h.

$$
(2) \qquad V' - V = \vartheta - \vartheta' + E,
$$

während dieselbe bei directer Berührung der Endmetalle a und c von der constanten Temperatur T_0 nach Gleichung (4) des vorigen Referats sein würde $V'_0 - V_0 = \vartheta - \vartheta'$. Schliesst man die Kette durch Verbindung der Punkte M und M' mittels eines Drahtes von der Temperatur T_0, so zeigt die Unvereinbarkeit der Gleichung (2) mit der Gleichung $V' - V = \vartheta - \vartheta'$, dass kein elektrisches Gleichgewicht stattfindet, sondern ein Strom entsteht. Die elektromotorische Kraft dieses Thermostromes ist die durch Gleichung (1) bestimmte Grösse E; denn ist z. B. der Schliessungsdraht vom Metall a, so ist nach der im vorigen Referat aufgestellten Hypothese die in dem Kreise erzeugte Joule'sche Wärme gleich der nicht compensirten Arbeit beim Uebergange von dq von M nach M' und durch den Draht von M' nach M, also

$$
\frac{RJ^2 dt}{dq} = RJ = \frac{A_n}{dq} + (V'+\vartheta') - (V+\vartheta) = E.
$$

Die ganze in einem homogenen Drahtelement vom Widerstand dR in der Zeiteinheit erzeugte Wärme ist nach Gleichung (a) des vorigen Referats

$$
dQ = A_n - TdS,
$$

wo nach dem Obigen

$$A_e = J^2 dR \quad \text{und} \quad TdS = \mu(T)dT\,dq = J\mu(T)dT,$$

also

$$dQ = J^2 dR - J\mu(T)dT;$$

$J\mu(T)dT$ ist also die in dem Leiterelement in der Zeiteinheit absorbirte reversible Wärme, mithin $\mu(T)$ identisch mit der von Thomson so genannten „specifischen Wärme der Elektricitäts-Einheit".

Ferner muss bei einem Umlauf von dq durch den ganzen Kreis von M nach M' und durch den Draht von M' nach M der Zuwachs der Entropie

$$\int_M^{M'} dS + \int_{M'}^{M} dS = 0$$

sein; nehmen wir das Metall c identisch mit a an, betrachten also einen geschlossenen Kreis aus zwei Metallen a und b mit den Contact-Temperaturen T_1 und T_2, in welchem der Strom an der Contactstelle T_1 von a nach b geht, so geht der Wert von E in Gleichung (1) und die letzterwähnte Gleichung über in

(3)
$$E = (h_b - h_a)_{T_1} - (h_b - h_a)_{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} (\mu_b - \mu_a)\,dT$$
$$= \Pi_{T_1} - \Pi_{T_2} + \int^{T_1} (\mu_b - \mu_a)\,dT,$$
[illegible] $\int^{T} \frac{\mu_b - \mu_a}{T}\,dT$
[illegible] $\frac{\mu_b - \mu_a}{T}\,dT.$

[illegible] die beim [illegible] b nach [illegible]

mithin

$$E = -\int_{T_1}^{T} \frac{\Pi}{T}\, dT,$$

welche Gleichungen mit den von Thomson aufgestellten identisch sind. Lbg.

P. Duhem. Sur la théorie de l'induction électrodynamique. C. R. C 44-46.

Die Note enthält nur einen kurzen Abriss der Untersuchungen des Verfassers über das elektrodynamische Potential zweier Stromelemente; dasselbe leitet sich aus dem thermodynamischen Potential (vgl. die im Vorhergehenden besprochenen Abhandlungen des Verfassers) ab und hat die Form

$$P = ii'\left[\frac{1}{r}\cos(ds, ds') + \frac{d^2 R}{ds\, ds'}\right],$$

wo R eine unbestimmte Function von r ist, übereinstimmend mit den Resultaten von Clausius und v. Helmholtz.

Lbg.

A. Batelli. Conseguenze di una nuova ipotesi di Kohlrausch sui fenomeni termo-elettrici. Rom. Acc. L. Rend. (4) I 117-120.

Enthält einige durch die Erfahrung bestätigte Folgerungen aus der im Jahre 1875 von Kohlrausch aufgestellten Hypothese, welche schon teils von diesem selbst, teils von Budde entwickelt worden sind. Lbg.

...dler. Ueber die Spannungstheorie der elektro- ...chen Erscheinungen vom Standpunkt der Elasti- ...ie. Prag. Ber. 1883. 434-447.

...ell kann man sich bekanntlich die in einem ...nden elektrischen Kräfte als Elasticitäts-

kräfte vorstellen; und zwar wirkt auf jedes auf den Kraftlinien senkrechte Flächenelement ein normaler Zug $= \frac{K}{8\pi} R^2$, und auf jedes den Kraftlinien parallele Flächenelement ein gleich grosser normaler Druck, wo R die resultirende elektrische Kraft, K die Dielektricitätsconstante bezeichnet. Der Verfasser meint, dass derartige Kräfte, z. B. in einer auf den Kraftlinien senkrechten unendlichen Platte, sich aus der gewöhnlichen Elasticitätstheorie nicht ableiten liessen, falls die Platte isotrop sei, und macht daher die Annahme, dass in derselben durch die Elektrisirung eine um die Kraftlinien symmetrische Anisotropie entstanden sei; die für eine solche geltenden Elasticitätskräfte lassen sich dann mit den elektrischen Zugkräften $\mp \frac{K}{8\pi} R^2$ identificiren.

(Eine solche Identificirung ist allerdings in einer isotropen Platte nicht möglich, wenn man mit dem Verfasser die Verschiebungen parallel und senkrecht zur Oberfläche

$$u = v = 0, \quad w = cz$$

setzt, wohl aber, wenn man

$$u = ax, \quad v = -ay, \quad w = cz$$

annimmt; es ergiebt sich dann

$$c = \frac{1+2\mu}{E} \frac{K}{8\pi} R^2, \quad \frac{a}{c} = 1+2\mu,$$

wo E den Elasticitätsmodul, μ das Verhältnis der Quercontraction zur Längendi[illegible] bezeichnet [illegible] man von den allgemeineren, von Lorber[illegible] für die elektrischen Zugkräfte aus[illegible]. Indessen haben derartige [illegible]sse, solange man über den [illegible] Hypothese aufzustellen [illegible] Lbg.

[illegible]

Ein Condensator von der Capacität C und der Potentialdifferenz P wird n-mal in 1″ geladen und durch ein Galvanometer entladen; der Strom im Galvanometer ist dann $J = nCP$. Die Ladung geschieht durch Abzweigung von den Enden eines Widerstandes R, durch welchen ein Batteriestrom i fliesst; es ist dann $P = Ri$, also

$$\text{(a)} \qquad J = nCRi.$$

Ferner wird von den Enden eines Widerstandes x des Stromkreises i ein Strom J' abgezweigt und durch das Galvanometer geschickt; ist G der ganze Widerstand dieses Nebenkreises, so ist

$$\text{(b)} \qquad J' = \frac{xi}{G}\,.$$

Macht man nun $J' = J$, so folgt aus (a) und (b)

$$\text{(1)} \qquad C = \frac{x}{nGR}\,.$$

Eine andere Methode zur Bestimmung von C besteht darin, dass in den Stromkreis i eine inducirende Spirale eingeschaltet und derselben eine Inductionsspirale gegenübergestellt wird, welche n mal in 1″ einen Inductionsstrom (z. B. den Schliessungsstrom) durch das Galvanometer sendet; ist M das Potential der zwei Spiralen auf einander, G der (mit dem vorigen Wert übereinstimmende) Gesamtwiderstand des inducirten Kreises, so ist der Strom im Galvanometer

$$\text{(c)} \qquad J'' = \frac{nMi}{G}\,.$$

Macht man wieder $J'' = J$, so folgt aus (a) und (c)

$$\text{(2)} \qquad C = \frac{M}{GR}\,.$$

[illegible] ode erhält man, wenn man $\frac{R}{x} = R'$, $\frac{G}{x} = G'$

[illegible] 2) x eliminirt; dies giebt

$$[illegible] = \frac{1}{n^2G'R'M}\,,$$

motorische Kraft in dem Umgang p ist also

$$(1) \qquad R_p = {}_q\sum_1^n R_{pq}, \quad E_p = {}_q\sum_1^n E_{pq}.$$

Ferner werde die Stromstärke im Zweige (pq) gesetzt

$$(2) \qquad C_{pq} = C_p - C_q; \quad C_{pp} = C_p,$$

wo also C_p die Stromstärke ist, welche man in dem Umgang p annehmen kann; die Einführung der C_p als der n Unbekannten des Problems bildet das Eigentümliche und von der Kirchhoff'schen und Maxwell'schen Lösung Unterscheidende der Lösung des Verfassers. Bezeichnet ${}_{pq}\sum$ eine Summation über alle von einander verschiedenen Combinationen je zweier gleichen oder verschiedenen Indices p und q, ${}_{pq}\sum'$ eine eben solche, aber nur auf je zwei verschiedene Indices bezügliche, so ist die ganze im System erzeugte Wärme

$$(3) \qquad \begin{cases} H = {}_{pq}\sum R_{pq} C_{pq}^2 = {}_p\sum R_{pp} C_p^2 + {}_{pq}\sum' R_{pq} (C_p - C_q)^2 \\ \qquad = {}_p\sum R_p C_p^2 - 2\, {}_{pq}\sum' R_{pq} C_p C_q. \end{cases}$$

Es seien nun E'_p, C'_p andere an der Stelle der E_p in dem System angebrachte elektromotorische Kräfte und die ihnen entsprechenden Ströme, e_{pq} und e'_{pq} die beiden entsprechenden Potentialdifferenzen an den Enden des Zweiges (pq) (immer im Sinne der Ströme genommen); dann ist

$$\begin{aligned} {}_{pq}\sum C_{pq} e'_{pq} &= {}_p\sum C_p e'_{pp} + {}_{pq}\sum' (C_p - C_q) e'_{pq} \\ &= {}_p\sum_1^n C_p \, {}_q\sum_1^n e'_{pq} = {}_p\sum_1^n C_p \, {}_q\sum_1^n E'_{pq} = {}_p\sum_1^n C_p E'_p; \end{aligned}$$

nach dem Ohm'schen Gesetz ist aber $C_{pq} = \dfrac{e_{pq}}{R_{pq}}$, folglich

$${}_p\sum C_p E'_p = {}_{pq}\sum \frac{e_{pq} e'_{pq}}{R_{pq}} = {}_p\sum C'_p E_p.$$

…n wir

$$E'_p = E_p + \delta E_p, \quad C'_p = C_p + \delta C_p$$

$${}_p\sum C_p \delta E_p = {}_p\sum E_p \delta C_p,$$

$$2\sum E_p \delta C_p = 2\sum C_p \delta E_p,$$

in eine Kalotte transformirt, deren Kugelfläche durch Q geht, die Belegung der Kalotte, welche durch einen in Q befindlichen elektrischen Massenpunkt inducirt wird; hieraus folgt (Maxwell, 2. Aufl., § 180) die Gleichgewichts-Belegung der Kalotte, und als specieller Fall, indem man den Kugelmittelpunkt ins Unendliche rücken lässt, die Gleichgewichts-Belegung einer unendlichen Ebene mit einer kreisförmigen Oeffnung. Hieraus berechnet der Verfasser das Potential der Gleichgewichts-Belegung der Kalotte, sowie einer unendlichen Ebene mit kreisförmiger und mit elliptischer Oeffnung. Indem man ferner eine Kalotte K durch Inversion aus einem beliebigen Punkt Q ihrer Axe in eine andere Kalotte K' transformirt, erhält man aus dem Potential einer Gleichgewichts-Belegung von K das Potential einer durch den Punkt Q influenzirten Belegung von K', und daraus allgemeiner das Potential einer Kalotte in einem ihrer Axe parallelen homogenen Felde.

2) Es sei Φ das Geschwindigkeits-Potential einer unendlichen Flüssigkeit bei Abwesenheit der Kalotte, φ dasjenige bei Anwesenheit derselben; zunächst möge die Kalotte ruhen. Bezeichnet r die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkt der Kugelfläche vom Radius a, auf welcher die Kalotte liegt, und setzt man

$$(1) \qquad \varphi = \Phi + \Omega,$$

so ist die ausser der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ zu erfüllende Bedingung

$$(2) \qquad -\frac{d\Omega}{dr} = \frac{d\Phi}{dr}$$

für $r = a$, und zwar auf beiden Seiten der Kalotte. Nimmt man nun für Ω das Potential einer Doppelbelegung der Kalotte vom Moment σ, sodass also die Differenz der Werte von Ω an der Aussen- und Innenseite der Kalotte

$$\Omega_0 - \Omega_i = 4\pi\sigma$$

ist, und bezeichnet mit V das Potential einer einfachen Belegung der Kalotte von der Dichtigkeit σ, so ist bekanntlich

$$(3) \qquad \Omega = -\frac{1}{a}\frac{d(Vr)}{dr}.$$

P. Le Cordier. Actions électrodynamiques renfermant des fonctions arbitraires; hypothèses qui déterminent ces fonctions. Jordan J. (4) I. 357-401.

In einer frühern Abhandlung (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 1032) hat der Verfasser aus den zu Grunde gelegten, auf der Erfahrung beruhenden Principien den Satz abgeleitet, dass die Wirkung eines geschlossenen Stroms s' auf ein Stromelement ds sich reducirt auf eine Kraft mit den Componenten

$$(1)\quad \begin{cases} X(s', ds) = JJ'ds\left(C\frac{dy}{ds} - B\frac{dz}{ds}\right) \text{ etc.}, \\ \text{wo } A = \int\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dz'}{ds'} - \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{dy'}{ds'}\right)ds' \text{ etc.} \end{cases}$$

Um nun die ponderomotorische Wirkung eines Stromelementes ds' auf ein Stromelement ds zu bestimmen, fügt der Verfasser zu den früheren Annahmen noch die folgende hinzu: „Die ponderomotorische Wirkung zwischen ds' und ds ist proportional $JJ'dsds'$ und ausserdem nur abhängig von der Entfernung r der zwei Stromelemente und von den Winkeln, welche r, ds, ds' mit einander bilden, d. h. von

$$(a)\quad r,\ \frac{dr}{ds} = p,\ \frac{dr}{ds'} = p',\ \frac{d^2r}{ds\,ds'},\ \frac{dp}{ds'} = \frac{dp'}{ds} = q``.$$

Da der [illegible] (1) diesen [illegible] genügt, so ist die einfachste [illegible] von [illegible] die Wirkung von ds' auf ds [illegible] Componente

ist, wo A [illegible] ende [illegible]

[illegible]

Fun[illegible]

Wirku[illegible]

gegenges[illegible]

gende Kräfte $JJ'\,ds\,ds'\,F$ reducirt; aus den aus (2) und dem obigen Princip folgenden Gleichungen

$$Fp = \frac{d\varphi(r,p)}{ds'}, \quad Fp' = \frac{d\varphi(r,p')}{ds}, \quad F\frac{dr}{dx} = X_0 + \frac{dX_1}{ds'},$$

wo φ eine ebenfalls vorläufig unbestimmte Function ist, ergiebt sich

$$F = \frac{1}{p}\,\frac{d\frac{p^2}{r}}{ds'} = \frac{2}{r}\,\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'},$$

d. h. das Ampère'sche ponderomotorische Gesetz.

Die allgemeinste mit dem obigen Princip verträgliche Annahme ist die von Lévy, dass die Wirkung von ds' auf ds aus einer Kraft besteht, deren x-Componente durch die Gleichung (2) gegeben ist, und aus einem Kräftepaar mit der x-Componente $JJ'\,ds\,ds'\,\frac{dL}{ds'}$, wobei die Componenten R, S, S' der aus den Kräften $\frac{dX_1}{ds'}$ resultirenden Kraft (und ebenso des Kräftepaars) nach den Richtungen r, ds, ds' Functionen der Grössen (a) sind. Aus der Gleichung

$$\frac{dX_1}{ds'} = \frac{R}{r}(x - x') + S\frac{dx}{ds} + S'\frac{dx'}{ds'}$$

folgt nun, indem man die x-Axe $\perp$ r und ds' annimmt, $\frac{dX_1}{ds'} = S\frac{dx}{ds}$, folglich, wenn K eine willkürliche Function bezeichnet:

$$S = \frac{dK(r,p)}{ds'},$$

[illegible]d daraus weiter, wenn H eine andere willkürliche Function [illegible]hnet,

$$\frac{H}{r}(x - x') + S'\frac{dx'}{ds'} = \frac{d}{ds'}\left[H(r,p)(x - x')\right],$$

[illegible]

$$[illegible] \frac{d}{[illegible]}\left(Hr\frac{dr}{dx} + K\frac{dx}{ds}\right).$$

[illegible] dL [illegible] Die allgemeinsten Aus-

drücke für die x-Componenten der Kraft und des Kräftepaars von ds' auf ds sind also $JJ'ds\,ds'\,X$ und $JJ'ds\,ds'\,\frac{dL}{ds'}$, wo

$$(3)\quad \begin{cases} X = X_0 + \frac{d}{ds'}\left[H\left(r, \frac{dr}{ds}\right) r \frac{dr}{dx} + K\left(r, \frac{dr}{ds}\right)\frac{dx}{ds}\right], \\ \frac{dL}{ds'} = \frac{d}{ds'}\left[P\left(r, \frac{dr}{ds}\right) r \frac{dr}{dx} + Q\left(r, \frac{dr}{ds}\right)\frac{dx}{ds}\right], \end{cases}$$

und wo H, K, P, Q willkürliche Functionen sind.

Der Rest der Abhandlung, welcher sich mit körperlichen Stromsystemen beschäftigt, enthält nichts wesentlich Neues; die im Vorstehenden eingeführten willkürlichen Functionen kommen dabei nicht vor, da die Stromsysteme als aus geschlossenen linearen Strömen bestehend betrachtet werden.

Lbg.

R. Besser. Ueber die Verteilung der inducirten Elektricität auf einem unbegrenzten elliptischen Cylinder. Schlömilch Z. XXX. 257-273 u. 305-324.

1) Die Axe des Cylinders wird zur x-Axe genommen, die Coordinaten x, t, u eines Punktes werden ausgedrückt durch die Gleichungen

$$(1)\qquad x = x,\quad y = c\cos t\cos iu,\quad z = ic\sin t\sin iu;$$

in der yz-Ebene sind also die Curven u = const. Ellipsen, von denen eine $u = u$ die Basis des Cylinders bildet, und die Curven t = const. sind mit diesen confocale Hyperbeln; das Linienelement ist

$$(2)\qquad ds^2 = dx^2 + \psi(dt^2 + du^2),$$
$$\text{wo}\quad \psi = \frac{c^2}{2}(\cos 2iu - \cos 2t).$$

Setzt man das Potential einer Flächenbelegung des Cylinders

$$V = {}_h\Sigma(a_h \cos hx\, V_h + b_h \sin hx\, V'_h)$$

oder auch

$$V = \int_0^\infty (a_h \cos hx\, V_h + b_h \sin hx\, V'_h)\,dh,$$

so geht die Gleichung $\Delta V = 0$ über in

$$\frac{d^2 V_h}{dt^2} - \frac{d^2 V_h}{du^2} - \tfrac{1}{2}c^2h^2(\cos 2iu - \cos 2t)V_h = 0,$$

(ebenso für V_h'),

welche sich, wenn man $V_h = T(t)U(u)$ setzt, auflöst in

$$(3) \qquad \frac{d^2 T}{dt^2} + (\tfrac{1}{2}c^2h^2\cos 2t + k^2)T = 0,$$

$$(3^a) \qquad \frac{d^2 U}{du^2} - (\tfrac{1}{2}c^2h^2\cos 2iu + k^2)U = 0,$$

von denen die zweite durch die Substitution $u = iw$ mit der ersten identisch wird; k ist eine neue willkürliche Constante. Bezeichnen also $E(t)$ und $F(t)$ zwei particuläre Integrale der Gleichung (3) (die von Heine, Kugelfunctionen, I. p. 401 so genannte Function erster und zweiter Art des elliptischen Cylinders), so wird

$$V_h = (aE(t) + bF(t))(a'E(iu) + b'F(iu)).$$

Setzt man nach Heine

$$(4) \qquad E(t) = \sum_{0}^{\infty} (c_n \cos nt + s_n \sin nt), \qquad \text{analog } E(iu),$$

so ergiebt sich aus Gleichung (3)

$$E(t) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

wo

$$E_1 = \Sigma c_{2n}\cos 2nt, \quad E_2 = \Sigma c_{2n+1}\cos(2n+1)t,$$
$$E_3 = \Sigma s_{2n+1}\sin(2n+1)t, \quad E_4 = \Sigma s_{2n}\sin 2nt,$$

und wo in jeder dieser vier Functionen die Coefficienten proportional dem willkürlich bleibenden ersten derselben und übrigens ganze Functionen von k^2 und $\frac{1}{h^2c^2}$ sind; diese vier Functionen bilden also vier verschiedene Klassen der $E(t)$. Die Bedingung, dass diese Reihen convergiren, dass also c_n und $s_n = 0$ ist für $n = \infty$, liefert eine Gleichung, aus welcher sich für jedes h unendlich viele Werte k_ν von k ergeben; zur Abkürzung setzen wir im Folgenden

$$E(t, h, k_\nu) = E_\nu(t) \quad \text{etc.}$$

2) Aus Gleichung (3) und (4) ergiebt sich für reelle Werte von t:

$$(k_\nu^2-k_\mu^2)\int_0^{2\pi} E_\mu(t)E_\nu(t)dt = \left[E_\mu \frac{dE_\nu}{dt} - E_\nu \frac{dE_\mu}{dt}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

folglich

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} E_\mu(t)E_\nu(t)dt = 0,$$

wenn μ und ν verschieden sind; ferner wird die in $E_\nu(t)$ vorkommende willkürliche Constante so bestimmt, dass

$$(5^a) \qquad \int_0^{2\pi} [E_\nu(t)]^2 dt = \pi$$

wird.

Hieraus ergiebt sich in bekannter Weise die Entwickelung einer von 0 bis 2π, d. h. für alle Punkte der Ellipse, gegebenen Function $f(t)$ in eine nach den $E_\nu(t)$ fortschreitende Reihe, nämlich

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu E_\nu(t), \quad \text{wo} \quad a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)E_\nu(t)dt.$$

Drückt man ferner eine beliebig auf der Oberfläche des Cylinders gegebene Function $\varphi(x,t)$ durch ein Fourier'sches Integral aus,

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dh \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,t)\cos h(x-\xi)d\xi$$

(wozu aber erforderlich ist, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,t)d\xi$ endlich ist), so ergiebt sich:

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(x,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^{\infty} [a_\nu(h)\cos hx + b_\nu(h)\sin hx]E_\nu(t)dh, \\ \text{wo} \\ a_\nu(h) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos h\xi d\xi \int_0^{2\pi} \varphi(\xi,t)E_\nu(t)dt, \\ b_\nu(h) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \sin h\xi d\xi \int_0^{2\pi} \varphi(\xi,t)E_\nu(t)dt. \end{cases}$$

3) Durch die Substitution

$$ic\sin iu = \varrho, \quad \tfrac{1}{2}c^2h^2+k^2 = k_1^2$$

geht die Differentialgleichung (3^a) für $E(iu)$ und $F(iu)$ über in

$$(\varrho^2+c^2)\frac{d^2E}{d\varrho^2} + \varrho\frac{dE}{d\varrho} - (h^2\varrho^2+k_1^2)E = 0,$$

welche, wenn man c gegen ϱ vernachlässigt, mit der Gleichung der Cylinderfunctionen $J^{\lambda_\nu}(ih\varrho)$ und $Y^{\lambda_\nu}(ih\varrho)$ identisch wird. Für $u = \infty$ gehen also $E(iu)$ und $F(iu)$ in $J^{\lambda_\nu}(ih\varrho)$ und $Y^{\lambda_\nu}(ih\varrho)$ für $\varrho = \infty$ über, es ist für $u = \infty$ also $E(iu) = \infty$, $F(iu) = 0$. Aus (3^a) folgt

$$F(iu)\frac{dE(iu)}{du} - E(iu)\frac{dF(iu)}{du} = \text{Const.},$$

und indem man hierin $u = \infty$ setzt, ergiebt sich Const. $= 1$; mithin ist

$$(7)\qquad F(iu) = E(iu)\int_u^\infty \frac{du}{[E(iu)]^2}.$$

4) Für die reciproke Entfernung zweier Punkte (x, t, u), (x_1, t_1, u_1) ergiebt sich nach Gleichung (6)

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{4}{\pi}\,{}_\nu\Sigma\displaystyle\int_0^\infty \cos h(x-x_1)E_\nu(t)\,F_\nu(iu)E_\nu(t_1)\,E_\nu(iu_1)dh \\ \qquad\qquad (u > u_1), \\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{4}{\pi}\,{}_\nu\Sigma\displaystyle\int_0^\infty \cos h(x-x_1)E_\nu(t)\,E_\nu(iu)E_\nu(t_1)F_\nu(iu_1)dh \\ \qquad\qquad (u < u_1). \end{cases}$$

Das Potential einer Belegung des Cylinders u von der Dichtigkeit q ist

$$V = \int\frac{q}{r}\,d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} dx\int_0^{2\pi} q\,\sqrt{\psi}\,\frac{dt}{r},$$

wo ψ durch Gleichung (2) bestimmt ist; setzt man nun

$$(9)\quad \sqrt{\psi}\,q = {}_\nu\Sigma\int_0^\infty\Big[a_\nu(h)\cos hx + b_\nu(h)\sin hx\Big]E_\nu(t)dh,$$

wo a_ν und b_ν sich nach Gleichung (6) mittels q bestimmen, (aber unter der Bedingung, dass $\int_{-\infty}^{\infty} q(x)dx$ endlich ist, dass also z. B. nicht q von x unabhängig ist), so ergiebt sich mittels Gleichung (8) für einen innern, resp. äussern Punkt (x_1, t_1, u_1)

$$(9^*)\quad \begin{cases} V_i = 4\pi\,{}_\nu\Sigma\int_0^\infty\Big[a_\nu(h)\cos hx_1 + b_\nu(h)\sin hx_1\Big] \\ \qquad\qquad \times F_\nu(iu)\,E_\nu(t_1)\,E_\nu(iu_1)\,dh, \\ V_a = 4\pi\,{}_\nu\Sigma\int_0^\infty\Big[a_\nu(h)\cos hx_1 + b_\nu(h)\sin hx_1\Big] \\ \qquad\qquad \times E_\nu(iu)\,E_\nu(t_1)\,F_\nu(iu_1)\,dh. \end{cases}$$

Setzt man den auf der Oberfläche des Cylinders stattfindenden Wert des Potentials beliebiger Massen nach Gleichung (6)

$$V_o = {}_\nu\Sigma\int_0^\infty\Big[A_\nu(h)\cos hx + B_\nu(h)\sin hx\Big]E_\nu(t)\,dh$$

(unter der Bedingung, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} V_o\,dx$ endlich, also z. B. nicht V_o constant ist), und identificirt diesen Wert mit dem Wert von V_i oder V_a in (9^*), so erhält man für den Wert des Potentials in einem innern oder äussern Punkt, ausgedrückt durch den Wert an der Oberfläche,

$$(10)\quad \begin{cases} V_i = 4\pi\,{}_\nu\Sigma \; [\text{illegible}] \cos hx_1 + [\text{illegible}] \\ \qquad [\text{illegible}]\; E_\nu\,(iu \;[\text{illegible}] \\ \qquad [\text{illegible}]\; E_\nu\,(iu \;[\text{illegible}] \\ V_a = 4\pi\,{}_\nu\Sigma\int_0 \; [\text{illegible}] + B \;[\text{illegible}] \\ \qquad [\text{illegible}]\;)\,dh \end{cases}$$

Schl[illegible] man ohne w[illegible] und [illegible]sern, resp[illegible] Green[illegible] durch die [illegible] nern, resp[illegible] V = [illegible] Problem de[illegible]tellung [illegible]

A. Koepsel. Bestimmung der Constante für die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Natriumlichtes in Schwefelkohlenstoff. Wiedemann Ann. (2) XXVI. 456-480

Mathematisch ist in der wesentlich experimentellen Arbeit nur die Berechnung der Potentialdifferenz, welche eine aus neben und über einander gelegten Windungen bestehende Rolle in zwei Punkten der Axe hervorbringt. Die Rechnung selbst enthält nichts Bemerkenswertes. Wn.

R. Colley. Ueber einige neue Methoden zur Beobachtung elektrischer Schwingungen, und einige Anwendungen derselben. Wiedemann Ann. (2) XXVI. 432-456

1) In einer Nebenschliessung eines Kreises, welcher eine Batterie und eine Spirale enthält, ist ein Condensator von der Capacität c, dessen eine Belegung zur Erde abgeleitet ist, und ein Galvanometer eingeschaltet. Solange der erste Kreis geschlossen ist, geht der Strom nur durch diesen; wird er unterbrochen, so geht durch den zweiten Kreis ein periodischer Strom i (positiv gerechnet im Sinne des Entladungsstroms des positiv geladenen Condensators). Ist v das Potential der isolirten Be[...]ung zur Zeit t, p_1 der Selbstinductions-Coefficient der Spirale, [...] der Galvanometerrolle, $p_1 + p_2 = p$, r der Widerstand des [...] Kreises, so ist

$$i = -c\frac{dv}{dt}, \quad ri = v - p\frac{di}{dt}.$$

[...]e) Schwingungsdauer des Stroms, λ das logarith[...]nt, ferner

$$[...]\frac{\lambda}{\tau}, \quad \frac{1}{pc} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau^2}, \quad \frac{\lambda}{\pi} = \operatorname{tg}\delta,$$

[...]imum von v, und $v = v_0$, $i = 0$, für $t = 0$, [...]bigen Gleichungen:

$$[...] \quad i = \sqrt{\frac{c}{p}}\frac{v_0}{\cos\delta}e^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\sin\frac{\pi}{\tau}t.$$

2) Zur directen Beobachtung von τ hat der Verfasser verschiedene Methoden angewandt, von denen die folgende die besten Resultate gab. In der Rolle des Galvanometers befindet sich ein magnetisirter Spiegel, vor der Rolle dreht sich mittels eines Uhrwerks eine Scheibe mit einer kleinen Oeffnung, deren Spiegelbild in einem Mikroskop mit einem in seiner Brennebene befindlichen Mikrometer beobachtet wird. Während der kurzen Zeit, wo sich das Bild der Oeffnung im Gesichtsfeld befindet, kann ihre Bewegung als vertical und gleichförmig betrachtet werden, $s = at$; geht durch die Rolle ein Strom, so combinirt sich damit eine horizontale periodische Bewegung

$$x = be^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t + \gamma\right),$$

das Bild beschreibt also eine Sinuscurve

$$x = be^{-\frac{\lambda}{a\tau}s} \sin\left(\frac{\pi}{a\tau} s + \gamma\right),$$

deren halbe Wellenlänge $l = a\tau$ man auf dem Mikrometer misst, woraus sich, da a bekannt ist, τ ergiebt. Damit der Anfangspunkt der Sinuscurve im [illegible] auf dieselbe Stelle des Mikrometers fällt, unterbricht die [illegible] selbst mittels [illegible] an ihr angebrachten Vorsprungs [illegible] Umdre[illegible] den Hauptstrom, der sich dann [illegible]

3) Zur Beobacht[illegible] eine Funkenstrecke eingesc[illegible] zwei Rollen, deren Wirkung[illegible] Rol[illegible] aber ein [illegible] sin[illegible] setzt ge[illegible] die [illegible] die [illegible] Magnet[illegible] Elektr[illegible]

$$Q = [illegible]$$

entspricht, w[illegible] kung und dem [illegible] berechnet, λ bestim[illegible]

Definitive Beobachtungen hat der Verfasser wegen mangelhafter Apparate noch nicht ausgeführt. Lbg.

A. Oberbeck. Ueber eine der Resonanz ähnliche Erscheinung bei elektrischen Schwingungen.

Wiedemann Ann (2) XXVI. 245-253.

Wenn in einer mit den zwei Belegungen eines Condensators verbundenen Drahtrolle periodische Inductionsstösse erregt werden, so entstehen im Draht elektrische Schwingungen, deren Amplitude analog den akustischen Resonanzerscheinungen ein Maximum sein muss, wenn die Periode der Inductionsstösse gleich der der Eigenschwingungen des Stromkreises ist. Dies ergiebt sich auch aus der Theorie. Ist nämlich n die Zahl der Inductionsstösse in 1'', $\lambda = 2\pi n$, $E \cos \lambda t$ die äussere elektromotorische Kraft, p das Selbstpotential der Rolle, w ihr Widerstand, V die Potentialdifferenz und c die Capacität des Condensators, so gelten die Gleichungen

$$p\frac{di}{dt} + wi + V = E\cos\lambda t, \quad i = c\frac{dV}{dt},$$

woraus, wenn man $\operatorname{tg}\delta = \frac{w}{\frac{1}{c\lambda} - p\lambda}$ setzt, folgt

$$i = -\frac{E\sin(\lambda t - \delta)}{\sqrt{\left(\frac{1}{c\lambda} - p\lambda\right)^2 + w^2}},$$

[illegible] an einem Dynamometer beobachtete Ablenkung

$$\alpha = k\frac{E^2}{\left(\frac{1}{c\lambda} - p\lambda\right)^2 + w^2}.$$

[illegible] Maximum, wenn $\lambda = \frac{1}{\sqrt{pc}} = \frac{2\pi}{\tau}$ ist, wo τ die [illegible] hwingungen des Stromkreises ist. Die Beob- [illegible] diese Folgerung der Theorie.

Lbg.

G. Carey Foster. Ueber eine veränderte Form der Wheatstone'schen Brücke, und Methoden zur Messung kleiner Widerstände. Wiedemann Ann. (2) XXVI. 239-245.

Die zwei ersten Seiten des Wheatstone'schen Vierecks bestehen aus zwei Widerständen a und b, die dritte aus dem zu messenden Widerstand x, dem Zuleitungswiderstand s und dem Widerstand r des geradlinigen Messdrahtes, die vierte aus einem kleinen Widerstand ϱ, dem Zuleitungswiderstand s' und dem Widerstand $L-r$ des Messdrahtes, wo L dessen Gesamtwiderstand bezeichnet; darauf werden x und ϱ mit einander vertauscht. Steht in beiden Fällen das Galvanometer auf 0, so ist im ersten Falle

$$\frac{a}{b} = \frac{x+s+r}{\varrho+s'+L-r}, \text{ im zweiten } \frac{a}{b} = \frac{\varrho+s+r'}{x+s'},$$

woraus $x-\varrho = r'-r$.

Der Verfasser giebt weiter eine Methode zur Calibrirung des Messdrahtes an. Lbg.

W. König. Bestimmung einiger Reibungscoefficienten, und Versuche über den Einfluss der Magnetisirung und Elektrisirung auf die Reibung der Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. [illegible] XXV. 618-625.

Die capillare [illegible] re wur[illegible] magnetisches oder elektrisches Feld [illegible] eines Magneten, oder zwischen d[illegible] Condensators). Es konnte bei de[illegible] sulfat und Schwefelkohlenstoff [illegible] er Elektrisir[illegible] Rei[illegible]

C. Die[illegible] [illegible] schen [illegible] (2) XXV[illegible]

Die Para[illegible] satorplatte, [illegible]

einem bestimmten Moment wurde die Verbindung der obern Condensatorplatte mit der ladenden Batterie aufgehoben, gleich darauf die Platte mit dem Elektrometer und mit der Erde in Verbindung gesetzt, also der Condensator entladen, und im nächsten Moment die Verbindung mit der Erde aufgehoben und das wieder auftretende Potential des Rückstandes von Minute zu Minute am Elektrometer abgelesen. Zur Berechnung der Versuche stellt der Verfasser für das Potential des polarisirten Dielektricums nach der Entladung eine Differentialgleichung auf, welche mit derjenigen der Wärmefortpflanzung in einem ausstrahlenden Stabe übereinstimmt und aus andern Voraussetzungen schon von Riemann abgeleitet worden ist, deren Herleitung auf dem vom Verfasser eingeschlagenen Wege aber wesentlichen Bedenken zu unterliegen scheint. Uebrigens stimmen die mitgeteilten Beobachtungen gut mit der Formel, deren Constanten je nach der Dauer der Ladungszeit verschieden bestimmt wurden, überein.

Lbg.

H. Jahn. Ueber die Gültigkeit des Joule'schen Gesetzes für Elektrolyte. Wiedemann Ann. (2) XXV. 49-71.

Die mit einem polarisationsfreien Elektrolyten (Zinksulfat mit Zinkelektroden oder Kupfersulfat mit Kupferelektroden) gefüllte Zersetzungszelle befand sich in einem Bunsen'schen Eiscalorimeter; für die entwickelte Wärmemenge W fand sich die Joule'sche Gleichung $W = \alpha RJ^2$ bestätigt, indem sich α constant (gleich dem Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit) ergab.

Lbg.

[illegible]ahn. Ueber die vom elektrischen Strom bei der [illegible]ung von Elektrolyten geleistete Arbeit. [illegible] Ann (2) XXV 525-53[illegible].

[illegible] der vorstehend besprochenen Abhandlung aus[illegible] ist die in einem polarisationsfreien Elektro[illegible]me $W = \alpha RJ^2$ oder, wenn P die Potential-

$$= \frac{C(N - M\sin\varphi_0 + \varepsilon v M\cos\varphi_0)}{1+\gamma\Pi},$$

wo M, N, Π die oben angegebenen Werte haben; man erhält also die Gleichung

(3) $M(1+\gamma\Pi)\sin\varphi_0 = C(N - M\sin\varphi_0 + \varepsilon v M\cos\varphi_0)$,

welche, da M, N und Π von i abhängig sind, mit der Gleichung (2) für i zu verbinden ist, um φ_0 zu bestimmen.

In Gleichung (2) ist aber auch noch das Glied $E_s = -\varrho v i$, welches nach Clausius die elektromotorische Kraft der Stromwechsel an den Contactfedern ausdrückt, von der Commutatorstellung abhängig: dasselbe rührt nämlich von der Induction her, welche eine Spule nach ihrem Durchgang durch die Contactstelle auf sich selbst und auf die benachbarte Spule derselben Windungshälfte ausübt; es kann daher $E_s = -\varepsilon v\left(i_0 - \frac{i}{2}\right)$ gesetzt werden, wo i_0, die Stromstärke [illegible] in sich geschlossenen Spule, von φ_0 abhängt. Indem [illegible]fasser nach dem obigen $f(\varphi_0) = 0$ setzt, entwickelt e[illegible]sdruck für F [illegible]ction von φ_0.

F. Kolaček. Beitrag zu[illegible] der Gra[illegible] Maschine. Prag. Ber. 29-45 [illegible]

De[illegible] giebt nur die [illegible] Ring[illegible] wirksa[illegible]motorischen K[illegible] tigt er [illegible]ung der fr[illegible] Stromsch[illegible] wie die W[illegible] der Ringw[illegible] Hauptt[illegible] sich mit dem [illegible] Folge der Schw[illegible] hälften ein disco[illegible] motorischen Kraft [illegible] magnete ergiebt, wel[illegible] Stromschwankungen mit d[illegible] erzeugt.

R. Lamprecht. Ueber biegsame Stromleiter unter magnetischer Einwirkung. Wiedemann Ann. (2) XXV. 71-80.

Der Verfasser löst die schon von Riecke (dessen Arbeit übrigens dem Verfasser unbekannt gewesen ist) aufgestellten und für den Fall eines homogenen Magnetfeldes gelösten Differentialgleichungen (Riecke, Wied. Ann. XXIII, vgl. F. d. M. XVI. 1884. 1010) für den Fall, dass die Kraft von einem einzelnen Magnetpol ausgeht. Die Integration dieser Gleichungen zeigt, dass der Stromleiter eine kürzeste Linie auf einem Rotationskegel bildet, dessen Spitze der Magnetpol ist, dass sie also durch Abwickelung des Kegels in eine Gerade übergeht. Ferner löst er auch die Differentialgleichungen für den Fall zweier entgegengesetzt-gleichen Magnetpole, auf deren Symmetrieebene die Endpunkte des Fadens liegen, in welchem Falle die ganze Curve in dieser Ebene liegt. Lbg.

L. Lorenz. Bestimmung der elektrischen Widerstände von Quecksilber-Säulen in absolutem elektromagnetischen Masse. Wiedemann Ann. (2) XXV. 1-31.

Das angewandte Princip ist folgendes. Die Hauptleitung ...ält eine Batterie, die genau calibrirte, mit Quecksilber ge... Glasröhre, deren Widerstand bestimmt werden soll, und ...vale; innerhalb derselben dreht sich eine den Windungen ... Metallscheibe, und von der Axe und von einem Punkt ... derselben ist eine Ableitung gemacht, welche ein ... enthält und durch zwei Löcher der Glasröhre in ... geführt ist. Die Tourenzahl n wird so regulirt, ...egengesetzten elektromotorischen Kräfte in der ...fheben, also das Galvanometer keine Ablen... ...n diesem Moment bestimmt (durch Funken, ... Secunden auf einen um die Kreisscheibe ...erspringen). Ist J_1 die Stromstärke ...ber-Säule zwischen zwei Löchern, ...chen den zwei Löchern, so ...otationsstroms $E_1 = CnJ_1$,

ferner in dem betrachteten Augenblick $wJ = E_1$, also, da in diesem Augenblick $J_1 = J$ ist,

$$(1) \qquad w = Cn.$$

Zur Bestimmung von C hat man, wenn γ die nach der Rotationsaxe (der z-Axe) gerichtete Componente der Magnetkraft einer einzelnen, um z von der Scheibe entfernten Windung der Spirale vom Radius R' ist, für die Componenten der dieser Windung entsprechenden elektromotorischen Kraft in einem Punkt (ϱ, φ) der Scheibe

$$E_x = -2\pi n\varrho\gamma\cos\varphi, \quad E_y = -2\pi n\varrho\gamma\sin\varphi,$$

wo

$$\gamma = -R'\frac{d(\varrho P)}{\varrho d\varrho}, \quad P = \int^{2\pi} \frac{\cos\psi}{r}\,d\psi,$$

$$r^2 = z^2 + R'^2 + [illegible] \cos\psi.$$

Die ganze Summe der elektron[illegible] Kräfte längs eines Radius der Scheibe ist also, we[illegible] Radius d[illegible] bezeichnet,

$$E = \int_0^R E_\varrho d\varrho = 2\pi n R' \int_0 [illegible] 2\pi n RR' [illegible]$$

und die v[illegible]ntlichen Windungen [illegible] elektrom[illegible] Kraft, w[illegible] Entfernung zwei[illegible] am [illegible] $-z$, der[illegible]chen der Spira[illegible]

$$\frac{e}{[illegible]} = C = \frac{2\pi}{\delta} R [illegible]$$

$$P = \int_0^{[illegible]} [illegible] z^2 + R^2 [illegible]$$

Es ergab sich im [illegible] ksilber[illegible]

A. Serpieri. Die me[illegible] elektromagnetischen ab[illegible] auf mehrfache Aufgaben. [illegible] bach. Wien. Bartleben.

W. H. Schultze. Ueber die Wechselwirkung zweier zu einander senkrechter magnetischer Verteilungen. Wiedemann Ann. (2) XXIV. 643-663.

Bekanntlich hat W. Siemens aus der Theorie der drehbaren Molecularmagnete die Folgerung gezogen, dass die axiale Magnetisirung eines Eisenstabes durch eine transversal magnetisirende Kraft geschwächt werden muss, und er hat die Richtigkeit dieser Folgerung dadurch experimentell nachgewiesen, dass er die Wand einer Eisenröhre aussen und innen mit einem axial laufenden, von einem Strom durchflossenen Draht bedeckte und die Röhre in gewöhnlicher Weise in eine Magnetisirungsspirale brachte, sodass die erste Kraft eine transversale, die zweite eine axiale Magnetisirung bewirkte; da die erste Magnetisirung nicht nach aussen wirkt, so konnte die zweite durch die Ablenkung eines Galvanometers gemessen werden, und es ergab sich in der That eine Abnahme derselben, sobald die erste Kraft wirkte. Der Verfasser hat diese Versuche in ausgedehnterem Masse und mit demselben Ergebnis wiederholt. Er erklärt dasselbe dadurch, ...s, wenn eine constante magnetisirende Kraft R mit den Com...nten X, Y, Z wirkt und man die Wirkung des inducirten ...tismus vernachlässigt, die magnetischen Momente der ...inheit nach Kirchhoff durch die Gleichungen bestimmt sind

$$\frac{\alpha}{X} = \frac{\beta}{Y} = \frac{\gamma}{Z} = f(R);$$

...iale magnetisirende Kraft X so gross, dass sie ...s Maximum der Magnetisirung bewirkt, wie das ... des Verfassers wahrscheinlich der Fall war, ... hinzukommende transversal-magnetisirende ...nenten Y und Z $f(R)$ sein Maximum über... ...nehmen, wodurch dann auch α abnehmen ...n, dass bei schwächeren axial-mag... ...tende transversal-magnetisirende ...gnetischen Moments bewirken

Lbg.

A. Gockel. Ueber die Beziehungen der Peltier'schen Wärme zum Nutzeffect galvanischer Elemente.

Wiedemann Ann. (2) XXIV 618-642.

Bezeichnet C die in einem galvanischen Element von der elektromotorischen Kraft E durch die chemischen Processe erzeugte, G die in Stromarbeit umgesetzte Wärme (beide für die durchgehende Stromeinheit), T die absolute Temperatur, so ist bekanntlich nach v. Helmholtz (Berl. Berichte 1882)

$$(1) \qquad C - G = -T\frac{dE}{dT}.$$

(Bei einem Thermostrom ist bekanntlich $-T\frac{dE}{dT}$ gleich der durch die Stromeinheit an den Contactstellen erzeugten Peltier'schen Wärme; ob dies auch für einen Hydrostrom gilt, wie der Verfasser annimmt, ist jedenfalls zweifelhaft.) Um die Gleichung (1) einer experimentellen Prüfung zu unterziehen, nahm der Verfasser für C die bekannten Werthe. G wurde aus der elektromotorischen Kraft E bestim[...] [...]hen sich nämlich C, G E[...] auf das Daniell'sche Elem[...] $\frac{G}{G_{I}} = \frac{E}{[...]}$ [...] da bekanntlich $G_D = C_D$ ist, G [...] der W[...] [...]urde für jede der in dem Elem[...] [...]nden P[...] [...]en einzeln bestimmt, z. B. be[...] Ele[...] (Zn, ZnS[...] ($ZnSO_4$, CuS[...] [...] Gläser[...] [...]m Zinkvi[...] [...] das el[...] [...]nd die el[...] den Th[...] [...]ch der [...] wurde [...] [...] fand [...] Vorzeichen [...] hat [...] Gleichung (1[...]

E. Budde. Zur [...]

Wiedemann Ann. (2) [...]

Enthält eine der Erm[...] Theorie von Kohlrausch, au[...]

1884, p. 991, bei Gelegenheit einer frühern Abhandlung des Verfassers aufmerksam gemacht worden ist. Lbg.

E. Budde. Ueber eine von Gauss angeregte Ableitung elektrodynamischer Punktgesetze. Wiedemann Ann. (2) XXV. 566-601.

Der Verfasser erinnert zuerst an den von Gauss ausgesprochenen Gedanken, „man müsse die Zusatzkräfte, durch welche das elektrodynamische Punktgesetz sich vom elektrostatischen unterscheidet, aus der Annahme ableiten, dass die elektrische Kraftwirkung sich nicht momentan, sondern, ähnlich wie das Licht, in der Zeit fortpflanze". Er kritisirt zunächst die von C. Neumann („Die Principien der Elektrodynamik") gegebene Ausführung dieses Gedankens, und zeigt, dass eine blosse „Verspätung der Kraft", d. h. die Annahme, dass die Kraft in Folge der zur Fortpflanzung nötigen Zeit lediglich einer andern als der augenblicklichen Lage der zwei Teilchen entspreche, zu dem unzulässigen Resultat führen würde, dass an dem System zweier gleichbewegten, also relativ ruhenden Teilchen eine das System als Ganzes bewegende Kraft aufträte. Seine Behandlung des Problems ist im wesentlichen folgende.

1) Zwei ruhende Punkte. Der von der wirkenden ... ausgehende Zustand des kraftvermittelnden Mediums ...n") wird in der Entfernung r von ϵ dargestellt durch ... die daraus von der Masse ϵ' aufgenommene Kraft ... ist $K' = \varphi(V)$, wo $\varphi(V)$ ausser V nur auf ϵ' be... enthält. Nun ist erfahrungsmässig $K' = \frac{C}{r^2}$;

...ngen werden also erfüllt, wenn man setzt

$$\frac{a}{r}, \quad K' = -b' \frac{dV}{dr},$$

... ϵ' abhängt; schreibt man

$$\frac{dV}{dm'},$$

...les von V am Ort von ϵ' ... ausser V nichts auf ϵ

Bezügliches enthält. Die Wirkung von ε auf die Umgebung wird nun als eine Aussendung von N Strahlen nach allen Richtungen aufgefasst, welche sich mit der sehr grossen Geschwindigkeit c fortpflanzen, und deren jeder eine bestimmte „Wirkungsfähigkeit“ e_0 besitzt; a wird gleich der gesamten Wirkungsfähigkeit der in der Entfernung 1 von ε auf die Flächeneinheit auffallenden Strahlen („der Wirkungsdichtigkeit von ε in der Entfernung 1“) gesetzt, also $a = \frac{Ne_0}{4\pi}$. Ferner wird $b' = n'e'_0$ gesetzt, wo e'_0 den von ε' recipirten Bruchteil von e_0, n' denjenigen Bruchteil der Flächeneinheit bedeutet, auf welchen sich die Reception erstreckt. Es ist also

$$(1) \qquad V = \frac{Ne_0}{4\pi r}, \quad K' = -n'e'_0 \frac{dV}{dr} = \frac{Ne_0}{4\pi r^2} n'e'_0,$$

sodass also K' gleich der von ε' recipirten Wirkungsdichtigkeit ist.

2) Zwei gleichförmig bewegte Punkte. ε und ε' mögen sich mit den constanten Geschwindigkeiten v und v' bewegen; die Fortpflanzungsgeschwindi[gk]eit eines jeden der in kurzen Intervallen von ε ausges[andten S]trahlenelemente [wird] als die Resultirende aus v und [...] Geschwi[ndigkeit ...] betrachtet, welche dasselbe, von de[...] würde. Befinden sich also ε und [...] E' in der Entfernung r, so [...] Strahlenelement von einer [...] des Punktes ε ausgegan[gen ...] aus DE [... un]d einer [...] Irgend [...] strahlen[...] von ε a[...] und we[...] parallele [...] bildung [...] ε eine mi[...] [f]ortpfl[...] sich zur Ze[...] Strah[...] jenigen Elemente [...] bilden würden; d[...]

selbe, als wenn ε in [...]

e_0 und e'_0 in Folge der Bewegung andere Werte e, e' erhalten; es wird also

$$(2) \qquad V = \frac{Ne}{4\pi r}, \quad K' = -n'e'\frac{dV}{dr} = \frac{Nn'ee'}{4\pi r^2}.$$

Da nämlich das in E' ankommende Strahlenelement eine andere Fortpflanzungsrichtung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat als bei ruhendem ε, so kann zunächst hierdurch das Product ee' geändert werden, und man kann $ee' = e_1e'_1(1 + Q)$ setzen, wo $e_1e'_1$ derjenige Wert ist, in welchen $e_0e'_0$ durch die Bewegung von ε und ε' selbst, ohne Berücksichtigung der geänderten Bewegung der Strahlen, übergeht. Nun muss $Q = 0$ sein, sowohl wenn $v = 0$ ist, als auch wenn $v =$ und $\neq v'$ ist, da im letzteren Falle jedes Strahlenelement sich gegen ε' so bewegt, als wenn ε und ε' ruhten; man kann daher, wenn man beachtet, dass Q eine reine Zahl sein muss, $Q = \frac{v}{c} f\left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)$ setzen; sieht man ferner den daher rührenden Teil von K' als eine nach v gerichtete Kraft an, während der erste Teil von K' nach r gerichtet ist, so erhält man für die x-Componente von K'

$$(3) \qquad K'_x = \frac{Nn'e_1e'_1}{4\pi r^2}\left[\frac{dr}{dx'} + \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} f\left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)\right].$$

...s nun den directen, von der Fortpflanzung der Strahlen un...ngigen Einfluss der Bewegung auf das Product ee' betrifft, ... der Verfasser als die einfachste, sich aus der Quater...orie ergebende Annahme

$$e_1e'_1 = e_0e'_0\left(1 - \frac{1}{c^2} vv' \cos(vv')\right),$$

...ssigung von $\frac{1}{c^4}$, und da nach Gleichung (1)

$$\ldots \cos(vv')\Big)\frac{dr}{dx'} + \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} f\left(\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)\Big],$$

...s Clausius'sche Gesetz für

3) **Zwei Punkte mit Beschleunigung.** Als das Einfachste wird angenommen, dass die Beschleunigung auf die Wirkungsfähigkeit keinen Einfluss hat, sondern dass die Kraft noch durch die Gleichung (4) dargestellt wird, worin nur statt des Punktes E derjenige Punkt G zu setzen ist, in welchem sich E zur Zeit t befinden würde, wenn es sich vom Punkt D aus constant mit derjenigen Geschwindigkeit bewegt hätte, welche es zur Zeit $t - \Delta t$ wirklich besitzt; die Lage des Punktes G berechnet sich aus der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung e, deren Richtung $d\sigma$ sei, zur Zeit t, und es ergiebt sich für $f(u) = u$

$$(5)\quad \begin{cases} K_x = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^2}\Big[\Big(1 - \frac{1}{c^2}\, vv' \cos vv'\Big)\frac{dr}{dx} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{c^2}\Big(\frac{dx}{dt}\frac{dr}{dt} - r\frac{d^2x}{dt^2}\Big)\Big] + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\, e\, \frac{d}{d\sigma}\Big(\frac{dr}{dx}\Big) \end{cases}$$

Das erste Glied ist die Formel von Clausius; das zweite verschwindet für ponderomotorische Wirkungen, und auch für elektromotorische Wirkungen in geschlossenen Stromkreisen.

Lbg.

G. Quincke. Elektrische Untersuchungen. Wiedemann Ann. (2) XXIV. 347-416.

Bekanntlich findet im Innern eines Dielektricums, in welchem eine elektrische Kraft R wirkt, parallel den Kraftlinien ein Zug und se… zu den K… …nen ein Druck $\frac{K_1}{8\pi} R^2$ und $\frac{K_1}{8\pi} R^2$ st… …auch in einem magnetisirten M… … hat dieselben für eine grosse Z… … Flüssigkeiten d… …folgende…

… zwischen … und … Luft … Er…

meter, deren specifisches Gewicht σ sei, um eine Höhe h, entsprechend einer Druckvermehrung an den Seitenwänden der Luftblase, und zwar ergiebt sich

$$(1) \qquad h\sigma = \frac{\mu - 1}{8\pi} R^2 = \frac{k}{2} R^2,$$

wo, wie die Theorie (vgl. die 2 folgenden Abhandlungen) zeigt, $\mu = 1 + 4\pi k$ die „specifische inductive Capacität" Maxwell's und k die durch die Gleichung $\alpha = kX$ definirte Magnetisirungsconstante, α die x-Componente des magnetischen Moments der Volumeinheit, X die x-Componente der magnetisirenden Kraft bezeichnet; für Luft ist $\mu = 1$ gesetzt. Da für diamagnetische Flüssigkeiten $\mu < 1$ ist, so sollte bei diesen nach Gleichung (1) eine Senkung im Manometer stattfinden; dass sich auch hier, mit Ausnahme von Alkohol und Aether, eine Erhebung zeigte, erklärt der Verfasser durch eine Gestaltsänderung der Polflächen beim Magnetisiren.

2) Von einer U-förmigen, mit der Flüssigkeit gefüllten Röhre befindet sich der eine, capillare Schenkel zwischen den Polflächen, der andere ausserhalb des Magnetfeldes; letzterer ist so weit, dass das Flüssigkeitsniveau in ihm sich durch Aenderung des Niveaus im capillaren Schenkel nicht merklich ändert. Die Polflächen sind entweder vertical, oder sie liegen horizontal, und in diesem Falle geht die Röhre durch eine Durchbohrung der Polflächen hindurch, sodass das Niveau sich zwischen den Polflächen befindet. In beiden Fällen zeigt sich bei magnetischen Flüssigkeiten eine Erhebung, bei diamagnetischen eine Senkung der Flüssigkeit im Capillarrohr, welche wieder durch die Gleichung (1) ausgedrückt wird, worin bei magnetischen Flüssigkeiten μ denselben Wert hat wie bei dem Versuch 1). (Dass hierbei nicht nur senkrecht zu den Kraftlinien, sondern auch parallel denselben an der Oberfläche der Flüssigkeit ein Druck [illegible] stattfindet, ist kein Widerspruch gegen den obigen [illegible] im Innern parallel den Kraftlinien ein Zug wirkt, [illegible] vgl. die folgende Abhandlung, aus der von Kirch[illegible]te Körper, von Lorberg für Dielektrica aufge-

stellten Theorie unter der Voraussetzung eines sehr kleinen Wertes von k. D. Ref.)

Nach Gleichung (1) hat der Verfasser mittels der zweiten Methode die Grösse k, das der Krafteinheit entsprechende magnetische Moment der Volumeinheit, für eine grosse Zahl von Flüssigkeiten bestimmt und daraus den „Atommagnetismus“, d. h. das magnetische Moment von einem Molecül des festen Salzes, unter der Annahme berechnet, dass k gleich der Summe der dem festen Salz und dem Lösungsmittel (Wasser) entsprechenden Werte ist. Lbg.

G. Kirchhoff. Ueber einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisirt wird. Berl. Ber. 1884 1155-1170, Wiedemann Ann. (2) XXV. 601-617.

Die vom Verfasser in einer früheren Abhandlung (Berl. Ber. 1884, vgl. Referat F. d. M. 1884. 964) für die in einem magnetisirten Körper wirkenden Druckkräfte aufgestellten Formeln geben, wenn die Grössen k, k', k'' constant sind und, wie das bei einer Flüssigkeit stattfinden muss, $k'' = 0$ ist, und wenn R die resultirende Kraft bezeichnet, für die z-Componente der im Innern auf die Volumeinheit wirkenden Kraft

$$Z = \frac{k'}{2}\,\frac{d(R^2)}{dz}.$$

Es seien nun im Magnetfelde zwei Flüssigkeiten, auf welche sich die Indices 1 und 2 beziehen mögen, mit einander in Berührung; die z-Axe werde vertical nach unten angenommen. Die auf die Volumeinheit der Flüssigkeit 1 nach oben wirkende Kraft ist, wenn p_1 den Druck, ϱ_1 die Dichtigkeit bezeichnet,

$$\frac{dp_1}{dz} [illegible] g\varrho_1 + Z_1.$$

[illegible]

[illegible] stattfinden,

welche durch die nach innen gerichtete capillare Oberflächenspannung und die magnetische Zugkraft im Gleichgewicht gehalten wird; ist also n die ins Innere der ersten Flüssigkeit gerichtete Normale, φ das Potential, H die Capillar-Constante, und setzt man $1 + 4\pi k = \mu$, so ist nach dem für die magnetische Zugkraft geltenden Ausdruck und nach Gleichung (1)

$$p_1 - p_2 - gz(\varrho_1 - \varrho_2) + \frac{k'_1}{2} R_1^2 - \frac{k'_2}{2} R_2^2 + c_1 - c_2 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)$$
$$-\left(\frac{\mu_1}{8\pi} - \frac{k'_1}{2}\right) R_1^2 + \left(\frac{\mu_2}{8\pi} - \frac{k'_2}{2}\right) R_2^2 + \frac{\mu_1}{4\pi}\left(\frac{d\varphi_1}{dn}\right)^2 - \frac{\mu_2}{4\pi}\left(\frac{d\varphi_2}{dn}\right)^2,$$

woraus unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\mu_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = \mu_2 \frac{d\varphi_2}{dn},$$

$$R_2^2 - R_1^2 = \left(\frac{d\varphi_2}{dn}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi_1}{dn}\right)^2 = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_2^2}\left(\frac{d\varphi_1}{dn}\right)^2$$

sich ergiebt

$$(2) \qquad \begin{cases} c_1 - c_2 = -gz(\varrho_1 - \varrho_2) + \dfrac{H}{2}\left(\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{r''}\right) \\ \qquad\qquad - \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{8\pi}\left[R_1^2 + \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}\left(\dfrac{d\varphi_1}{dn}\right)^2\right], \end{cases}$$

oder wenn, wie das bei den im vorhergehenden Referat besprochenen Quincke'schen Versuchen mit magnetisirten Flüssigkeiten der Fall war, $\frac{\mu_1 - \mu_2}{4\pi} = k_1 - k_2$ sehr klein ist,

$$(2^a) \qquad c_2 - c_1 = gz(\varrho_1 - \varrho_2) - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) + \frac{k_1 - k_2}{2} R_1^2.$$

Bei Erregung des Magnetfeldes ändert sich also $c_2 - c_1$ um

$$(3) \qquad \delta(c_2 - c_1) = \frac{k_1 - k_2}{2} R_1^2.$$

Bei den Quincke'schen Versuchen befand sich ein Teil A_1, A_2 beider Flüssigkeiten (Luft und magnetische Flüssigkeit) ausserhalb des Magnetfeldes; in diesem Teile findet bei Erregung des Magneten, wenn das Gleichgewicht erhalten bleibt, nach Gleichung (1) eine Druckvermehrung $\delta p_1 = \delta c_1$, $\delta p_2 = \delta c_2$ statt. Nehmen wir als die zweite Flüssigkeit die Luft, also $k_2 = 0$, so bei dem ersten Versuch in dem Teil A_2 $\delta p_2 = h\sigma$, wo h die he im Manometer, und in dem Teil A_1 (an den cylindrischen

Grenzen der Flüssigkeit) $\delta p_1 = 0$. Bei dem zweiten Versuche ist in dem Teil $A_1 A_2$ (am Niveau im zweiten Schenkel)

$$\delta(p_2 - p_1) = h\sigma.$$

In beiden Fällen giebt also die Gleichung (3)

$$h\sigma = \frac{k_1}{2} R_1^2,$$

übereinstimmend mit Gleichung (1) des vorigen Referats.

Der Verfasser zeigt ferner, dass diese Gleichung auch für den dem ersten Versuch analogen, früher ebenfalls von Quincke angestellten Versuch mit einer Luftblase in einer dielektrischen Flüssigkeit zwischen den Platten eines Condensators gilt, obwohl hier k_1 nicht sehr klein ist. Schliesslich berechnet er noch die Gestalt einer Luftblase in einem Dielektricum zwischen den Condensatorplatten, sowie die Formänderung einer durch eine constante Kraft magnetisirten Kugel von Eisen. Lbg.

G. Adler. Ueber die Energie magnetisch polarisirter Körper, nebst Anwendung der bezüglichen Formeln insbesondere auf Quincke's Methode zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl. Wien Ber XCII. 1439-1455.

Der Verfasser bestimmt zunächst die Magnetisirungsenergie E eines durch unveränderliche äussere Kräfte inducirten Magneten (d. h. die beim Magnetisiren gegen die gesamten magnetischen Kräfte geleistete Arbeit), und zwar findet er E gleich dem halben Potential des Inducenten auf den inducirten Magneten, also, wenn α, β, γ die magnetischen Momente der Volumeinheit, X, Y, Z die Componenten der äusseren magnetisirenden Kraft R bezeichnen,

$$E = -\tfrac{1}{2}\int(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\,d\tau.$$

Setzt man nun $\alpha = k(X + X_1)$, wo X_1 die von dem inducirten Magnetismus herrührende Kraftcomponente bezeichnet, so kann man, da X_1 proportional mit k und k für die hier betrachteten magnetisirbaren Flüssigkeiten sehr klein ist, mit Vernachlässigung

von $k^* \alpha = kX$ setzen, erhält also

$$(1) \qquad E = -\frac{k}{2}\int R^2 d\tau.$$

Bei dem ersten Quincke'schen Versuch (vgl. das obige Referat über die Abhandlung von Quincke) denken wir uns aus dem Gleichgewichtszustand, bei welchem das Manometer einen Ueberdruck p anzeigt, eine virtuelle Verschiebung vorgenommen, wodurch ein Flüssigkeitsvolumen δv aus dem seitlichen Raum, wo die Magnetkraft und also auch $E = 0$ ist, ins Magnetfeld eintritt; dadurch wächst die magnetische Energie um $-\frac{k}{2}R^2\delta v$, dies ist also die gegen die Magnetkraft geleistete Arbeit; die gegen den Ueberdruck p geleistete Arbeit ist $= p\delta v$; es ist also

$$-\frac{k}{2}R^2\delta v + p\delta v = 0, \quad \text{d. h.} \quad p = \frac{k}{2}R^2,$$

übereinstimmend mit Gleichung (1) des erwähnten Referats. Genau dieselbe Gleichung ergiebt sich auf dem nämlichen Wege für die zweite Quincke'sche Versuchsanordnung, wenn man aus dem Gleichgewichtszustand, bei welchem an der Oberfläche im zweiten Schenkel ein Ueberdruck p stattfindet, eine virtuelle Verschiebung vornimmt, bei welcher ein Flüssigkeitsvolumen δv aus dem zweiten Schenkel in den ersten gebracht wird.

Lbg.

H. Hertz. Ueber die Dimensionen des magnetischen Pols in verschiedenen Masssystemen. Wiedemann Ann. (2) XXIV 114-118.

Im Folgenden bezeichnet M eine Masse, L eine Länge, T eine Zeit, F eine Fläche, A eine Arbeit, m eine (punktförmige) Magnetismusmenge, e eine Elektricitätsmenge, $i = \frac{e}{T}$ eine Stromstärke. Da $im = \frac{e}{T}m$ proportional einer Arbeit ist, so kann man $A = k_1 m \frac{e}{T}$ setzen, wo k_1 eine nur von dem Masssystem abhängige Constante ist; nimmt man mit Maxwell k_1 als eine

reine Zahl an, so folgt

$$(1) \qquad me = AT = ML^2T^{-1}.$$

Bezeichnet nun m_d und m_s etc. die betreffenden Grössen im elektrodynamischen und im elektrostatischen Masssystem, so geht man im ersteren von dem Ausdruck $m_d = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$, im zweiten von $e_s = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$ aus; aus (1) folgt also

$$(1^a) \qquad e_d = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}, \quad m_s = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist ein magnetisches Moment $m\delta$ proportional mit

$$iF = \frac{e}{T}F,$$

man kann also

$$m\delta = k_1 \frac{eF}{T}$$

setzen, wo k_1 wieder nur von dem Masssystem abhängt; nimmt man also mit Clausius k_1 als eine reine Zahl an, so folgt

$$(2) \qquad \frac{e}{m} = L^{-1}T,$$

mithin

$$(2^a) \qquad e_d = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}, \quad m_s = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}.$$

Während also im elektrodynamischen Masssystem die Dimensionen eines magnetischen oder elektrischen Pols bei den beiden Annahmen (1) und (2) dieselben sind, findet dies im elektrostatischen Masssystem nicht statt.

Dass aber dieser scheinbare Vorzug des elektrodynamischen Masssystems kein wesentlicher ist, zeigt der Verfasser dadurch, dass er an Stelle der Annahmen (1) und (2) zwei andere, theoretisch ebenso begründete setzt, bei denen jener Vorzug umgekehrt dem elektrostatischen Masssystem zukommt. Versteht man nämlich unter einem „constanten Magnetstrom“ einen linearen magnetischen Ring, in welchem das Moment μ der Längeneinheit in gleichen Zeiten um gleichviel wächst, dessen Stärke also

$$\frac{d\mu}{dT} = \frac{\mu}{T}$$

gesetzt werden kann, so wirkt bekanntlich ein solcher Magnetstrom inducirend, d. h. auf einen elektrischen Pol, ebenso wie

ein constanter elektrischer Strom auf einen Magnetpol; die Arbeit beim Herumführen eines elektrischen Pols um einen Magnetstrom kann also analog dem Obigen

$$A = k'_1 e \frac{m}{T}$$

gesetzt werden, und wenn man k'_1 als eine reine Zahl annimmt, so wird

$$\text{(I)} \qquad me = AT = ML^2T^{-1},$$

übereinstimmend mit Gleichung (I), woraus sich wieder die Gleichungen (I^a) ergeben. Ferner wirkt ein unendlich kleiner Magnetstrom von der Fläche F auf einen elektrischen Pol ebenso wie ein elektrisches Molecül (System zweier entgegengesetzten elektrischen Massen von der Entfernung δ), wenn $\frac{m}{T}F$ proportional $e\delta$ ist; man kann also $e\delta = k'_2 \frac{mF}{T}$ setzen, und wenn man k'_2 als eine reine Zahl annimmt, so folgt

$$\text{(II)} \qquad \frac{m}{e} = L^{-1}T,$$

mithin

$$\text{(II}^a\text{)} \qquad e_s = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}, \quad m_s = M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}.$$

Es hat also jetzt im elektrostatischen System ein elektrischer oder magnetischer Pol bei beiden Annahmen (I) und (II) dieselben Dimensionen, nicht aber im elektrodynamischen System.

Lbg.

E. Aulinger. Ueber das Verhältnis der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu dem von Hertz aufgestellten Princip der Einheit der elektrischen Kräfte. Wien. Ber. XCI. 880-893. Wiedemann Ann. (2) XXVII. 119-132.

Bekanntlich hat Hertz (Wied. Ann. XXIII. vgl. F. d. M. XVI. 1884. p. 949) aus der Form des Ausdrucks für die elektromotorische Kraft eines veränderlichen Magnetringes („Magnetstroms") oder eines veränderlichen geschlossenen Solenoids den Schluss gezogen, dass zwei veränderliche Magnetringe eine ponderomotorische Kraft auf einander ausüben müssen. Der diesem

Schluss zu Grunde liegende Gedankengang ist ohne Zweifel folgender, obwohl ihn Hertz nicht in dieser Form ausspricht. „Ein veränderlicher Magnetring ϱ wirkt elektromotorisch wie eine durch ihn begrenzte Doppelschicht δ; diese würde, wenn sie wirklich vorhanden wäre, auf einen andern veränderlichen Magnetring r ponderomotorisch wirken, weil r auf jeden Pol von δ, mithin auch jeder Pol von δ auf r wirkt; mithin muss auch ϱ auf r ponderomotorisch wirken". Das Bedenkliche dieses Schlusses von der Wirkung eines bloss fictiven Agens auf die Wirkung eines andern Agens, welches hinsichtlich gewisser Wirkungen jenes erstere ersetzen kann, sucht der Verfasser durch folgende, ursprünglich von Boltzmann herrührende Hypothese zu beseitigen: „Ist in einem elektrischen Felde in jedem Punkte die elektrostatische Kraft und die Magnetkraft (d. h. die Kraft auf einen ruhenden elektrischen und magnetischen Pol) bestimmt, so sind in demselben sämtliche elektrischen und magnetischen Kräfte bestimmt." Mit Hülfe dieser Hypothese lautet dann der obige Schluss folgendermassen: „ϱ und δ üben dieselbe elektrostatische (elektromotorische) Kraft aus, ebenso dieselbe Magnetkraft (nämlich 0), folglich üben sie überhaupt dieselbe Kraft aus; da nun δ auf r ponderomotorisch wirkt, so muss dies auch ϱ thun". Die Kraft statischer Elektricität auf einen veränderlichen Strom berechnet der Verfasser an dem Beispiel des Drehungsmoments, welches nach dem Weber'schen Grundgesetz eine gleichförmig elektrostatisch geladene Kugel auf einen in ihrem Innern befindlichen, von einem veränderlichen Strom durchflossenen Leiter ausübt. Ein solches Drehungsmoment widerspricht offenbar dem Boltzmann'schen Princip; denn denkt man die Kugel einmal geladen, das andere mal ungeladen, so ist die elektrostatische und magnetische Kraft in ihrem Innern beidemal = 0.

Lbg.

F. E. Nipher. Ueber die Darstellung des elektrischen Widerstandes durch eine Geschwindigkeit. Exner Rep XX. 788-790

Dass der elektrostatisch gemessene Widerstand gleich dem reciproken Wert einer Geschwindigkeit ist, beweist der Verfasser folgendermassen. Eine mit der Elektricitätsmenge Q geladene Kugel vom Radius r werde durch einen Draht vom Widerstand R mit der Erde verbunden und gleichzeitig so zusammengedrückt, dass ihr Potential V constant bleibt, also ein constanter Strom

$$i = \frac{V}{R} = -\frac{dQ}{dt}$$

durch den Draht fliesst. Da $V = \frac{Q}{r}$ ist, so muss zu diesem Zweck r während einer Zeit τ mit constanter Geschwindigkeit $v = \frac{r_0 - r_1}{\tau}$ von r_0 zu r_1 abnehmen. Dabei nimmt die elektrische Energie der Kugel um

$$E_1 = \tfrac{1}{2}V(Q_0 - Q_1) = \tfrac{1}{2}V^2(r_0 - r_1)$$

ab. Zugleich wird bei der Zusammendrückung von den äussern Kräften eine Arbeit geleistet, deren Element, wenn δ den ganzen elektrischen Oberflächendruck bezeichnet,

$$dA = -\delta dr = -\tfrac{1}{2}\frac{Q}{r^2}Qdr = -\tfrac{1}{2}V^2 dr$$

ist; also ist die ganze hierbei geleistete Arbeit oder von aussen zugeführte Energie

$$E_2 = \tfrac{1}{2}V^2(r_0 - r_1).$$

Die ganze von der Kugel abgegebene und in Stromenergie verwandelte Energie ist also

$$E = E_1 + E_2 = V^2(r_0 - r_1) = V^2 v\tau.$$

Andrerseits ist aber die erzeugte Stromenergie

$$E = iV\tau = \frac{V^2}{R}\tau.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Werte giebt

$$R = \frac{1}{v}.$$

Lbg.

mentlich dürfte die Ersetzung der, wie der Uebersetzer in der Vorrede sagt, „schwierigen mathematischen Hülfsmittel Maxwell's" durch Betrachtungen von mehr geometrischer Natur nicht überall der Klarheit förderlich sein. Immerhin aber kann das Buch auch neben dem Maxwell'schen als ein wertvolles bezeichnet werden; namentlich ist die musterhafte Correctheit der Uebersetzung und des Drucks lobend anzuerkennen. Lbg.

A. Walter. Zur Theorie und Praxis der Dynamomaschinen. Pr. Realgymn. Tarnowitz. 18 S. 4°.

Der Verfasser giebt einen kurzen Abriss seiner persönlichen Erfahrungen über die Wirkungsweise der vornehmlich zu Unterrichtszwecken bestimmten kleineren Dynamomaschinen und begründet sein Urteil über die Leistungsfähigkeit der Fabrikate einiger der bekanntesten Mechaniker-Firmen. Lp.

F. Neumann. Vorlesungen über elektrische Ströme, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von Dr. K. Von der Mühll. Leipzig. Teubner. 1884.

Diese Vorlesungen bilden das dritte Heft der von den Schülern F. Neumann's herausgegebenen „Vorlesungen über mathematische Physik" des Königsberger Gelehrten. Lp.

ascart. Handbuch der statischen Elektricität. ch von Wallentin. 1. Bd. 921 S. Wien. Pichler's Wittwe

Schlömilch Z. XXXII. Hl. A. 133.

eschichte der Elektricität. Leipzig J. A.

8°

hte der Elektricität mit Berück-
lungen. Wien. A Hartleben XVI.

HÄBLER. Zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus. Schlömilch Z. XXX. 119-127.

Siehe Referat F. d. M. XVI. 1884. 995.

Capitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

P. G. TAIT. Wärmelehre. Autorisirte deutsche Ausgabe besorgt von E. Lecher. Wien. Toeplitz & Deuticke. VIII u. 327 S. 8°.

Das Buch ist eine Uebersetzung des 1884 erchienenen Originals. Der Verfasser wollte ein Lehrbuch für Studirende schreiben, welche keinerlei wissenschaftliche Laufbahn beabsichtigen; er wollte, dass sein Buch im Vorlesungssaal benutzt würde, während das von Maxwell die Theorie giebt, z. B. das von Balfour Stewart mehr für das physikalische Laboratorium ist. In dem Buche wird allgemein verständlich darüber berichtet, wie die Kenntnis der Wärm[illegible] zu Anfang d[illegible] [illegible]zehnts war.

Damit der L[illegible] Zu[illegible] [illegible]ge habe, ohne dass Wiederholun[illegible] gemacht. Z. B. beginnt § [illegible] Wärmeströmun[illegible] und der [illegible] bilden einen [illegible] mitg[illegible] dass z. B [illegible] gege[illegible] halten w[illegible] die unn[illegible] vollständig [illegible] (es ist nie[illegible] geben, welche [illegible] Physik III. 258 [illegible]

dieser Stelle befindet sich ein kurzer Bericht über die Versuche von Andrews mit Kohlensäure. Der Schlussparagraph eines jeden Capitels enthält eine Uebersicht des in den anderen Paragraphen Mitgeteilten.

In diesem Jahrbuch ist nicht auf die besonders interessanten Capitel aufmerksam zu machen, hier genüge der Hinweis auf die letzten Capitel über Strahlung, Einheiten und Dimensionen, Indicator-Diagramm, Elemente der Thermodynamik. Es ist nicht nötig, aus einem Buche des Verfassers Beispiele für gute Definitionen wiederzugeben.

Man kann verschiedener Ansicht darüber sein, ob sich zuweilen eine freiere Uebersetzung empfohlen hätte; der Uebersetzer wollte das Original möglichst getreu wiedergeben.

Rs.

A. v. Oettingen. Die thermodynamischen Beziehungen antithetisch entwickelt. Mém de St. Petersb. (7) XXXII, No. 17.

Die allgemeinen Beziehungen der Thermodynamik werden im ersten Capitel in dualer Form dargestellt, und dabei findet eine möglichst erschöpfende Combination der variabeln Grössen statt. Der Stoff wird dadurch auf kleinem Raume leicht übersichtlich zusammengestellt. Die bezüglichen neuesten Unter-
[illegible]ungen des Herrn H. v. Helmholtz sind auch berücksichtigt,
[illegible] Sätzen desselben werden die entsprechenden, in dualem
[illegible]itz stehenden gegenübergestellt, z. B. dem Satze des
[illegible] Helmholtz: „Bei allen isothermen Veränderungen, wo
[illegible] die Arbeit auf Kosten der freien Energie geleistet
[illegible]ändert sich dabei auf Kosten der ein- oder aus-
[illegible] der Satz: „Bei allen isobaren Aenderungen,
[illegible]ärme nur auf Kosten der totalen Energie
[illegible]ne ändert sich dabei auf Kosten der ab-
[illegible] Arbeit.“ Einiges wird etwas anders
[illegible]elmholtz.
[illegible] Hypothese aufgestellt, und es
[illegible] jetzt vorhandenen Beob-

achtungen entspricht. Zu der Hypothese gelangt der Verfasser durch folgende Ueberlegung: Bei der Specialisirung der zwölf Energiecapacitäten für Gase waren

alle nach	v	gebildeten	Coefficienten	Drucke,
„ „	u	„	„	Temperaturen,
„ „	p	„	„	Volumina,
„ „	t	„	„	Entropien.

Während nun die nach v gebildeten Coefficienten direct proportional dem Drucke, die nach u gebildeten proportional der Temperatur, die nach p gebildeten proportional dem Volumen waren, erscheinen die nach t gebildeten nur der Dimension nach als Entropien. (Der Parameter wird Adiabate, die Einheit, nach welcher die Adiabate zu messen ist, wird Entropie genannt.) Der Verfasser fragt, ob diese Coefficienten proportional der Adiabate sein könnten und macht versuchsweise, ganz unabhängig von der Aggregatform, den Ansatz

$$dQ = C \cdot \frac{u}{u_0} dt,$$

indem u_0 eine Constante, nämlich die dem Normaldruck und der Temperatur $t = 273^\circ C$ entsprechende Adiabate des Körpers bedeutet. Wird noch, um das Adiabatenwachstum von $0^\circ C$ an unterscheiden zu können, letzteres u' genannt und die gesamte Adiabate

$$u = u_0 + u'$$

gesetzt, so wird

$$dQ = C_0 \frac{u_0 + u'}{u_0} dt = t . du,$$

und C_0 be[illegible] wahr[illegible]sche Wärme bei $0^\circ C$.

Di[illegible]sche Wärme mit der Adiabate ve[illegible] Capacit auf Gase übertragen [illegible] u. das Gay Lussac [illegible] gesetzt wird

stantem x. Die auf Gase bezüglichen Formeln werden ähnlich, wie die allgemeinen im ersten Capitel, zusammengestellt.

Diese Andeutungen mögen genügen, da die Abhandlung leicht erreichbar ist, und da die Resultate der Untersuchung am Schluss (S. 67-70) zusammengestellt sind. Rs.

R. Rühlmann. Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. I. Bd. XXIII u. 800 S. II. Bd. XVIII u. 998 S.

F. Mann. Grundzüge der Undulationstheorie der Wärme. Würzburg. Stabel.

L. Boltzmann. Ueber einige Fälle, wo die lebendige Kraft nicht integrirender Nenner des Differentials der zugeführten Energie ist. Wien. Ber. XCII. 853-877. Kronecker J. XCVIII. 68-94.

Die Abhandlung reiht sich den Untersuchungen von H. v. Helmholtz und Boltzmann über monocyklische Systeme an.

Um die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie näher zu beleuchten, behandelt der Verfasser einige specielle mechanische Beispiele als einfachste Fälle, wo die lebendige Kraft ähnlich wie in der Wärmetheorie in Arbeit verwandelt wird. Es ergiebt sich, dass isokinetische Systeme (v. Helmholtz, Berl. Ber. 1884 S. 1192-1201) vorkommen können, bei denen die lebendige Kraft nicht integrirender Nenner ist. Der Verfasser vermutet, dass in der von Helmholtz'schen Gleichung $dQ = 2Ld\log(Lt)$ die Grösse Lt nicht nur vom augenblicklichen Zustande, sondern auch von der Art und Weise abhänge, wie das System in diesen Zustand geriet, weshalb aus dieser Gleichung nicht geschlossen werden dürfe, dass L integrirender Nenner von dQ sei. Sbt

…sen. Untersuchungen über die Zustandsgleichung. …n Ann. (2) XXIV. 467-492.

Der Verfasser veröffentlicht den Anfang einer Arbeit, in welcher für einige gut untersuchte Körper aus allen vorhandenen besseren Beobachtungen die Zustandsgleichung abgeleitet werden soll.

Zunächst wird die von Clausius gegebene Zustandsgleichung kritisirt. Obgleich dieselbe bei Benutzung der von Clausius berechneten Constanten z. B. alle Zustandsänderungen des flüssigen und dampfförmigen Aethers mit einer gewissen Annäherung wiedergiebt, ist dieselbe weit davon entfernt, der Genauigkeit der Beobachtungen gleich zu kommen. Die Vergleichung der von Clausius für flüssigen Aether bei verschiedenen Temperaturen berechneten Dichten ergeben für diesen eine merkliche (etwa $^1/_{10}$) stärkere Ausdehnung, als sie aus der Beobachtung folgt. Für den Coefficienten der Compressibilität erhält der Verfasser mit den Clausius'schen Constanten 0,000 239 bei 0° und 0,001 111 bei 100°, während die beobachteten Werte etwa halb so gross sind; für den Unterschied der specifischen Wärmen findet er nach der Clausius'schen Gleichung Werte, welche 30 bis 60 Procent kleiner sind, als die, auf welche die Verbindung der Werte von E. Wiedemann mit denen von Regnault und Hirn führt. Die Clausius'sche Gleichung hat den Verfasser für keinen Körper (Aether, Wasser, Quecksilber, Aethylen, Kohlensäure) zu einem befriedigenden Resultat geführt.

Es wird angenommen, dass, so lange die Dichte δ ein gewisses Mass nicht überschreitet, die Zustandsgleichung eines jeden Körpers sich in folgende Form bringen lässt:

$$p = RT\delta(1 + T_1\delta + T_2\delta^2 + T_3\delta^3 + \cdots),$$

indem p den Druck, T die absolute Temperatur, $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Functionen der Temperatur, R eine Constante bezeichnen. Um die Anwendung d[illegible] stehenden Formel auf die Beobachtungen [illegible] dieser [illegible] tern, werden zunächst die wichtigsten [illegible] Beziehungen (wenn man von der Reihe [illegible] abgeleitet, nämlich die Werte [illegible] nungs- und des Com- [illegible] der beiden in me-

chanischem Mass gemessenen specifischen Wärmen, jeder der beiden specifischen Wärmen.

Darauf werden Versuche, die in Regnault's Hauptwerke über Kohlensäure mitgeteilt sind, verwertet. Die Versuche gestatten die Berechnung von R (der theoretischen Dichte der Kohlensäure), von T_0 (der absoluten Temperatur des Eispunktes) und einiger Werte der Temperaturfunction T_1. Weiterer Nutzen soll aus den Versuchen gezogen werden, indem der Verfasser auf die Untersuchungen eingehen will, welche bei grösseren Dichten angestellt sind. Rs.

L. Arons. Verdünnungswärme und Wärmecapacität von Salzlösungen. Wiedemann Ann. (2) XXV. 408-416.

Die von Kirchhoff und H. v. Helmholtz abgeleiteten theoretischen Formeln für das Verhalten wässriger Salzlösungen bei weiterer Verdünnung vergleicht der Verfasser mit vorliegenden Versuchsdaten. Das Resultat ist negativ; auch dann, wenn statt des Boyle-Gay Lussac'schen Gesetzes die Clausius'sche Zustandsgleichung benutzt wird, findet genügende Uebereinstimmung nicht statt. Rs.

J. Moutier. Sur les phénomènes thermiques qui accompagnent le mélange de deux liquides. J. de l'Éc. Pol. Cah. LIV. 143-170.

Für die Lösungs- und für die Verdampfungswärme der Mischung einer leicht verdunstenden Flüssigkeit mit Wasser (Schwefelsäure und Wasser) werden die Kirchhoff'schen Formeln abgeleitet. Darauf beschäftigt sich der Verfasser mit dem allgemeineren Falle zweier leicht verdunstenden Flüssigkeiten. U. a. wird gefunden: Die Lösungswärme oder die bei der Mischung zweier Flüssigkeiten absorbirte Wärme ist gleich dem Unterschiede zwischen der Summe der Wärmemengen, welche nötig sind, die beiden Flüssigkeiten einzeln zu verdampfen, und der Wärmemenge, welche zur Verdampfung der Mischung er-

forderlich ist. Die Theorie des Verfassers giebt eine obere Grenze, aber keine untere für die Dampfspannung. Rs.

Fliegner. Ueber einige Expansionscurven der gesättigten Dämpfe. Wolf Z. XXIX. 226-242

Anknüpfend an Weyrauch's Abhandlung „Zur Theorie der Dämpfe" im XX. Bd. d. Z. d. Vereins deutscher Ingenieure verallgemeinert der Verfasser dessen Untersuchungen über die sog. Nullcurve, den geometrischen Ort der Berührungspunkte je einer adiabatischen Curve mit je einer Curve constanter specifischer Dampfmenge. Indem nämlich in der Gleichung dieser „Hauptnullcurve" $x = \frac{c}{c-h}$ rechts noch eine additive Constante hinzugefügt wird, erhält man die der allgemeinen Nullcurve $x' = \frac{c-k}{c-h}$, wobei $c > k > h$ sein muss, wenn die Curve reell bleiben soll. (x specifische Dampfmenge; c specifische Wärme der Flüssigkeit, h specifische Wärme des Dampfes bei Expansion nach der Grenzcurve). Es zeigt sich, dass bei einer Zustandsänderung nach solcher Nullcurve mit einer Druckabnahme stets eine Wärmeentziehung verbunden sein muss. Die Nullcurven sind besonders wichtig für den Einblick in das Verhalten gesättigter Dämpfe, welche ihren Zustand bei constanter specifischer Wärme ändern. Auf einer Curve constanter specifischer Wärme muss bei Annäherung an die zugehörige Nullcurve Verdampfung, bei Entfernung von derselben Condensation eintreten. Sbt.

A. [illegible] …uola di termodinamica. Batt.

[illegible]

[illegible] …sättigter Dämpfe wird [illegible] …metheorie abgeleitet. Rs.

C. H. C. Grinwis. De volledige viriaalvergelijking. Amst. Versl. en Meded. (3) I. 19-36.

S. F. d. M. XVI. 1884. 1061. G.

A. Bartoli. Die strahlende Wärme und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. Exner Rep XXI 198-208.

Peddie. On the isothermals and adiabatics of water near the maximum density point. Edinb Proc. XII 933-935.

G. Vandermensbrugghe Essai sur la théorie mécanique de la tension superficielle, de l'évaporisation et de l'ébullition des liquides. Belg. Bull. (3) IX 346-362.

Skizze einer Theorie, die in gründlicherer Gestalt im Bande XI wieder aufgenommen ist. Mn. (Lp.)

A. Seemann. Ueber die Bestimmung des Wassergehaltes im Kesseldampf. Z. dtsch. Ing. XXIX 340-346.

Nach eingehender Besprechung der physikalischen (calorimetrischen, Condensations- und Ueberhitzungs-) und chemischen Methoden gelangt der Herr Verfasser zu dem Schlusse, dass für die quantitative Bestimmung des mitgerissenen Wassers genaue und genügend erprobte Methoden zur Zeit nicht bekannt sind.

F. K.

B. Gastheorie.

F. Folie, Melsens. Rapports sur le Mémoire intitulé: Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température. Belg. Bull. (3) IX. 40-71.

Der zweite Berichterstatter analysirt die Abhandlung des Herrn Hirn, der erste kritisirt sie in einem wesentlichen Punkte. Herr Hirn beweist experimentell, dass die lebendige Kraft eines gegen eine Platte gelenkten Gasstroms unabhängig von der Temperatur des Gases ist. Er glaubt daraus folgern zu dürfen, dass die kinetische Gastheorie von Clausius falsch ist und demgemäss auch die materialistische Anschauung, die nach seiner Ansicht ihr Los an das der kinetischen Theorie geknüpft hat. Herr Folie macht hierzu die Bemerkungen: 1) Diese Beziehung zwischen der kinetischen Theorie und dem Materialismus besteht nicht. 2) Die Versuche des Herrn Hirn können zu Gunsten der kinetischen Theorie gedeutet werden. (Hr. Clausius hat auf die Beweisführung des Herrn Hirn in den Bulletins de l'Ac. de 1886 XI. 173-193 geantwortet.) Mn. (Lp.)

L. Boltzmann. Ueber die Möglichkeit der Begründung einer kinetischen Gastheorie auf anziehende Kräfte allein. Exner Rep. XXI. 1-8.

Abdruck aus den Wien. Ber. LXXXIX. Ref. s. F. d. M. XVI. 1884. 1065. Lp.

J. J. Thomson. The vortex ring theory of gases. On the law of distribution of energy among the molecules. Lond. R. Soc. Proc. XXXIX. 23-36.

Bei jeder kinetischen Gastheorie muss die statistische Methode der Unters[illegible] gebrau[illegible] werden, und da man ja voraussetzt, dass die [illegible] Ga[illegible] manche Eigenschaften innerhalb sehr w[illegible] ist es notwendig zu wissen, wie v[illegible] welche das Mass einer gegebe[illegible] haben. So ist die Frage [illegible] Geschwindigkeit [illegible] in jeder [illegible]

[illegible] Auf

gabe durch Maxwell und Boltzmann gelöst worden; der Verfasser vorliegender Abhandlung versucht, dieselbe Aufgabe für die Gastheorie der Wirbelatome zu lösen. Die Frage ist hier ein wenig verwickelter, da sowohl die Radien der Wirbelringe, als auch ihre Geschwindigkeit variiren können.

Cly. (Lp.)

P. G. Tait. Note on a theorem of Clerk-Maxwell. Edinb. Proc. XIII. 21-23.

Bezieht sich auf einen Satz von Clerk-Maxwell (von welchem der Boltzmann'sche eine Erweiterung ist), dass in einem Gemenge von zwei Arten von Partikeln die mittlere kinetische Energie der Partikeln jeder Art dieselbe ist. Der Beweis, so wie er in Phil. Mag. für 1860 gegeben ist, hat eine sehr gedrängte Gestalt, und Herr Tait hat ihn hier ausgeführt, so dass die Natur der Annäherung an den Durchschnittswert deutlich verfolgt werden kann.

Cly. (Lp.)

P. G. Tait. On the foundations of the kinetic theory of gases. Edinb. Proc. XIII. 386-483.

Die Theorie wird in den beiden Hauptteilen betrachtet: a) Ueber die endliche Durchschnittsverteilung der Energie unter Systemen glatter zusammenstossender Kugeln. b) Ueber die mittlere Weglänge unter gleichen Kugeln. Cly. (Lp.)

P. G. Tait. On the partition of energy between two systems of colliding spheres. Nature XXXIII. 270-271. Abstract of Paper read to the Royal Society of Edinburgh Jan. 18.

Ein Beweis für den Maxwell'schen Satz, dass in einem Gemenge grosserer Zahlen von zusammenprallenden kugelgestaltigen Teilchen von zweierlei Art der Endzustand ein solcher wird, bei [illegible]chem die durchschnittliche Energie der Translationsbewegung [illegible]e Kugel jeder der beiden Arten dieselbe ist. Lp.

W. M. Hicks. Researches on the theory of vortex rings. II. Lond. R. Soc. Proc. XXXVII. 447-449.

Auszug aus einer Abhandlung, die wahrscheinlich in den Phil. Trans. abgedruckt werden wird. Cly. (Lp.)

P. G. Tait. On vortex motion. Edinb. Proc. XII. 562.
Cly.

L. Graetz. Notiz über die Grösse der Maxwell'schen Molecularwirbel und über die Dichtigkeit des Lichtäthers. Exner Rep. XXI. 530-537, Wiedemann Ann. (2) XXV. 165-172.

Siehe Abschn. XI. Cap. 2B. p. 1003.

F. Exner. Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der Grösse der Molecüle. Exner Rep. XXI. 464-471.

E. A. Brauer. Construction gesetzmässiger Expansionscurven von der allgemeinen Form $pv^n = C$. Z. dtsch. Ing. XXIX. 433.

Die Construction beruht darauf, dass die p, welche zu den Werten

$$v_1 = \lambda v_0,\quad v_2 = \lambda v_1,\quad v_3 = \lambda v_2,\ \ldots,\ v_n = \lambda v_{n-1}$$

gehören, durch die Gleichungen

$$p_1 = \mu p_0,\quad p_2 = \mu p_1,\quad p_3 = \mu p_2,\ \ldots,\ p_n = \mu p_{n-1}$$

verbunden sind, wo

$$\mu = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$$

ist. Sind die beiden ersten dieser Punkte bekannt, so erfordert die Bestimmung der folgenden nur das Ziehen von Parallelen.
F. K.

E. Sarrau. Sur la compressibilité des fluides. C. R. CI. 941-944.

Der Verfasser beschäftigt sich in dieser Mitteilung mit der Zusammendrückbarkeit der Gase, indem er sich auf die Experimente Amagat's stützt. Die Methode, welche er zur Bestimmung der Coefficienten der Gleichung

$$p = \frac{RT}{v-\alpha} - \frac{K}{T(v+\beta)^2}$$

benutzt hat, hört auf, anwendbar zu sein, wenn gleichzeitig die Coefficienten R, α, β und die Form der Function θ, welche nach Clausius zweckmässiger an Stelle des Factors $\frac{K}{T}$ genommen wird, gefunden werden sollen. Daher schlug der Verfasser folgenden Weg ein: Für eine bestimmte Temperatur ist der Wert von p von der Form

$$p = \frac{A}{v-\alpha} - \frac{B}{(v+\beta)^2},$$

wenn A, B, α, β Constanten bezeichnen, welche bestimmt sind, sobald man vier Wertsysteme (p, v) kennt. Der Verfasser führte diese Bestimmung für die Temperatur von 50° aus, da für dieselbe 7 besondere experimentelle Daten vorhanden waren, bei welchen der Druck von 30^m bis 90^m Quecksilber geändert war. Weil die Constante A gleich $R.T$ ist, giebt ihr Wert den von R. Nachdem man so R, α, β kennt, kann man die Werte von B für verschiedene Temperaturen berechnen, wenn man durch das Experiment für jede dieser Temperaturen ein System correspondirender Werte (p, v) hat.

Die Amagat'schen Resultate gestatten, diese Bestimmung für 7 Temperaturen, deren Grenzen 35,1° und 100° sind, auszuführen, und zwischen diesen Grenzen findet man, dass $\log B$ durch eine lineare Function der Temperatur dargestellt werden kann, so dass $\theta = K\varepsilon^{-T}$ ist, wenn K und ε Constanten bedeuten. Man bekommt daher die Zustandsgleichung

$$(1) \qquad p = \frac{RT}{v-\alpha} - \frac{K\varepsilon^{-T}}{(v+\beta)^2}$$

mit dem System von Constanten

$$\alpha = 2{,}95, \quad \beta = 3{,}50,$$

$$\log R = 0{,}98692, \quad \log K = 5{,}17628, \quad \log(\log\varepsilon) = 8{,}07834,$$

wenn die Amagat'schen Einheiten benutzt werden.

In einer Tabelle sind die nach vorstehender Formel berechneten und die von Amagat gemessenen Werte zusammengestellt.

Wenn der kritische Punkt erreicht ist, hat man

$$\frac{dp}{dv} = 0, \quad \frac{d^2p}{dv^2} = 0;$$

indem man zu diesen Gleichungen die Gleichung (1) hinzunimmt, hat man drei Gleichungen, welche die Werte von v, T, p für den kritischen Punkt geben. Setzt man noch $\gamma = \alpha + \beta$, so findet man auf diesem Wege

$$v_c = \alpha + 2\gamma, \quad T_c \varepsilon^{T_c} = \frac{8}{27}\frac{K}{R\gamma}, \quad p_c = \frac{1}{8}\frac{RT_c}{\gamma}.$$

Für die Kohlensäure ergiebt dann die Rechnung

$$t_c = +32{,}7^{\circ} \quad \text{und} \quad p_c = 75{,}64^{\text{atm}},$$

während nach Andrews' Experimenten

$$t_c = 31^{\circ} \quad \text{und} \quad p_c = 77^{\text{atm}}$$

ist.

Um die Zahl der Parameter in seiner Formel zu verringern, führt der Verfasser neue Einheiten ein. Er wählt als Druckeinheit den Druck der Atmosphäre, als Volumeneinheit das „normale Volumen", d. h. das Volumen, welches das Gas im vollkommenen Zustande bei 0° unter dem Atmosphärendruck einnehmen würde. Das normale Volumen wird für die Gewichtseinheit eines Gases, dessen Moleculargewicht ω ist, mit Hülfe der Gleichung

[illegible]

berechnet [illegible] Moleculargewicht des Wasserstoffes [illegible] diesen neuen Einheiten erhält man [illegible]

[illegible]

[illegible] reducirt

[illegible]

E. Sarrau. Sur la tension des vapeurs saturées. C. R. CI. 994-998.

Bei der absoluten Temperatur T bezeichne man mit P die Spannung des gesättigten Dampfes, mit σ und s die Volumina der Flüssigkeit und des Gases unter dem Drucke P. Die auf den kritischen Zustand bezüglichen Werte mögen den Index c erhalten. Indem man

$$x = \frac{T\vartheta_c}{T_c\theta}, \quad \gamma = \alpha + \beta$$

setzt, hat man für die Bestimmung von P, σ und s drei Relationen

$$\frac{P}{P_c} = \frac{T}{T_c}\varphi(x), \quad \sigma - \alpha = 2\gamma\chi(x), \quad s - \alpha = 2\gamma\psi(x);$$

φ, χ, ψ sind rein numerische Functionen, sie hängen von der Natur des Körpers nicht ab, und Hr. Clausius hat für sie Tabellen gegeben (Ann. chim. phys. (5) XXX. 451).

Es wird gezeigt, wie die erste der vorstehenden drei Gleichungen durch die experimentellen Resultate Regnault's über den gesättigten Dampf der Kohlensäure bestätigt wird: Wenn die theoretische Beziehung zwischen dem Sättigungszustande und dem Gaszustande bei der Annahme $\theta = K.\varepsilon^{-T}$ der Wirklichkeit entspricht, muss die Spannung P des gesättigten Dampfes genau berechnet werden durch die Gleichungen

$$\frac{P}{P_c} = \frac{T}{T_c}\varphi(x), \quad x = \frac{T}{T_c}\varepsilon^{(T_c - T)}$$

mit Werten von T_c, P_c, ε, welche sich aus den Coefficienten der Zustandsgleichung entsprechend den Gleichungen

$$(1) \qquad T_c\varepsilon^{T_c} = \frac{8}{27}\frac{K}{R\gamma}, \quad P_c = \frac{1}{8}\frac{RT}{\gamma}$$

...geben. Für diese Werte hat der Verfasser gefunden (s. vor...endes Referat)

$$t_c = +32{,}7^\circ, \quad P_c = 75{,}64^{\text{atm}}, \quad \varepsilon = 1{,}00276.$$

...ten Werte entsprechen den Regnault'schen gut, wenn ...schiedenen Werte nimmt

$$P_c = 75{,}16^{\text{atm}}, \quad \varepsilon = 1{,}00285.$$

...d der, dass der Atmosphärendruck

und das normale Volumen als Einheiten gewählt werden, erhält man aus den Gleichungen (1)

$$\gamma = 0{,}001853, \quad K = 0{,}01655,$$

während die Experimente Amagat's ergeben

$$\gamma = 0{,}001850, \quad K = 0{,}01625.$$

Diese Rechnungen haben also ergeben, dass die Experimente Amagat's beim Gase und die Regnault's beim gesättigten Dampf der Kohlensäure auf übereinstimmende Werte für die Coefficienten K und ε der Zustandsgleichung führen, sowie für die Summe $\gamma = \alpha + \beta$ der beiden andern Constanten.

Da Regnault bei seinen Experimenten über den gesättigten Dampf der Kohlensäure von -25° bis $+42^\circ$, also jenseits der Grenze 31° Messungen ausgeführt hat, ist der kritische Zustand der Kohlensäure von ihm hergestellt, konnte aber nicht beobachtet werden, weil die Kohlensäure sich in einem gusseisernen Gefäss befand. Rs.

M. Langlois. Écoulement des gaz; lignes adiabatiques.
C. R. CI. 998-1001.

Mit Benutzung seiner Theorie der molecularen Bewegungen (s. F. d. M. XVI. 1884. 1069) löst der Verfasser die Aufgabe: Die Luft eines Reservoirs fliesse in freie Luft durch einen passenden Ansatz und unter einem constanten Druck von $1{,}5^{\text{atm}}$. Der äussere Druck betrage 1^{atm}; die Temperatur der Luft im Reservoir ist 30°. Welches ist die Ausflussgeschwindigkeit und die Temperatur der Luft im Ansatz?

Es wird gefunden

$$\gamma^2 = 0{,}5372\,\frac{v^2}{\pi^2},$$

indem Mv^2 die lebendige Kraft der Molecüle bei 30° bedeutet. Der Verfasser entnimmt aus seiner Theorie für Luft bei 0°

$$\frac{v^2}{\pi^2} = 330{,}89^2,$$

folglich ist

$$\gamma^2 = 0{,}5372 \, . \, 330{,}89^2 . (1 + 30\alpha),$$
$$\gamma = 255{,}52 \qquad \text{(experimentell wurde gefunden 253,15)}.$$

Für die Temperatur in der Ausflussöffnung ergab sich $-1,25°$, während Zeuner bei geringer Abweichung in der Annahme über die Constanten $-2,43°$ gefunden hatte.

Re.

H. Hertz. Graphische Methode zur Bestimmung der adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft. Met. Zeitschr. I. 421-431.

Es handelt sich hier um folgende Frage. In einem Gemenge von trockener Luft und ungesättigtem Wasserdampf fallen auf erstere λ, auf letzere μ Gewichtsteile, der Druck des Gemenges ist p, die absolute Temperatur gegeben: welche Zustände hat dieses Gemenge durchzumachen, wenn ohne Wärmezufuhr der Druck sich unbegrenzt vermindert? Der Verfasser entwickelt die bezüglichen Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie für die vier nach und nach eintretenden Stadien (ungesättigter Dampf ohne flüssiges Wasser; mit Dampf gesättigte Luft, neben welcher jetzt auch tropfbares Wasser auftritt; Dampf, Wasser und Eis zusammen vorhanden; Dampf und Eis ohne wirkliches Wasser). Er bezeichnet diese vier Modalitäten resp. als das Trocken-, Regen-, Hagel- und Schneestadium. Die exacte Berechnung der Formeln ist eine höchst mühselige; wenn man aber μ gegenüber λ und den Partialdruck des Wasserdampfes gegenüber p vernachlässigt, so kann man Curvendiagramme construiren, welche mit ausreichender Genauigkeit die Adiabaten zu verfolgen gestatten.

Gr.

R. Ferrini. La teoria cinetica dei gas ed il limite dell' atmosfera. Lomb. Ist. Rend. (2) XVIII. 319-337.

G. Grassi. La teoria cinetica dei gas applicata allo studio dell' atmosfera. Napoli Rend. XXIV. 145-154.

G. Govi, L. Palmieri, D. Padelletti. Relazione sulla nota del prof. Guido Grassi. Napoli Rend. XXIV. 141-145.

Ferrini gelangt zu dem Resultat: Der Unterschied zwischen den Resultaten der Rechnung und denen der Beobachtung bezüglich der Höhe der Atmosphäre und der Verteilung der Temperatur in derselben kann durch die kinetische Gastheorie nicht erklärt werden, wenn man nicht einen Hülfsvorrat von Energie in den Molecülen annimmt, welcher von dem Teil der Sonnenwärme herrühren könnte, der in der Atmosphäre absorbirt bleibt.

Grassi denkt sich die Atmosphäre in horizontale Schichten geteilt; zwischen den Begrenzungsflächen jeder dieser Schichten bewegen sich die in derselben enthaltenen Molecüle. Als Bedingung für das Gleichgewicht einer solchen Begrenzungsschicht erhält der Verfasser „die Gleichung für das dynamische Gleichgewicht der Atmosphäre“

$$2u\,du + g\,da + u^2\frac{dm}{m} = 0.$$

Die verticale Geschwindigkeitscomponente u nimmt mit der Höhe weniger schnell ab, als die Geschwindigkeit eines senkrecht frei in die Höhe steigenden schweren Körpers. Die Höhe der Atmosphäre ist grösser als 12-13 km.

[illegible]elletti berichtet über den Inhalt der zweiten Arbeit und erwähnt dabei auch die erste. Rs.

[illegible] Wärmestrahlung.

Melchi[illegible] den veränderlichen Wärme[illegible] eines Körpers, welcher [illegible] Cylinder ent- [illegible]

[illegible] rechnung des [illegible] Cylinder [illegible] zustand [illegible]

der drei Begrenzungsflächen $\left(r = R,\ \varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{n}\right)$ auf einer bestimmten Temperatur erhalten wird. Nachdem diese Aufgabe ausführlich gelöst ist, beschäftigt sich der Verfasser kürzer mit der folgenden: Es ist der Wärmezustand eines massiven homogenen Cylinders von der Länge l zu bestimmen, wenn der Cylinder die Anfangstemperatur $f(r, \varphi, z)$ besitzt und während seiner Abkühlung die krumme Begrenzungsfläche $r = R$ beständig auf der Temperatur $g(\varphi, z)$, die ebenen Endflächen $z = 0$ und $z = l$ auf $g_1(r, \varphi)$ bez. $g_2(r, \varphi)$ erhalten werden.

Rs.

K. Ångström. Ueber die Diffusion der strahlenden Wärme von ebenen Flächen. Wiedemann Ann (2) XXVI. 253-287.

Eine Experimentaluntersuchung, die den Verfasser bezüglich der Natur der Diffusion zu dem Schluss führt: „Die Verteilung der Diffusion ist wesentlich von der Reflexions- und Absorptionsfähigkeit der diffundirenden Substanz unabhängig und nur von dem Gesetze, nach welchem die Reflexion vor sich ge`` und von der Grösse, Form und Gruppirung der diffundirenden Teile abhängig. Die Grösse der Diffusion hängt dagegen von allen hier erwähnten Umständen ab.“

Rs.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

G e o d ä s i e.

Fr. Hartner. Handbuch der niederen Geodäsie in V. und VI. Auflage bearbeitet und vermehrt von J. Wastler. VI Auflage. XII u. 786 S. Mit 425 Holzschnitten und 2 Tafeln. Wien. L. W. Seidel & Sohn.

Die Erweiterung der neuen Auflage betrifft namentlich die Theodolitaufnahmen, die Genauigkeit der Längenmessungen, die Sextanten, die Winkelcentrirung, die Berechnung der Polygonzüge, die Detailaufnahme, die Ausgleichungsrechnung, die Planimeter, die Aneroidmessungen, die Ausgleichung der Nivellements, die Tachymetrie etc. Das Ganze zerfällt ausser einer allgemeinen Einleitung in die zwei Hauptabteilungen Feldmesskunst und Höhenmesskunst, welchen noch ein Capitel über Tachymetrie angehängt ist. Die Feldmesskunst teilt sich in die Lehre von der Aufnahme, in die Berechnung und Teilung aufgenommener Flächen nebst Aenderung ihrer Begrenzung und in die Anfertigung der Pläne. Der erste und umfangreichste dieser drei Teile enthält die sechs Abschnitte: Masse; Geräte und Instrumente; Grundoperationen und Elementaraufgaben der Feldmesskunst, als Arbeiten mit Kette, Stäben und winkelmessenden Instrumenten,

mit dem Messtisch und trigonometrische Arbeiten; das Aufnehmen einzelner Begrenzungen und Figuren, sowie eines kleinen Verbandes von Grundstücken; das Aufnehmen eines grösseren Verbandes von Grundstücken; die Ausgleichung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate und nach Näherungsmethoden. Der Berechnung und Teilung aufgenommener Flächen und Aenderung ihrer Begrenzung, sowie dem Planzeichnen ist sachgemäss weniger Raum gewidmet. Die zweite Hauptabteilung über Höhenmessung behandelt das geometrische, das trigonometrische, das physikalische Höhenmessen und das Nivelliren. In dem Anhange über Tachymetrie ist besonders der Tichy-Starke'sche Tachymeter ausführlich beschrieben.

Ohne auf eine Kritik der einzelnen Teile hier einzugehen, kann Referent doch nicht unterlassen, die ihm besonders aufgefallene incorrecte Fehlertheorie des § 39 zu erwähnen. Diese ist nur zu sehr geeignet, beim Leser falsche Vorstellungen zu erzeugen. So ist z. B. der Schluss, dass für ein Dreieck, in welchem die fehlenden Stücke aus einer Seite und den anliegenden Winkeln bestimmt werden sollen, das rechtwinkelige gleichschenkelige Dreieck am geeignetsten sei, wenn in demselben die Hypotenuse und die anliegenden Winkel gemessen werden, durchaus unrichtig. P.

Ch. A. Vogler Lehrbuch der praktischen Geometrie. I. Teil. Vorstudien und Feldmessen. Mit 24* Holzschnitten und 10 Tafeln. Braunschweig. Fr. Vieweg & Sohn.

Das vorliegende Lehrbuch enthält eine streng wissenschaftliche Darstellung des Feldmessens, soweit von der Erdkrümmung abgesehen wird. Nach einer Einführung in die Grundbegriffe der Geodäsie werden im ersten Abschnitt die Hauptteile der Instrumente und die Fehlertheorie nebst Ausgleichungsrechnung in der Reihenfolge: Brechung des Lichtes in kugelförmig begrenzten Medien, das Fernrohr, Libellenformen, Libellen und

Axen, Fernrohr und Libelle in Verbindung mit Axen, Kreis und Alhidade nebst Ablese- und Aufstellungsvorrichtungen, die graphischen und mechanischen Rechenhilfsmittel. Theorie der Beobachtungsfehler und Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadrate klar und ausführlich besprochen. Der zweite Abschnitt, das Feldmessen, behandelt das Abstecken von Linien und die Längenmessung, die Winkelabsteckung mit dem Winkelspiegel, Prisma etc., die Messtischaufnahme, die Theodolitaufnahme mit durch exacte Zeichnungen erläuterter Beschreibung der verschiedenen Theodolitconstructionen, die Polygonmessung, Triangulation, Bussolenaufnahme, das Entwerfen der Situationspläne nebst Flächenberechnung, die Flächenteilung, das Abstecken langer gerader Linien und die Curvenabsteckung. P.

C. Koppe. **Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie.** Nordhausen. J. Koppe.

Da die Kenntnis der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate jetzt in Preussen auch von den Landmessern verlangt wird, so wird diesen das Werk eine willkommene Gabe sein, zumal darin besondere Sorgfalt auf aus der Vermessungspraxis entnommene Anwendungsbeispiele verwandt ist. Nach der in der Einleitung gegebenen Theorie der Fehlerw[illegible]lichkeit w[illegible]handelt: die Anwendung der Metho[illegible] einfache Ausgleichungsaufgaben [illegible]nauigkeit; der Begriff und die B[illegible] die Erläuterung des Gewi[illegible]chung ungleich genau[illegible]; bedingte Beoba[illegible]tungen mit Bedingun[illegible] P.

Unter symmetrischen Richtungsbeobachtungen werden solche verstanden, welche nicht in vollständigen, sondern nur in symmetrisch angeordneten Sätzen erfolgen, d. h. in Sätzen zu je i Richtungen und derart angeordnet, dass jede mögliche Combination zu je i auf der Station gleich oft, z. B. q-mal beobachtet wird. Hierbei entsteht eine grosse Verschiedenheit der Winkelgewichte von Station zu Station, und zwar ist das Gewicht $g_{i,p}$ eines Winkels aus symmetrischen Beobachtungen in Sätzen zu je i auf einer Station von p Richtungen, wenn jede Combination nur einmal angestellt ward:

$$g_{i,p} = \binom{p-2}{i-2}\frac{p}{2i},$$

worin $\binom{p-2}{i-2}$ die Zahl der Combinationen zu je $i-2$ aus $p-2$ Elementen bedeutet. Der Beweis dieses Satzes nebst einem Verfahren für die Tilgung der Gewichtsungleichheiten, sowie der Ansatz der Normalgleichungen sind in der vorliegenden Abhandlung gegeben. Am Ende ist dann noch die Auflösung der Normalgleichungen mittels Determinanten erörtert. P.

F. R. Helmert. Ausgleichung von symmetrisch angeordneten Richtungsbeobachtungen einer Station. Jordan Z. f. V. XIV 263-266.

Für diese von Vogler in derselben Zeitschrift behandelte Aufgabe wird vom Verfasser eine etwas vorteilhaftere Lösung, bei welcher Richtungen statt der Winkel als Unbekannte eingeführt sind, angegeben und durch ein Zahlenbeispiel erläutert.

P.

W. Jordan. Bemerkung zur Fehlertrennung in Nivellements-Polygonen. Jordan Z. f. V. XIV. 11-17.

Es sind die von Vogler in Jordan Z. f. V. 1877 \
von Helmert in den astronomischen Nachrichten 1877
elten Theorien der Trennung der eigentlichen Nivelle-

mentsfehler und der Lattenfehler in Polygonschlüssen in ihren Grundzügen übersichtlich kritisch zusammengestellt. P.

O. Börsch. Anleitung zur Berechnung geodätischer Coordinaten. Mit zwei Figurentafeln. Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Cassel. A. Freyschmidt.

Während die erste Auflage der „Anleitung zur Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten etc." hauptsächlich für die Vermessungsarbeiten in der Provinz Hessen bestimmt war, ist in der vorliegenden zweiten Auflage das gesamte Material zur Berechnung geodätischer Coordinaten zusammengestellt. Einer historischen Einleitung folgen vier Abschnitte, wovon der erste die Ableitungen der notwendigsten Sätze aus der Analysis, der sphärischen Trigonometrie und der analytischen Geometrie enthält. Im zweiten Abschnitt, der das Erdsphäroid im allgemeinen behandelt, sind die Formeln für die Krümmungshalbmesser abgeleitet, wohingegen bei der geodätischen Linie die Formeln, welche die Beziehung zwischen der Länge derselben und der Länge des verticalen Schnittes, sowie die Formeln für den Azimutunterschied und die Reductionsformeln zur Berechnung sphäroidischer Dreiecke nach dem von Bessel erweiterten Legendre'schen Satz, dem Zwecke des Buches entsprechend, ohne Ableitung gegeben sind. Ferner sind hier noch die Ergebnisse einiger Gradmessungen und die Bessel'schen Elemente des Erdsphäroids mit aufgenommen. Der umfangreichste dritte Abschnitt beginnt mit allgemeinen Betrachtungen über die Anlage, Messung und Berechnung eines Dreiecksnetzes, worauf eine Zusammenstellung d[illegible] 1883 in Deutschland gemessenen Grundlinien, sowie d[illegible] und der Orientirungsazimute für die [illegible] geodätischen Coordinaten in den ein[illegible] Verzeichnis der vierzig Coor[illegible] mit Angabe der geo[illegible] ihrer Geltungs[illegible] Hauptaufgaben

der Coordinatenberechnung erörtert, und zwar: die Uebertragung der geographischen Coordinaten und des Azimuts vermittels der Polarcoordinaten, die Berechnung der geodätischen Linie und der Azimute in ihren Endpunkten aus den geographischen Coordinaten der Endpunkte, der rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten eines Punktes aus seinen Polarcoordinaten, der geographischen Coordinaten eines Punktes aus dessen rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten und den geographischen Coordinaten des Nullpunktes, der geodätischen Linie und ihrer nach der Abscissenaxe orientirten Richtungen in den Endpunkten aus den geographischen Coordinaten der Endpunkte, der geodätischen Linie und ihrer Richtungen in den Endpunkten aus den rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten der Endpunkte, der Seiten und ihrer Richtungen, sowie der rechtwinklig-sphärischen Coordinaten der Eckpunkte eines Dreiecksnetzes, welchem die aus den rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten und den zugehörigen Katheten abgeleitete geodätische Linie als Grundlinie und deren Richtungen zur Orientirung dienen, und schliesslich die Berechnung der ebenen Coordinaten der trigonometrischen Detailvermessung. Die Formeln sind für alle Aufgaben abgeleitet, und jede Lösung ist noch durch ein Zahlenbeispiel erläutert. Dabei ist vorausgesetzt, dass die geodätischen Linien Seiten messbarer Dreiecke sind oder doch innerhalb des Geltungsbereiches eines der vierzig preussischen Coordinatensysteme liegen. Aber auch für den Fall, dass die geodätischen Linien diese Länge überschreiten, wie diejenigen für Gradmessungszwecke,[1] sind zur Lösung der beiden ersten Aufgaben die strengeren Bessel'schen Formeln mit angeführt. Weiter enthält dieser Abschnitt die von Wittstein in dem Coordinatenverzeichnis der hannoverschen Landesvermessung gegebenen Formeln der Gauss'schen Projection und diejenigen der Projectionsmethode der mecklenburgischen Landesvermessung, einer conformen Kegelprojection. In einem Anhange ist dann noch die Winkelausgleichung des Pothenot'schen Problems nach der Methode der bedingten Beobachtungen behandelt, welches Ver-
n Verfasser der Coordinatenausgleichung nach der Methode
mittelnden Beobachtungen vorgezogen sehen will; ferner

befinden sich dort Notizen über die Berechnung einer um ein Polygon gelegten Dreieckskette und die Formeln für das Problem der zwei Punkte. Den vierten Abschnitt bilden vier ausführliche Tafeln zu obigen Aufgaben. P.

E. Hammer. Die Berechnung der trigonometrischen Vermessungen mit Rücksicht auf die sphärische Gestalt der Erde von J. G. F. Bohnenberger. Deutsche Bearbeitung der Abhandlung „De computandis etc.“ VIII u. 65 S. Mit 13 Figuren im Text. Stuttgart. J. B. Metzler.

Die im Jahre 1826 als Programm der Universität Tübingen erschienene Abhandlung „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis commentatur Joan. Theophil. Frid. Bohnenberger“ ist vom Verfasser mit Vermeidung der im Original befindlichen Druckfehler ins Deutsche übersetzt worden. Nur im § 6 S. 9 ist in dem Ausdruck für z unter der Wurzel

$$1 - e^2\left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right)\sin^2 u \quad \text{statt} \quad 1 - \left(e^2 + \frac{c^2}{a^2}\right)\sin^2 u$$

stehen geblieben. An Stelle der von Bohnenberger benutzten Dimensionen des Erdellipsoids sind die Bessel'schen Elemente und statt der Toise ist das Meter eingeführt worden. Die Tafel II. ist bis 55° Breite ausgedehnt. Zu der auf Seite 6 gemachten Anmerkung des Uebersetzers wäre noch zu sagen, dass der Wert für den Krümmungshalbmesser im ersten Vertical noch einfacher als mittels des Meusnier'schen Satzes, durch rein geometrische Anschauung (vgl. Helmert, die mathem. und physik. Theorien der höheren Geodäsie, I. Teil S. 56) abgeleitet werden kann. P.

Ch. H. [illegible] On [illegible] mation of the shortest distan[illegible] w[illegible] spheroid.
Astr. N[illegible]

Eine I[illegible] ehe, bei welcher [illegible]lipsische Fi[illegible] werden. B.

N. Jadanza. Sulla forma del triangolo geodetico e sulla esattezza di una rete trigonometrica. Torino Atti XX. 765-783.

Durch Differentiation der Sinussatzgleichung werden zunächst die Beziehungen zwischen den Winkel- und Seitenfehlern

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{a} = \dfrac{db}{b} + [\cot A + \cot B]dA + \cot B dC, \\ \dfrac{dc}{c} = \dfrac{db}{b} + [\cot C + \cot B]dC + \cot B dA \end{cases}$$

eines ebenen Dreiecks abgeleitet, von welchem a, b, c die Seiten und A, B, C bezüglich die gegenüberliegenden Winkel sind. Wird der grösste der vorkommenden Winkelfehler mit $\varDelta\alpha$ bezeichnet, so können diese Gleichungen, da $dA + dB + dC = 0$ ist, geschrieben werden:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{da}{a} = \dfrac{db}{b} + \varDelta\alpha[\cot A + 2\cot B], \\ \dfrac{dc}{c} = \dfrac{db}{b} + \varDelta\alpha[\cot C + 2\cot B], \end{cases}$$

woraus folgt, dass für ein Dreieck, in dem die Winkelfehler einen kleinsten Einfluss auf die Seitenfehler haben, die Bedingungen

$$\frac{1}{\sin^2 A} = 0, \quad \frac{1}{\sin^2 B} = 0, \quad \frac{1}{\sin^2 C} = 0$$

erfüllt sein müssen. Da dies aber unmöglich ist, so giebt es kein solches Dreieck, was noch weiter durch drei Zahlenbeispiele erläutert ist.

Für das gleichschenklige Dreieck, in welchem $A = C$ ist, gehen die Gleichungen (2) über in die eine Gleichung:

$$(3)\quad \frac{da}{a} = \frac{db}{b} + \varDelta\alpha \operatorname{tg} A.$$

Dies wird auf ein aus gleichschenkligen Dreiecken bestehendes Basisnetz angewandt. Ist b die Länge der Basis, l die Länge der angeschlossenen Seite des Netzes erster Odnung und A_m der grösste vorkommende Winkel an der Basis jener gleichschenkligen Dreiecke, so folgt:

$$\frac{dl}{l} = \frac{db}{b} + k\varDelta\alpha \operatorname{tg} A_m.$$

Für den Fall ähnlicher Basisnetzdreiecke ergiebt sich durch wiederholte Anwendung des Sinussatzes:

$$l = \frac{b}{2^k \cos^k A}$$

und

$$k = \frac{\log b - \log l}{\log (2 \cos A)}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass bei Vermeidung von Winkeln, die kleiner als 30° sind, die günstigste Zahl der Basisnetzdreiecke 4 ist.

Hierauf sind die in Europa und Afrika von 1840-1882 gemessenen Basen mit ihren mittleren relativen Fehlern nach den „Comptes-rendus des séances de l'Association Géodésique internationale, 1878-1881-1884," zusammengestellt. Wird danach der mittlere Basisfehler zu $\frac{1}{300000}$ angenommen und der mittlere Winkelfehler im Basisnetz gleich 0,25″ gesetzt, so hat man für den Fall, dass $k = 4$ und $A_m = 73° 43'$ ist:

$$\frac{dl}{l} = 0{,}0000005 + k \Delta \alpha \operatorname{tg} A_m \leqq \frac{1}{58479},$$

also abgerundet

$$\frac{dl}{l} \leqq \frac{1}{60000}.$$

Ausserdem ist der Wert $\frac{dl}{l}$ noch auf andere Weise, mittels logarithmischer Differenzen berechnet worden, welches Verfahren

$$\frac{dl}{l} < \frac{1}{100000}$$

giebt.

Dann wird der relative Fehler [illegible] Seite l_k einer Dreieckskette erster O[illegible], gesucht, di[illegible] ist, dass zwischen ihr und der [illegible] angen[illegible] den Seite der Kette sich k Drei[illegible] Mit [illegible] thmischer Differenzen ergieb[illegible] nahezu gleichseitigen [illegible] mittels des Sinussatzes a[illegible]

[illegible]

worin A_m den kleinsten der Dreieckswinkel $A_1, A_2, \ldots, A_k$ und B_m den kleinsten der Dreieckswinkel $B_1, B_2, \ldots, B_k$ bezeichnet, unter Annahme eines Winkelfehlers von 0,25″:

$$\frac{dl_k}{l_k} \eqsim \frac{1}{50000}.$$

Für eine Seite zweiter Ordnung ist nachher der relative Fehler unter der Bedingung, dass sie mittels eines gleichschenkligen Dreiecks an eine Seite erster Ordnung angeschlossen ist und der Winkelfehler 2,5″ beträgt, im Mittel zu $\frac{1}{30000}$ abgeleitet worden; ferner für eine Seite dritter Ordnung bei einem Winkelfehler von 3″ zu $\frac{1}{25000}$ und schliesslich für eine Seite vierter Ordnung bei einem Winkelfehler von 5″ zu $\frac{1}{10000}$ bis $\frac{1}{15000}$. P.

E. Jäderin. Geodätische Längenmessung mit Stahlbändern und Metalldrähten. Stockholm. Vet. Akad. Bihang. IX. 57 S. u. 2 Taf.

Auseinandersetzung der vom Verfasser aufgefundenen Methode, die geodätischen Messungen mit Stahlbändern und Metalldrähten auszuführen; Beschreibung der Instrumente und Bericht über die Experimentalmessungen. E.

Ch. M. Schols. Une projection équivalente avec déviation minimum pour un terrain circulaire d'étendue restreinte. Néerl. Arch. XX. 388-403.

Die Anregung zu dieser Untersuchung hat die Abhandlung von Tissot gegeben: „Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques" (Paris 1881). Der Verfasser entwickelt für ein Terrain von beschränkter Ausdehnung eine Projectionsmethode, bei welcher die Parallelen durch Kreise dargestellt werden und die Abplattung der Erde Berücksichtigung ... Die Uebereinstimmung der erhaltenen Resultate mit denen, ... sich aus der Methode von Bonne und Albers ergeben, ... gewiesen, und zum Schlusse der Wert der Constanten

in den Formeln bestimmt, damit den folgenden Bedingungen genügt werde: 1) Der Umfang des Terrains muss auf der Karte ein Kreis sein. 2) Der Kreis muss eine Curve von gleicher Deformation sein. 3) In jedem Punkte des Kreises muss die Richtung der stärksten Vergrösserung den Kreis berühren. 4) Für keinen Punkt innerhalb des Kreises darf der grösste Abweichungswinkel grösser sein als für den Kreis. Nur unter diesen Bedingungen wird ein bestimmtes Minimum der Deviation in der Projection nicht überschritten werden. G.

Ch. M. Schols. **Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur.** Delft Annales de l'École Polyt. 1. 1-64.

Fortsetzung der geodätischen Untersuchungen des Verfassers. Er behandelt hier den Gebrauch der Projectionsmethode von Mercator für die Berechnung einer Triangulation in der Nähe des Aequators zum Zwecke der Anwendung auf die Gradmessung in den niederländischen Colonien, insbesondere auf der Insel Sumatra, die im Auftrage der Regierung ausgeführt werden soll. Da die zahlreichen und langen Formeln hier nicht mitgeteilt werden können, mögen die Titel der Abschnitte einen Ueberblick von dem Inhalt der umfangreichen Abhandlung geben.

Cap. I. Einleitung. (Ueber die letzten Gradmessungen in Deutschland und Oesterreich). Cap. II. Berechnung der Coordinaten und des Verhältnisses der Vergrösserung. Cap. III. Differentialgleichung der Projection der geodätischen Curve. Cap. IV. Entwickelung einiger Functionen, welche für die Berechnung bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung nötig sind. Cap. V. Entwickelung derselben Function für die Kugelfläche. Cap. VI. Entwickelung der Glieder höherer Ordnung in denselben Functionen. Cap. VII. Das astronomische Azimut und die Sehne.

Die Genauigkeit der erhaltenen Resultate wird durch Zahlenbeispiele nachgewiesen. G.

L. Janse Bz. Over het graphisch oplossen van bolvormige driehoeken en van daarop gegronde zeevaart-en sterrekundige vraagstukken. Nieuw Arch XII. 113-148.

Fortsetzung einer früheren Abhandlung (siehe F. d. M. XVI. 1884. 1090). Die Aufgaben, welche hier behandelt werden, sind: 1) Die Auflösung sphärischer Dreiecke mit directen Daten 2) Die Auflösung von sphärischen Dreiecken mittels Hülfsfiguren. 3) Die Auflösung von Aufgaben mittels geometrischer Oerter auf der Kugelfläche. 4) Die Anwendung der stereographischen Projection zur Auflösung von nautischen und sphärisch-astronomischen Aufgaben. G.

Bischoff. Beitrag zu den Untersuchungen über die Genauigkeit des bayerischen Präcisions-Nivellements. Jordan Z. f. V. XIV. 12-22 u. 33-44.

Weil bei einem Nivellement der mittlere Fehler, je nachdem er aus den Differenzen der Beobachtungen einer Station, oder aus den Differenzen des Doppelnivellements zwischen zwei aufeinander folgenden Fixpunkten, oder aus den Schlussfehlern der Polygone abgeleitet wird, verschieden ausfällt, so ist zu schliessen, dass er nicht in jedem Falle Folge der nämlichen Fehlerquelle ist. In wieweit es möglich ist, die Fehlerquellen zu trennen, hat der Verfasser nach dem Vorgange von Helmert, Vogler und Haid in der vorliegenden Abhandlung darzulegen gesucht. Er findet zunächst bei dem bayerischen Präcisions-Nivellement mit sieben Schleifen mittels der von Vogler (in der Jordan Z. f. V. 1877 S. 96-97) abgeleiteten Gleichungen für den von der Länge abhängigen Fehler, bezogen auf das Kilometer, $\mu_\xi = 0{,}91^{mm}$ und für den von der durchlaufenen Höhe abhängigen Fehler, bezogen auf 10^m Höhe als Einheit, $\mu_\eta = 1{,}63^{mm}$. Mit Hinzunahme zweier Polygondiagonalen nehmen die Fehler bezüglich die Werte $\mu_\xi = 1{,}67^{mm}$ und $\mu_\eta = 0{,}08^{mm}$ und für acht Polygone, mit Hinweglassung einer der Diagonalen, $\mu_\xi = 1{,}51^{mm}$ und $\mu_\eta = 1{,}19^{mm}$ an, woraus ihre grosse Unsicherheit hervorgeht. Aus dem letzten Grunde schien es geraten, die Fehler einzeln

zu fassen. Mittels der Abweichungen ε der doppelt gemachten Beobachtungen einer Station nach dem von Bauernfeind eingeführten Verfahren mit Doppelfussplatten ergiebt sich nun

$$\mu_\zeta = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{4}} = 0{,}83^{mm}$$

in guter Uebereinstimmung mit dem aus nicht dem Polygon angehörenden Strecken abgeleiteten Wert, so dass dieser Betrag als der reine Nivellirfehler angesehen werden kann. Die Bestimmung des Fehlers μ_η, als dessen Ursache die Aenderung der Länge der Latte und der einzelnen Teile derselben zu einander mit der durchlaufenen Höhe angenommen wird, hat seine Schwierigkeiten, weil sich gegen die Vermutung zeigte, dass dieser Wert im flachen Lande grösser ausfällt als im Gebirge. Nachdem die möglichen Ursachen dieses Fehlers erörtert worden sind, wird zum Schluss die Ausgleichung des aus den genannten acht Polygonen bestehenden Nivellements durchgeführt, und zwar erstens mit Annahme eines Gewichtes der Seiten, umgekehrt proportional den Längen, $g_I = \frac{1000}{k}$, und zw[illegible] unter Zugrundelegung eines Gewichtes, das sich nach [illegible] $g_{II} = \frac{1000}{k\mu_\zeta^2 \ldots}$ zusammensetzt, worin k die [illegible] die Quadra[illegible] licher Höhen einer Seite b[illegible]

F. W[illegible], Die Flächen[illegible]ung un[illegible] te[illegible]es Vierecks [illegible] Coordinat[illegible] n[illegible] wöhnlichen [illegible] Feldmes[illegible] Jo[illegible] XIV 2[illegible]9-258.

D[illegible] Flächeninhalt [illegible] s ist [illegible] durch [illegible] n ausgedrü[illegible] Inhalt ei[illegible] 1, 2, 3, 4) k[illegible] die Summ[illegible] ecken (1[illegible] schränkten V[illegible] Von [illegible] Teilung eines [illegible] rtne [illegible] liegende Seiten [illegible] nde [illegible]

abteilen soll, Gebrauch gemacht dadurch, dass auf jede der genannten drei Flächen die allgemeine Vielecksformel angewandt worden ist. Hinsichtlich der Bedingung, welcher die Lage der Teilungslinie zu genügen hat, sind folgende Aufgaben behandelt:

A. Teilung aus einem gegebenen Punkte in einer Seite des Vierecks;

B. Proportionalteilung des Vierecks;

C. Teilung des Vierecks a) parallel zu einer beliebigen Seite desselben, b) parallel zu einer beliebigen Geraden, deren Richtung gegeben ist;

D. Teilung des Vierecks a) senkrecht zu einer Seite desselben, b) senkrecht zu einer beliebigen Geraden.

P.

R. Gerke. Die Festlegung der Böschungsschnittcurve mittels kotirter Projection als Beitrag zu der Tracirungslehre. Mit 8 autograph. Beilagen. Hannover. Schmorl & von Seefeld.

Die Construction der Böschungsschnittcurve, d. h. der Linie, in welcher die Böschungsfläche eines künstlichen Dammes oder Einschnittes die natürliche Erdoberfläche schneidet, ist hier nach den von Peschka in seinem Lehrbuche über „Kotirte Ebenen" dargelegten Principien ausführlich behandelt. Nachdem die 'rundsätze der kotirten Projection besprochen sind, wird ihre …wendung auf die Bestimmung der Böschungsschnittcurve im …en Terrain an sieben Beispielen erklärt. Hierauf folgt die … ebensoviel Beispiele erläuterte Festlegung genannter Linie …er Voraussetzung, dass die Gestalt der Erdoberfläche be…l durch einen Horizontalcurvenplan gegeben ist.

P.

Ueber die Anwendung des Pendels zur … der mittleren Dichtigkeit der Erde.

Es wird vorgeschlagen, die nötige Empfindlichkeit des Pendels dadurch zu erreichen, dass man seinen Schwerpunkt dicht unter die Drehaxe verlegt. Mit einem Versuchsapparat zur Orientirung über die praktische Durchführbarkeit wurden im Jahre 1884 Beobachtungen am Observatorium angestellt. Derselbe bestand aus einer 1m langen prismatischen Stange aus dünnem Eisenblech, an deren Enden Bleikugeln von je 300gr Gewicht befestigt waren. Die stählerne Schneide, welche sich auf Achatlagern dreht, war in der Mitte der Stange angebracht. Die Bewegung wurde durch Spiegelablesung beobachtet. Ist die Gleichgewichtsstellung gefunden, und werden dann die anziehenden Massen horizontal neben die Bleikugeln gebracht, so lässt sich aus der Ablenkung des Pendels unmittelbar das Verhältnis ihrer Anziehung zur Gravitationsconstanten bestimmen. Die Empfindlichkeit des Apparates wurde aus Schwingungsbeobachtungen durch Hinzufügung von Gewichten bestimmt, welche in bekannter Entfernung von der Schneide am unteren Ende des Pendels aufgesetzt wurden. Aus den angeführten Resultaten zweier Beobachtungsreihen geht hervor, dass sich die Reductionsgrössen bei einem zweckmässig construirten Apparat mit grosser Sicherheit bestimmen lassen. P.

G. H. Darwin. Note on a previous paper. Lond. R. Soc. Proc. XXXVII. 322-328.

Enthält einige Berichtigungen zu der Abhandlung: „On the stresses caused in the interior of the Earth by the weight of continents and of mountains“. Phil. Trans. 1882. p. 187. Die nachträglich entdeckten Versehen berühren indessen die physikalischen Folgerungen nicht, die damals gezogen wurden. Cly. (Lp.)

T. J. Stieltjes. Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la terre. Versl. en Meded. (3) I. 272-292.

Vgl. F. d. M. XVI. 1884. 1083. G.

G. Putz. Le télémètre du colonel Pachkévitsch de l'artillerie russe. Rev. d'Art. XXVI. 254-259.

Uebersetzung eines Artikels aus dem Archiv für Artillerie- und Ingenieur-Offiziere über den Distanzmesser des russischen Obersten. Lp.

Capitel 2.

Astronomie.

J. C. Houzeau et A. Lancaster. Bibliographie générale de l'Astronomie. T. II. Mémoires. LXXXIX. u. 2225 S. 8°. Paris. Gauthier-Villars.

Vgl. F. d. M. XIV. 1882. 916.

K. Israel-Holtzwart. Elemente der theorischen Astronomie für Studirende bearbeitet. Erste Abteilung: Theorie der elliptischen Bewegung und der Bahnbestimmung. VIII u. 184 S. Zweite Abteilung: Berechnung der Finsternisse. Meteorbahnen. Stellarastronomie. VIII u. 168 S. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

„Theorische" Astronomie ist nach dem Verfasser Astronomie auf Grund der sinnlichen Anschauung, der Erfahrung, während theoretische oder physische Astronomie das aus einem obersten Principe, dem Gravitationsgesetze, entwickelte System der Astronomie bedeutet. Den Gegenstand der theorischen Astronomie bilden 1) die wahren Bewegungen der planetarischen Himmelskörper und die davon abhängenden astronomischen Bestimmungen und Erscheinungen, 2) die parallaktischen und eigenen Bewegungen der Fixsterne. Demnach sind die empirisch begründeten Kepler'schen Gesetze der Ausgangspunkt für alle Rechnungen. Der Gebrauch der Differential- und Integralrechnung ist in denselben

vermieden oder durch gleichwertige elementare Methoden ersetzt. Das Werk schliesst sich also den Elementen der sphärischen Astronomie desselben Verfassers unmittelbar an, ist wie diese dem wissenschaftlichen Bedürfnisse weiterer Kreise gewidmet, dürfte sich aber auch für den angehenden Fachmann als brauchbares Unterrichtsmittel erweisen, wenngleich es für einen solchen nur die Bedeutung eines propädeutischen haben kann.

Die erste Abteilung behandelt in elf Abschnitten 1) die empirische Begründung der Kepler'schen Gesetze, 2) die theoretische Begründung derselben oder die Mechanik der elliptischen Bewegung, 3) die Elemente der Mondbahn, 4) die übrigen Satelliten des Planetensystems, 5) die Elemente der Bewegung und Bahnebene eines Planeten, 6) die Zeitgleichung und die Rotation der Körper des Sonnensystems, 7) und 8) das Bahnproblem der Planeten und Kometen, 9) die Näherungsmethode für elliptische Bahnen, 10) die Berechnung [illegible] Kometenbahnen, 11) verschiedene mit dem Bahnproblem ver[illegible] Aufgaben. Ein Anhang enthält die Methode der kleinste[illegible], Interpolati[illegible]den und die empirische Auflösung [illegible] transcend[illegible]ungen.

Die zweite Abteilun[illegible] Abschnitt[illegible] Einleitung in die Theorie d[illegible]se, 2) Th[illegible]ndfinsternisse, 3) Theorie [illegible]sternisse [illegible]n bedeckungen und Durchga[illegible]en Planet[illegible] dun[illegible] Mond und Sonn[illegible]bachtun[illegible] Du[illegible] unteren Pl[illegible] Bahnen[illegible] stro[illegible] Stellarastro[illegible] der [illegible]

GRUEY. [illegible]nomie [illegible] au prog[illegible]liens [illegible]
lithogr. 4°; B[illegible] 22[illegible]

Nach der An[illegible]
Leser in die Astron[illegible] voraussetzt. Alle zur [illegible] griffe aus der Physik w[illegible]

Die kosmographischen Erscheinungen und Begriffsbestimmungen werden gleichzeitig gegeben. In acht Capiteln behandelt der Verfasser 1) allgemeine Berechnungsmethoden, 2) allgemeine Beobachtungsmethoden, 3) die Erde und ihre tägliche Bewegung, 4) die Sonne, 5) den Mond, 6) Planeten, Kometen, Sternschnuppen, 7) Finsternisse und Sternbedeckungen, 8) systematische Fehler der Instrumente. Lp.

W. Jordan. Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Berlin, Springer. VII u. 364 S. gr. 8°.

Den Hauptinhalt des Werkes bildet eine monographische und sehr eingehende Studie über die Theorie und den Gebrauch der Reflexions-Instrumente, während die Behandlung der übrigen Methoden für Zeit- und Ortsbestimmung manche Lücken aufweist, selbst wenn man die vom Verfasser beabsichtigte Beschränkung auf die für Landreisen brauchbaren Methoden mittlerer Genauigkeit berücksichtigt.

Nach Vorausschickung der allgemeinen Grundbegriffe wird zunächst das astronomische Universal-Instrument behandelt und zwar wesentlich in Bezug auf seine Verwendung als Vertical-
reis und Theodolit, während das Durchgangs-Instrument und
in der Hand des geschulten Beobachters höchst wertvolle
antar nur kurz erörtert werden. Daran schliesst sich nach
Excurs über Gnomon, Dipleidoskop und Sonnenuhr die,
erwähnt, ausführliche Behandlung der Reflexions-In-
Die am häufigsten gebrauchten Hülfstafeln sind als
geben. B.

méthode unique pour déterminer les
ltazimut et de la lunette méridienne
R. CI. 1470-1473.

, dass man in einem Meridian-
'de mit einem beweglichen

Stunden- und Declinationsfaden einen und denselben Polstern der Reihe nach an verschiedenen Stellen seines Parallels einstellt. Die Methode wird dann auf die Constantenbestimmung mittels Quecksilberhorizont bei einem Altazimut übertragen.

B.

R. S. Woodward. Some practical features of a field time determination with a meridian transit. Wash Bull. VIII. 55-58.

B.

H. Bruns. Zur Theorie des Heliometers. Astr. Nachr. 2673.

Der Aufsatz discutirt die Bedingungen, unter denen man durch Benutzung einer Mirenscala die Fehler der Schiebertellungen eines Heliometers bestimmen kann. B.

M. Loewy. Sur la limite d'exactitude des formules différentielles employées dans la réduction des observations méridiennes. C R. C. 141-146, 201-206.

M. Loewy. Inexactitudes commises par l'emploi des formules usuelles dans la réduction des étoiles polaires et dans la détermination de la collimation astronomique. Formes correctifs pour faire disparaître ces erreurs Méthode d'observation des polaires à une distance quelconque du méridien. C. R. C. 401-407.

M. Loewy. Procédé d'observations des polaires à une grande distance du méridien et table renfermant le terme correctif destiné à faciliter les réductions. C. R. C. 682-688.

M. Loewy. Méthodes nouvelles pour la détermination des coordonnées absolues des polaires, sans qu'il soit nécessaire de connaître les constantes instrumentales. C R CI 5-11. 105-111.

Die beiden ersten Aufsätze enthalten im wesentlichen eine ausführliche Discussion des Grades von Annäherung, welchen die gewöhnlichen Reductionsformeln namentlich für polnahe Sterne besitzen. Des weiteren werden dann Vorschläge gemacht, um im Laufe eines Abends sowohl die Instrumentalfehler, als auch die Positionen polnaher Sterne direct durch passende Combinationen oder Beobachtungen in grösseren Stundenwinkeln abzuleiten. B.

H. Renan. Application des nouvelles méthodes de M. Loewy pour la détermination des coordonnées absolues des étoiles circumpolaires, sans qu'il soit nécessaire de connaître les constantes instrumentales (distances polaires). C. R. CI. 805-808. (ascensions droites) C. R. CI. 935-938.

B.

Vinot. Sur des tables numériques destinées à faciliter les transformations des coordonnées, en astronomie. C. R. CI. 938-939.

Gruey. Sur un mode d'emploi du sextant, pour obtenir, par une seule observation, les hauteurs ou les angles horaires simultanés de deux astres. C. R. C. 1448-1451.

Misst man den Abstand eines Sterns von dem reflectirten Bilde eines anderen, so lässt sich, wie gezeigt wird, diese Messung zur Bestimmung der Höhe resp. der Stundenwinkel jedes einzelnen Sterns benutzen. Die Auflösung führt auf eine biquadratische Gleichung und wird für den Fall vorgeschlagen, wo man durch Versehen eine derartige Messung statt der verlangten Höhe eines einzelnen Sterns erhalten hat. B.

H. Rapin. Le jour sidéral et la rotation de la terre. Bull. Soc. Vaud. (2) XXI. 122-128.

Die Ungenauigkeit der Definition der bezüglichen Begriffe in den meisten Lehrbüchern wird hervorgehoben. Als stichhaltig wird die Erklärung von Leverrier in seiner Théorie du soleil (Annales de l'Observatoire de Paris, IV. 59) hingestellt: „Der Sterntag wird durch die Rückkehr des Frühlingspunktes zum Meridian definirt. Dieser Tag hat eine Dauer von 86164,091 Secunden. Die Rotationsbewegung der Erde aber (was daher nur die auf die Rückkehr desselben Sternes zum Meridian bezügliche Dauer sein kann) vollzieht sich in 86164,099 Secunden". Hierzu bemerkt der Referent: Sobald die Bewegung eines Körpers nicht eine Rotation um eine Axe von constanter Richtung ist, kann eine Definition einer vollen Rotation um 360° gar nicht aufgestellt werden. Lp.

Naccari. Intorno alla formola, che esprime l'andamento di un cronometro con applicazione numerica al cronometria. Ven. Ist. Atti (6) III. 1199-1247.

Kubitzki. Das Schaltjahr in der grossen Rechnungs-Urkunde, Corp. Inscr. Attic. I. No. 273. Pr. Ratibor.

Der Anfang des Jahres im alten attischen Kalender ist noch nicht genügend aufgeklärt. Gewöhnlich wird angenommen, dass Neujahr schon zur Zeit der Marathonischen Schlacht in den Monat Hekatombaion fiel, und wenn man dies thut, muss man zugleich das nach dem Archon Pythodor benannte Jahr als Schaltjahr auffassen. Der Verfasser tritt jedoch den Beweis dafür an, dass jenes ein Gemeinjahr gewesen sei, und daraus würde zugleich folgen, dass in der Zeit vor Meton nicht, wie Boeckh annahm, die reine Oktaeteris, sondern vielmehr eine empirische, wenig systematische Schaltregel gebräuchlich war. Die Beweisführung ist eine wesentlich philologische. Gr.

Felix Müller. Kalender-Tabellen. Berlin. G. Reimer. 8 S. u. III Tab. 8°.

Aus der ersten Tabelle ist der Wochentag, auf den ein Datum alten oder neuen Stils fällt, für die Jahre 1-2000 n. Chr. direct abzulesen, für alle andern Jahre durch eine einfache Reduction zu erhalten. Tafel II. ist ein Festtagskalender für die Jahre 600-2000, Tafel III. enthält die Epakten-Tabelle für dieselbe Zeit, Fest- und Namenstage, den römischen und den französischen Kalender der ersten Republik. Lp.

W. Laska. Note zur Lösung des Kepler'schen Problems. Astr. Nachr. 2641.

Zur genäherten Lösung der Gleichung

$$M = E - e \sin E$$

wird der Ausdruck

$$E = M - \frac{e \sin M}{\sqrt{1 - 2e \cos M + e^2}}$$

abgeleitet und die Correction (von der vierten Ordnung nach e) in eine Reihe entwickelt. B.

Th. v. Oppolzer. Ueber die Auflösung des Kepler'schen Problems. Wien Gerold's Sohn.

A. Saporetti. Illustrazione del metodo di Gauss sulla determinazione di alcuni principali elementi delle orbite planetarie (eccentricità, parametro, longitudine del perielio sull' orbita) e nuovo metodo di soluzione. Bologna Mem. (4) V. 359-372.

Breite Behandlung einer elementaren Aufgabe, nämlich Bestimmung von Parameter, Excentricität und Perihel, wenn in einer Bahnellipse drei Radienvectoren gegeben sind. B.

E. Schoenfeld. Ueber die Berechnung der Differentialformeln zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahnelemente für Planeten und Kometen Astr. Nachr. 2646.

In Bezug auf die Verbesserung von Halbaxe, Excentricität und Epoche schliessen sich die hier entwickelten Vorschriften in der Hauptsache bekannten Methoden an. Die Variationen von Knoten, Neigung und Perihel werden jedoch hier zum ersten Male durch die Componenten der kleinen Drehung ersetzt, welche die ursprünglichen Bahnaxen in die verbesserten überführen. Diese Modification ist als ein wesentlicher Fortschritt zu bezeichnen. Für den Fall nahezu parabolischer Bahnen sind die erforderlichen Hülfstafeln in extenso beigegeben. B.

N. Herz. Entwickelung der Differentialquotienten der geocentrischen Coordinaten nach zwei geocentrischen Distanzen in einer elliptischen Bahn. Wien. Ber. XCII. 590-624

Bei der Methode der Variation der äusseren Distanzen werden in praxi die partiellen Ableitungen des mittleren Ortes, genommen nach jenen Distanzen, auf mechanischem Wege hergeleitet, wobei sich für die Grösse der anzunehmenden Variationen keine allgemeine Regel aufstellen lässt. Zur Vermeidung dieses Uebelstandes schlägt der Verfasser vor, die gesuchten Ableitungen direct aus ihren analytischen Ausdrücken zu berechnen, deren Entwickelung in der vorliegenden Arbeit durchgeführt wird.

B.

N. Herz. Bahnbestimmung des Planeten (243) Ida. Wien. Ber. XCII. 914-938.

Verbesserung der Elemente des genannten Planeten nach der vom Verfasser angegebenen Modification der Methode der Variation der Distanzen (s. vorstehendes Referat). B.

N. Herz. Entwickelung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalien in independenter Form. Wien. Ber. XCI. 349-389

Die Arbeit lässt auszugsweise eine Wiedergabe nicht zu; es

möge deshalb nur erwähnt werden, dass die Entwickelung von der Benutzung des Taylor'schen Satzes ausgeht. B.

A. de Gasparis. Sulle perturbazioni planetarie speciali. Nap. Rend. XXIII. 88-96.

Vorschriften für die Berechnung der Störungen von Parameter, Neigung und Knoten durch Reihen, welche nach Potenzen der Zeit fortschreiten. B.

A. de Gasparis. Sul calcolo delle perturbazioni planetarie per lungo periodo di tempo. Nap. Rend. XXIV. 233-244.

Die Methode, deren Anwendung durch Vergleichung mit den von Encke berechneten Vestastörungen erläutert wird, beruht darauf, dass man die Störungen nach Potenzen der Zeit entwickelt und aus den für die Ausgangszeit gewonnenen Reihen die späteren durch analytische Fortsetzung bildet. B.

A. Weiler. Ueber die Variation der Excentricität und der Epoche in der gestörten Ellipse. Astr. Nachr. 2648.

Der Aufsatz enthält im wesentlichen den Versuch zu zeigen, dass das Verfahren des Verfassers, nämlich Epoche und Excentricität als fest anzunehmen, den üblichen Methoden vorzuziehen sei, und schliesst mit einer etwas elegischen Klage darüber, dass die neue Theorie bisher so wenig Anklang bei den Astronomen gefunden habe. B.

E. Vicaire. De l'influence des perturbations dans la détermination des orbites. C. R. C. 778-781.

E. Vicaire. Sur un théorème de Lambert. C. R. C. 842-843.

Das wesentliche Resultat besteht in einer einfachen und strengeren Herleitung des Lambert'schen Satzes über die Krüm-

mung des scheinbaren geocentrischen Laufes eines Planeten oder Kometen. B.

Taylor. A case of discontinuity in elliptic orbits. Wash. Bull. VII. 122.

A. Seydler. Integration einiger im Dreikörperproblem auftretenden Gleichungen. Prag. Ber. 1884. 16-28. (böhm.)

A. Seydler. Weitere Beiträge zur Integration. Prag. Ber. 1884. 106-126. (böhm.)

Enthält eine gründliche Discussion der Grundgleichungen des Dreikörperproblems unter Verwendung von rechtwinkligen Raumcoordinaten und bietet mitunter in formeller Beziehung neue Resultate. Std.

A. Hall. The formulae for computing the position of a satellite. Wash. Bull. VII. 93-101.

Herleitung bekannter Rechnungsvorschriften mit besonderer Betonung der geometrischen Bedeutung der einzelnen Grössen. B.

G. L. Ravené. The theory of Mercury. Wash. Bull. VIII. 41-45.

Auszugsweise Mitteilung über eine Berechnung der Säcularstörungen des Mercur nach der Methode von Gauss. B.

F. Tisserand. Sur le mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité. C. R. CI. 193-199.

Es wird gezeigt, dass sich die Rotationsgleichungen der Erde unter Benutzung der elliptischen Functionen strenge integriren lassen, sobald man die Störungsfunction auf das Glied reducirt, welches vom Sinusquadrat der Neigung des Aequators

gegen die Fundamentalebene abhängt. Der Vorteil, welcher hierdurch erreicht wird, besteht darin, dass sogleich diese erste Approximation eine grössere Annäherung gewährt, als bei dem gewöhnlichen Verfahren. B.

G. LORENZONI. Dimostrazione delle formole di precessione e nutazione. Ven. Ist. Atti (6) III 1025-1092.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, mit möglichst einfachen Mitteln die Theorie der Präcession und Nutation so weit zu entwickeln, dass einerseits die wesentlichsten Glieder der vollständigeren Theorie erhalten werden, und dass andererseits die Entstehungsart und die geometrische Bedeutung dieser Glieder deutlich hervortreten. Als Ausgangspunkt sind benutzt die Lehre von den Kräftepaaren und die Euler'schen Rotationsgleichungen. B.

S. OPPENHEIM. Ueber die Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroids. Wien Ber. XCII. 528-574.

Siehe Abschn. X. Cap. 4 B. S. 915.

H. GYLDEN. Die intermediäre Bahn des Mondes. Acta Math. VII. 125-172.

H. GYLDÉN. Sur l'orbite intermédiaire de la Lune. C. R. CI. 223-226.

Die hier als erste Approximation statt der Ellipse aufgestellte „intermediäre" Bahn wird dadurch erhalten, dass die Störungsfunction für den Mond zunächst auf die Hauptglieder beschränkt wird. Die Integration der dadurch entstehenden Bewegungsgleichungen lässt sich dann zurückführen auf die der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y(a + b\cos x).$$

B.

A. Saporetti. Metodo pel iscoprire gl'instanti del nascere e del tramontare della luna speditamente. Bologna Mem. (4) IV. 789-794.

Erläuterung des Gebrauchs einer Hülfstafel zur Reduction der im Berliner Astronomischen Jahrbuch berechneten Mond-Auf- und Untergänge auf die Polhöhe von Bologna. B.

Souillart. Théorie analytique du mouvement des satellites de Jupiter. C. R. CI. 932-933.

B. Baillaud. Résultat principal de la discussion des observations des satellites de Saturne. C. R. C 225-230.

R. Schram. Beitrag zur Hansen'schen Theorie der Sonnenfinsternisse. Wien Ber. XCII 1233-1247.

Bei der Berechnung der Grenzcurven für eine gegebene Grösse der Verfinsterung ergeben sich in der Hansen'schen Theorie im allgemeinen immer zwei Lösungen, von denen, je nach Umständen, beide oder nur eine oder auch gar keine brauchbar sind. Es wird zunächst gezeigt, dass die Regel, welche Hansen zur Entscheidung über das Eintreten dieser Fälle giebt, willkürlich ist und ebenso oft zutrifft, als falsch ist. Es wird dann für den Fall nur einer brauchbaren Lösung ein correctes Kriterium gegeben und schliesslich zur allgemeinen Entscheidung ein Weg angegeben, der bei Anwendung einer kleinen Hülfstafel sehr einfach ausfällt. B.

J. Kleiber. Ueber die Zahl der auf die Erde fallenden Sternschnuppen und die Dichtigkeit des interplanetarischen Raumes. Astr. Nachr. 2657.

J. Kleiber. Ueber die Wirkungen des kosmischen Stoffes auf die Grösse und Bewegung der Planeten. Astr. Nachr. 2664.

In dem ersten Aufsatze wird der Versuch gemacht, für die Dichtigkeit des kosmischen Staubes in dem interplanetaren Raume gewisse Grenzwerte zu ermitteln und die Masse des von der Erde fortwährend aufgefangenen Staubes zu bestimmen. Der zweite Aufsatz enthält Speculationen über den Einfluss, welchen der so bewirkte Massenzuwachs auf die Bewegung und die Grösse der Planeten ausüben müsste. B.

S. Kowalewsky. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchungen über die Gestalt der Saturnsringe. Astr. Nachr. 2643.

Der Saturnsring wird hier vorausgesetzt als ein homogener Ring, dessen Meridianquerschnitt eine in der Aequatorebene liegende Symmetrieaxe besitzt und sich nur wenig von einer Ellipse unterscheidet; ferner wird die Masse des Centralkörpers im Mittelpunkte des Ringes concentrirt gedacht, während der Ring mit constanter Geschwindigkeit rotirt. Es wird nach der Form des Querschnitts gefragt, wenn die Ringoberfläche eine Gleichgewichtsfigur sein soll und wenn ferner die grösste Sehne des Ringquerschnittes sehr klein gegen den Ringdurchmesser ist. Es wird gezeigt, dass sich die Aufgabe durch rasch convergente Reihen mit beliebig weit zu treibender Annäherung lösen lässt, sobald man einerseits die Gleichung des Querschnitts in geeigneter Form ansetzt und sobald ferner das Potential des Ringes, dessen Entwickelung die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe bildet, in passender Weise entwickelt wird.

B.

O. Callandreau. Sur la constitution de la Terre. C. R. C. 37-40.

O. Callandreau. Additions à deux Notes précédentes, concernant la théorie de la figure des planètes et de la Terre. C. R. C. 163-164.

R. Radau. Sur la loi des densités à l'intérieur de la Terre. C. R. C. 972-974.

O. Callandreau. Sur la théorie de la figure de la Terre. C. R. C. 1204-1206.

Die vorliegenden Untersuchungen knüpfen an frühere Aufsätze von Herrn Tisserand und Herrn C. an; vgl. C. R. 1884 und Bulletin astronomique 1884). Das Gesamtergebnis der Discussion lässt sich wie folgt aussprechen. Geht man von den Werten der Präcession und Nutation, sowie des Quotienten „Schwungkraft durch Schwere unter dem Aequator" als gegebenen Daten aus, so führen die verschiedenen bisher für das Erdinnere angenommenen Dichtigkeitsgesetze innerhalb eines sehr engen Spielraums stets zu derselben Abplattung 1:298. Hieraus wird dann geschlossen, dass ein merklich anderer Abplattungswert unverträglich ist mit der Annahme einer stetig sich ändernden Dichtigkeit. B.

Ph. Gilbert. Sur la théorie de M. Helmholtz relative à la conservation de la chaleur solaire. C. R. CI 872-874.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass in der v. Helmholtz'schen Berechnung der Wärmemenge, welche durch Verdichtung der Sonnenmasse entsteht, ein Glied fehlt, indem nicht die ganze innere Arbeit in Wärme verwandelt wird, sondern wegen der vergrösserten Rotationsgeschwindigkeit auch die lebendige Kraft zunehmen muss. Er findet, dass einer Aenderung des Sonnenradius R folgende Aenderung der als Wärme vorhandenen Energie entsprechen muss:

$$V = -\frac{MR}{5.425}\left(\frac{3fM}{R^2} - 2\omega^2 R\right).$$

Das hinzukommende Glied $-2\omega^2 R$ bedeutet die doppelte Centrifugalkraft am Aequator und ist allerdings so klein, dass es gegen das Dreifache der Anziehungskraft der Sonne an ihrer Oberfläche, $\frac{3fM}{R^2}$, vernachlässigt werden kann. Sbt.

A. Forster. Studien zur Entwickelungsgeschichte des Sonnensystems. Stuttgart. Metzler VII. 60 S. 8°; Ref. Wiedemann Beibl. X. 134.

R. St. Ball. The story of the heavens. London. Paris. New-York and Melbourne. Cassell and Co.

Nach der Recension in Nature, Dec. 10. 1885, p. 124-126, ein populäres Werk über die ganze Astronomie. Lp.

F. Kerk. Unser Sonnensystem oder die Rotation und die Bewegungen der Planeten etc. 2te mit einem Nachtrage versehene Auflage. Mainz. Frey.

H. Faye. Sur l'origine du monde, théories cosmogoniques des anciens et des modernes. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars.

Capitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

K. Israel-Holtzwart. Nachträge zu dem Abrisse der mathematischen Geographie und den Elementen der Astronomie. Wiesbaden. J. F. Bergmann. VIII u. 52 S. 8°.

Die für die Prima der höheren Lehranstalten behandelten Themata sind: Das Gewicht der Erde, Ebbe und Flut, die Schwere als Function der geographischen Breite, Theorie der Sonnenuhren, Lehre von den Kartenprojectionen. Den Beschluss bilden neun Tafeln. (Vgl. F. d. M. XIV. 1882. 917).

Lp.

E. O. Lubarsch. Die aus der scheinbaren Drehung des Fixsternhimmels folgenden Sätze der astronomischen Geographie, für den Unterricht behandelt. Pr. Königshütte.

Auf die wichtigsten Definitionen folgt eine Beschreibung derjenigen Instrumente, mittels deren man die Lage eines Punktes

am Himmel bestimmen kann, vorab des Theodoliten. Dann ist von den Circumpolarsternen, von Tag- und Nachtbogen, von der Bestimmung der Mittagslinie und Polhöhe $\left(\varphi = \frac{h_1 + h_1}{2}\right)$, von den Coordinatensystemen des Aequators und Horizontes, von Uhr und Zeiteinteilung die Rede. Daran schliessen sich die Beweise für die Kugelgestalt der Erde, Erörterungen über die geographischen Consequenzen dieser Thatsache und endlich die Lehre von der Bewegung der Erde, wobei allerdings der Beweis für die Foucault'sche Pendelformel nicht als überzeugend gelten kann. Das Ganze wird seinem Zweck wohl entsprechen.

Gr.

J. Gallenmüller. Der Fixsternhimmel jetzt und zu Homer's Zeiten. Mit zwei Sternkarten. Pr. Lyceum Regensburg 62 S. 8°.

Der Verfasser hat für die Hauptsterne der Sternbilder des nördlichen Himmels bis zum Zodiakus einschliesslich die mittleren Oerter für das Jahr 900 v. Chr nach den in Brünnow's Lehrbuch der sphärischen Astronomie gegebenen Formeln berechnet und tabellarisch zusammengestellt, damit dadurch das Wirken der Präcession anschaulich werde. Die Eigenbewegung der einzelnen Fixsterne ist nicht berücksichtigt worden. Die beiden Sternkarten geben den Anblick des Himmels für 900 v. Chr. und 1855 n. Chr.

Lp.

G. D. E. Weyer. Bericht über eine neue Abhandlung des Herrn Prof. A. Bono in Neapel zur nautischen Bestimmung der Länge durch Chronometer mittels zweier correspondirender Sonnenhöhen. Ann. Hydr XIII. 333-340.

Bono's Schrift wurde am 15. Juni dem kgl. neapolitanischen Institute eingereicht und von einer Commission, aus De Gasparis, Palmieri und Trudi bestehend, sehr günstig beurteilt. Am Vor-

und Nachmittage werden gleiche Höhen genommen, allein da das Schiff sich inzwischen fortbewegte, so haben nicht nur die Declination der Sonne, sondern auch die geographischen Coordinaten des Beobachters eine Aenderung erlitten. φ ist die Breite, d die Declination, t die wahre Ortszeit; $\Delta\varphi$ und Δd sind durch Δt auszudrücken. Es ist

$$t = f(\varphi, d), \quad t + \Delta t = f(\varphi + \Delta\varphi, d + \Delta d),$$
$$\Delta t = \frac{\partial t}{\partial\varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial t}{\partial d}\Delta d + m,$$

unter m Grössen zweiter und höherer Ordnung verstanden. Stellt weiterhin A das Azimut, p den parallaktischen Winkel (am Sterne selbst) vor, so wird

$$\text{(I)} \qquad \Delta t = -\frac{\cot A}{\cos\varphi}\Delta\varphi + \frac{\cot p}{\cos d}\Delta d + m.$$

Die kleinen Grössen sind bei dem Probleme der Monddistanzen zuerst von Lexell berücksichtigt worden; Bono thut ein Gleiches, und aus seinen Angaben zieht Herr Weyer mit einigen Modificationen die Formel

$$\Delta t = \left(\frac{\Delta d}{\sin\frac{1}{2}J} - \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}J}\right)\operatorname{tg}\varphi - \left(\frac{\Delta d}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}J} - \frac{\Delta\varphi}{\sin\frac{1}{2}J}\right)\operatorname{tg} d,$$

wo $\frac{1}{2}J$ annähernd $= t$ ist. Die wahre Länge L wird, wenn noch T die mittlere Ortszeit im wahren Ortsmittage, M das corrigirte Mittel aus den beiden Chronometerzeiten vorstellt, durch nachstehende Relation dargestellt:

$$\text{(II)} \qquad L = 15(T - M) + (x - x');$$
$$x = \left(\frac{\frac{1}{2}\Delta d}{\sin\frac{1}{2}J} - \frac{\frac{1}{2}\Delta\varphi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}J}\right)\operatorname{tg}\varphi, \quad x' = \left(\frac{\frac{1}{2}\Delta d}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}J} - \frac{\frac{1}{2}\Delta\varphi}{\sin\frac{1}{2}J}\right)\operatorname{tg} d.$$

Die Grössen x und x' können ohne Logarithmirung aus der Koppel- oder Bestecktafel entnommen werden. Der Verfasser giebt den Rat, Δt direct aus (I) zu nehmen und

$$L = 15(T - M) + \tfrac{1}{2}\Delta t$$

zu setzen, ähnlich wie in den nautischen Werken von Jeffers (New York 1871) und Johnston (London 1884). Gr.

Rottok. Bestimmung des wahrscheinlichsten Beobachtungsortes aus beobachteten Gestirnshöhen. Ann. Hydr. XIII. 605-612, 661-668.

G. D. E. Weyer. Die wahrscheinlichste geographische Ortsbestimmung aus beliebig vielen Höhen. Ann. Hydr. XIV. 1-12, 43-57.

Jede Gestirnshöhe ergiebt als ihren geometrischen Ort einen Kreis, der um den beobachteten Stern als Mittelpunkt mit der Zenitdistanz als sphärischem Radius auf dem Globus beschrieben wird. Auf der Mercator-Karte geht dieser Kreis in eine Curve anderer Art über, von der sich kleinere Bogen ohne allzu grossen Fehler durch die ihre Endpunkte verbindende Sehne ersetzen lassen. Solche Geraden heissen „Höhenlinien“ oder „Sumner'sche Linien“, und es müssten sich bei absolut fehlerfreier Beobachtung sämtliche Höhenlinien in einem Punkte durchschneiden, dem Beobachtungsorte. Thatsächlich nun giebt es immer eine ganze Anzahl solcher Schnittpunkte, und es ist der wahrscheinlichste unter ihnen mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate oder auch auf constructivem Wege zu ermitteln. Speciell für den Fall dreier Höhenlinien hat man in einem ebenen Dreiecke jenen Punkt zu suchen, für welchen, wenn x, y, z seine Abstände von den drei Seiten vorstellen, die Relation

$$x^2+y^2+z^2 = \text{Minimum}$$

besteht. Für diesen Punkt, den Grebe (weit später Lemoine) unter die „merkwürdigen Punkte“ des Dreiecks eingereiht hat, besitzt man aber eine sehr einfache Construction.

Herr Weyer verbreitet sich zunächst über die Geschichte des vorliegenden Problems, zu welchem ihm zufolge der amerikanische Capitän Sumner die erste Anregung gegeben hat, und erörtert dann eingehend den allgemeinen Fall der n Höhenlinien. Er erneuert den älteren Vorschlag von Preuss, zur bequemen Ausführung Seekarten in stereographischer Projection anfertigen zu lassen, löst aber zugleich selbst durch eine geschickte Verbindung von Rechnung und Zeichnung die Aufgabe, bei $\frac{1}{2}n(n-1)$ gegebenen Schnittpunkten den dem Schiffsorte möglichst zunächst liegenden Punkt auszumitteln. Gr.

Rottok. Tafel zur Verbesserung der Länge oder des Stundenwinkels für eine Aenderung der Breite, und ähnliche Hilfstafeln. Ann. Hydr. XIII 277-283.

Spengler. Tafeln *X* und *Y* zur Berechnung der Aenderung der Länge oder des Stundenwinkels für eine Aenderung der Breite oder der Declination von einer Minute. Ann. Hydr. XIII 392-401.

Rottok. Bemerkungen zu den in Heft V und VII dieser Annalen gegebenen nautischen Hilfstafeln Ann. Hydr. XIII. 458-459.

Bekanntlich verdankt man dem kais. hydrographischen Amte eine stattliche Reihe von nautischen Tafeln, welche dem „Handbuch der Navigation" beigegeben sind. Herr Rottok bemerkt, dass in diese Tafeln ein Element der Vereinfachung hineingetragen werden kann, sobald man statt der Argumente Stundenwinkel und Declination das Argument Azimut einführt. Ist b das Complement der Polhöhe, p die Poldistanz, z die Zenitdistanz, t der Stundenwinkel, so hat man

$$\cos z = \cos p \cos b + \sin p \sin b \cos t.$$

Nach b und t differentiirend, bekommen wir

$$0 = -\cos p \sin b\, db + \sin p \cos b \cos t\, db - \sin p \sin b \sin t\, dt,$$

$$dt = \frac{-\cos p \sin b + \sin p \cos b \cos t}{\sin p \sin b \sin t}\, db.$$

Nachdem mit Hülfe der Gleichung

$$\sin z \cos A = \sin b \cos p - \sin p \cos b \cos t$$

das Azimut A eingeführt ist, geht unsere obige Gleichung in die folgende über:

$$dt = -\frac{\cot A}{\sin b}\, db = \frac{\cot A}{\cos \varphi}\, d\varphi.$$

Hiernach berechnete der Verfasser eine Tabelle, welche für $d\varphi = 1'$ die Werte von A von 5° zu 5°, von φ von 2° zu 2° enthält. Mit derselben lässt sich u. a. die Aufgabe lösen, eine mit einer bestimmten Breite berechnete Länge für eine gewisse notwendig befundene Aenderung der Breite zu aptiren.

Herr Spengler geht, um die einem Breitenfehler von 1′ entsprechende Längenänderung a_1 zu finden, von der Relation

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg} d}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} t} = -(x_1 - y_1)$$

aus. Ebenso entspricht einem Declinationsfehler im Betrage von 1′ eine Längenänderung

$$a_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin t} - \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} t} = -(x_2 - y_2)$$

Die auf diese beiden Formeln sich gründenden Spengler'schen Tafeln haben einen doppelten Eingang. Tafel X hat x_1 als obern, x_2 als untern Eingang, Tafel Y hält es ebenso mit y_1 und y_2. Es wird gezeigt, welche Bequemlichkeit beide Tafeln bei der Lösung von acht Aufgaben der nautischen Astronomie gewähren.

In seinem Rückblick unterzieht der erstgenannte Verfasser seine eigenen sowie die zuletzt besprochenen Tafeln der Vergleichung mit denjenigen, welche in Pagel's „Cours de navigation" und in Perrin's „Nouvelles tables destinées à abréger les calculs nautiques" enthalten sind. Gr.

Rottok. Längenbestimmungen durch Beobachtung des Auf- und Unterganges eines Gestirnes. Ann. Hydr. XIV. 365-372.

Die hier der Erörterung unterzogene Methode rührt her von dem österreichischen Marineofficier K. Mayer, und es wurden auch bereits Tafeln für deren Anwendung berechnet (vgl. Anleitung und Tafeln zu der vom k. k. Linienschiffslieutenant K. Mayer vorgeschlagenen Methode der Zeitbestimmung zur See, Pola-Fiume-Triest 1885). Man fixirt den Augenblick, in welchem ein Gestirn, resp. ein bestimmter Punkt eines solchen (Rand, Mittelpunkt) scheinbar auf- oder untergeht, leitet mittels Chronometers hierfür die Greenwicher Zeit ab und stellt durch Correctionen den Moment des wirklichen Auf- und Unterganges fest. Ist t der Stundenwinkel für den erst erwähnten Zeitpunkt, φ die Polhöhe, d die Declination, so ist bekanntlich $\cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} d$.

Wenn ferner Δh die Höhendifferenz zwischen scheinbarem und wirklichem Eintritte der Erscheinung bedeutet, so ist die Zeitdifferenz

$$\Delta t = \frac{-\Delta h}{\sqrt{\sin(90^\circ - \varphi + d)\sin(90^\circ - \varphi - d)}} = \frac{-\Delta h}{\sqrt{\cos(\varphi + d)\cos(\varphi - d)}}.$$

Der Zähler Δh setzt sich zusammen aus der Refraction, der Kimmtiefe, der Horizontalparallaxe (bei Nicht-Fixsternen) und, wenn eine Randbeobachtung zugrunde liegt, auch noch aus dem scheinbaren Halbmesser des Himmelskörpers. Gr.

Ch. Paulus. Tafeln zur Berechnung der Mondphasen. Zum Gebrauche beim Unterrichte in der mathematischen Geographie entworfen und mit erklärendem Texte versehen. Tübingen Fues. IV u. 72 S. 8°.

Wenn L' die astronomische Länge der Sonne und L diejenige des Mondes bedeutet, so tritt jeweils für $L - L' = \frac{m\pi}{2}$ (m ganzzahlig) eine der vier Hauptphasen ein. Weiter sollen mit g' und g die mittleren Anomalien von Sonne und Mond, mit ω' und ω die Winkelabstände des Sonnen- und Mondperigaeums vom aufsteigenden Knoten, endlich mit Ω die Länge des letztgenannten Punktes bezeichnet werden; dann ist

$$L' = g' + \omega' + \Omega, \quad L = g + \omega + \Omega,$$

somit ist unsere Bedingungsgleichung jetzt diese

$$i \equiv g - g' + \omega - \omega' = \frac{m\pi}{2}.$$

Seit Mittag des 0. Januar 1800 (mittlerer Greenwicher Zeit) sind $(t - 1800)$ Jahre verflossen; es muss sich also i durch eine nach Potenzen von $(t - 1800)$ fortlaufende Reihe darstellen lassen, und zwar findet sich

$$i = 55^\circ 48' 38'' + 16029617''(t - 1800)$$
$$+ 13''\left(\frac{t - 1800}{100}\right)^2 + 0'',012\left(\frac{t - 1800}{100}\right)^3,$$

oder, wenn man vom Winkel- zum Zeitmass übergeht, in Tagen

$$i = 4{,}57809 + 365{,}25(t-1800) + 0{,}000286352\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2 + 0{,}000000286\left(\frac{t-1800}{100}\right)^3.$$

Man kann i für den Anfang eines jeden Jahrhunderts, für den Anfang eines jeden Jahres im Jahrhundert und für jeden Tag des Jahres ein für allemal berechnen und diese Zahlen, so wie es der Verfasser hier gethan, in Tabellen niederlegen. Gilt es dann, ein bestimmtes i' zu finden, z. B. für den 6. August 1905, so schlägt man in der ersten Tafel für 1900 nach und bekommt α, in der zweiten 5 und bekommt β, in der dritten 6. August und bekommt γ, so dass mithin $i' = \alpha+\beta+\gamma$ wird. Will man hingegen das Argument für den d^{ten} Tag eines Jahres haben, so ist, unter t' die Jahreszahl verstanden, unser t durch

$$t' + \frac{1}{365{,}25}\left(d - R\left[\frac{t'}{4}\right]\right)$$

zu ersetzen. Hat man so die Zeit der mittleren Phase erhalten, so kann man auch die der wahren finden, indem man zu ersterer den Zeitunterschied addirt; dieser hängt von achtzehn Argumenten ab, die ihrerseits wieder mit Hülfe der „Syzygientafeln" v. Oppolzer's als Potenzreihen, grossenteils bis zum Kubus von $(t-1800)$ reichend, ausgedrückt werden können. Tafel II unserer Schrift liefert für den Anfang jedes Jahres unsers Jahrhunderts die bewussten achtzehn Werte. Tafel III und IV bieten die einem andern Tage entsprechenden Zusatzglieder dar.

Je nachdem $(g+\omega)$ zwischen gewissen Grenzwerten schwankt, ist eine Sonnen- oder Mondfinsternis von bestimmtem Charakter (partiell, ringförmig, total) gewiss oder unmöglich. Da aber für Conjunction und Opposition $g'+\omega' = g+\omega$, so kann auch die erstere Summe, mit Zugrundelegung der Lehmann'schen Resultate, den Zweck eines Kriteriums erfüllen. Gr.

F. Anton. Ueber das Interpolationsverfahren bei Monddistanzen nach den nautischen Ephemeriden. Ann. Hydr XIV. 324-328.

Sind $t_0, \ldots, t_n$ die in gleichem Intervalle fortschreitenden Epochen des Ephemeriden-Meridians, $D_0, \ldots, D_n$ die entsprechenden geocentrischen Distanzen des Mondes von irgend einem Gestirne, und hat man das bekannte Schema

$$\left.\begin{array}{cccccccc} D_0 & D_1 & D_2 & D_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta' & \Delta'_1 & \Delta'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta'' & \Delta''_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta''' & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\} \tau = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0},$$

so ist nach einer viel gebrauchten Interpolationsformel für einen beliebig herausgegriffenen Zeitpunkt t

$$\text{(I)} \qquad D = D_0 + \tau\Delta' + \tfrac{1}{2}\tau(\tau-1)\Delta'' + \tfrac{1}{6}\tau(\tau-1)(\tau-2)\Delta''' + \cdots,$$

woraus (für $D - D_0 = d$) sich

$$\tau = \frac{d}{\Delta'} - \tfrac{1}{2}(\tau-1)\frac{\Delta''}{\Delta'} - \tfrac{1}{6}(\tau-1)(\tau-2)\frac{\Delta'''}{\Delta'} - \cdots$$

berechnet. Angenähert findet sich hieraus

$$\text{(II)} \qquad \tau = \frac{t-t_0}{10800} = \frac{d}{\Delta'}, \quad t - t_0 = 10800\,\frac{d}{\Delta'},$$

wo $(t-t_0)$ das genäherte Zeitintervall bedeutet. Verwendet man (II) zur Umformung von (I), so folgt

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} d = \tau\left(\Delta' + \dfrac{\tau-1}{2}\left[\Delta'' + \dfrac{\tau-2}{3}\Delta'''\right]\right) \\ = \tau\left(\Delta' + \dfrac{d-\Delta'}{2\Delta'}\left[\Delta'' + \dfrac{d-2\Delta'}{3\Delta'}\Delta'''\right]\right). \end{cases}$$

Diese Formel soll für sich allein ebenso viel leisten, wie die zwei Hülfstafeln der „Connaissance des Temps". Gr

F. Zehden. Rationelle Verwertung nicht steuerbarer Winkelunterschiede bei Cursbestimmungen zur See.
Wien. Ber. XCI. 1184-1193.

Da es in See oft vorkommt, dass bei Cursbestimmungen Winkel gefunden werden, die über den Compass nicht zu steuern sind, weil sie zwischen zwei Viertelstriche fallen, was namentlich bei grosser Entfernung zwischen Abfahrtsort und Bestim-

mungsort misslich ist, so schlägt der Verfasser für solche Fälle folgendes Verfahren vor: Man denkt sich die zu steuernde, mit einem Viertelstrich zusammenfallende. Curslinie parallel zu sich selbst so lange verschoben, bis sie mit dem Ankunftspunkte zusammenfällt, und trachtet sodann irgend einen Ort in dieser neuen Linie zu erreichen, um ihn als Abfahrtsort zu benutzen. Sind $\varphi\lambda$ und $\varphi_1 \lambda_1$ bezüglich die geographischen Breiten und Längen des ursprünglichen und des verbesserten Abfahrtsortes, so wird in der noch nicht verschobenen Curslinie mit der Richtung ε gegen den Meridian ein Punkt (φ_n, λ_n) mit der Distanz d angenommen, der mit den ersten beiden Punkten und dem Bestimmungsort (φ_{11}, λ_{11}) die vierte Ecke eines Parallelogramms bildet. Die Gleichungen

$$\Delta\varphi = d\cos\varepsilon \quad \text{und} \quad \Delta\lambda = \Delta\omega\,\mathrm{tg}\,\varepsilon,$$

in welchen $\Delta\omega$ den Unterschied der wachsenden Breiten darstellt, liefern die Werte φ_n, λ_n, und die weiteren Gleichungen

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_1 = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\omega} \quad \text{und} \quad d_1 = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varepsilon_1}$$

den zwischen φ_n, λ_n und φ_{11}, λ_{11} bestehenden Curs ε_1 und deren Distanz d_1.

Durch ein Zahlenbeispiel ist der Rechnungsgang noch ausführlich erläutert. P.

E. Gelcich. Neue Rechnungsmethode für das Segeln im grössten Kreise. Ann. Hydr. XIV. 536-538.

Dieser Aufsatz ist eine abgekürzte Reproduction einer in den „Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens“ erschienenen Abhandlung. Als beste Methode für orthodromisches Segeln gilt es noch immer, auf einer gnomonischen (centralperspectivischen) Karte Anfangs- und Endpunkt der Route durch eine Gerade zu verbinden, aus dieser Karte dann eine Anzahl von Punkten nach Länge und Breite auf die Mercator-Karte zu übertragen und aus letzterer sodann Curs und Distanz für je zwei zunächst benachbarte Orte zu entnehmen. Jene interpolirten Orte kann man so wählen, dass die Rechnung möglichst einfach ausfällt, und

dies geschieht hier in der Weise, dass alle Punkte in der Route aufgesucht werden, deren Verbindungslinien mit dem Pole den Längenunterschied in 2^m (m beliebig) gleiche Teile teilen.

Ist fürs erste $m = 1$, φ_1 die Polhöhe des Anfangs-, φ_2 diejenige des Endpunktes, $\Delta\lambda$ der Längenunterschied, und teilt die Verbindungslinie die Distanz in die Teile a und b, bildet endlich die Verbindungslinie y mit der Distanz den spitzen Winkel x, so hat man sofort nach dem Cosinussatze der Raumtrigonometrie

$$\sin\varphi_1 = \cos a \cos y + \sin a \sin y \cos x,$$

$$\cos a = \cos y \sin\varphi_1 + \sin y \cos\varphi_1 \cos\frac{\Delta\lambda}{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \sin y = \cos y \cos\frac{\Delta\lambda}{2} + \frac{\sin a \cos x}{\cos\varphi_1},$$

oder, da $\sin a : \cos\varphi_1 = \sin\frac{\Delta\lambda}{2} : \sin x$,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \sin y = \cos y \cos\frac{\Delta\lambda}{2} + \sin\frac{\Delta\lambda}{2} \cot x.$$

Ebenso ergiebt sich, wenn man mit b, y, $90^\circ - \varphi_2$ und $180^\circ - x$ operirt,

$$\operatorname{tg}\varphi_2 \sin y = \cos y \cos\frac{\Delta\lambda}{2} - \sin\frac{\Delta\lambda}{2} \cot x.$$

Die Addition verhilft zu der höchst bequemen Gleichung

$$\operatorname{tg} y = \frac{2\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Wird dann die Breite des so erhaltenen ersten Schaltpunktes $\varphi_{\left(\frac{1}{2}\right)}$ gesetzt, so ist $\varphi_{\left(\frac{1}{2}\right)} = 90^\circ - y$. Gleicherweise kann man

$$\cot\varphi_{\left(\frac{1}{2}\right)},\ \cot\varphi_{\left(\frac{1}{2^2}\right)},\ \cot\varphi_{\left(\frac{3}{2^2}\right)},\ \ldots,\ \cot\varphi_{\left(\frac{2^m-1}{2^m}\right)}$$

berechnen; da viele Logarithmen sich nicht ändern, so ist die Berechnung beliebig vieler Schaltpunkte selbst dann sehr vereinfacht, wenn man über keine der neueren Seekarten in centraler Projection verfügt. Gr.

G. Pouvreau. Nouvelles tables de mer pour le calcul de la hauteur, de l'heure et de l'azimut. Paris. Gauthier-Villars.

Fiorini. Sopra la proiezione cartografica isogonica, nota seconda. Bologna Mem. (4) IV. 593-610.

Diese Untersuchung bildet eine Fortsetzung der in Bd. III. enthaltenen Abhandlung über die isogonale Kartenprojection mit Anwendung der elliptischen Functionen, während dort von den hyperbolischen Functionen Gebrauch gemacht wurde. P.

F. Augustin. Ueber die Benützung der Lambert-Bessel'schen Formel in der Meteorologie. Casop. XIV. 174. (böhm.)

Unter Verwendung von Prager Beobachtungsergebnissen wird die Bedeutung und Anwendung der genannten Formel auseinandergesetzt. Std.

A. Angot. Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe. C. R. CI. 837-839 u. 876-878.

Der Verfasser veröffentlicht Untersuchungen über die der Erde durch Sonnenstrahlung zugeführten Wärmemengen mit Berücksichtigung der atmosphärischen Absorption. Diejenige Menge, welche während eines Tages 1 qcm der Erdoberfläche in einer bestimmten geographischen Breite und bei gegebener Declination der Sonne durch deren Strahlung erhält, wird durch ein Integral dargestellt, dessen Wert sich nur durch Zeichnung der Curve und Berechnung der Fläche ermitteln liess. Die Rechnung wurde ausgeführt für alle Breiten von 10° zu 10°, für 28 verschiedene Zeitpunkte des Jahres und für verschiedene Werte des „Transparenzcoefficienten" von 1-0,6. Für einen bestimmten Ort und eine bestimmte Beschaffenheit der Atmosphäre ist die tägliche Wärmemenge dann durch eine Fourier'sche Reihe dargestellt worden, aus der man ihren Wert für die verschiedenen

Jahreszeiten berechnen kann. Die Arbeit giebt noch die wichtigsten Resultate und einige Folgerungen für die Meteorologie und allgemeine Geographie; insbesondere verschwinden gewisse Widersprüche, welche zwischen der Verteilung der ohne Rücksicht auf die Absorption berechneten Wärmemengen und derjenigen der Temperaturen an der Erdoberfläche bestanden.

Sbt.

F. Erck. Ueber die Darstellung der stündlichen und jährlichen Verteilung der Temperatur durch ein einziges (Thermo-Isoplethen-) Diagramm und dessen Verwendung in der Meteorologie. Met. Zeitschr. 11. 281-299

Die Aufgabe, das Gesetz des Temperaturganges analytisch auszudrücken, ist nicht in aller Strenge, sondern einzig und allein interpolatorisch zu lösen, sei es dass man Potenzreihen, sei es dass man die Lambert-Bessel'sche Formel zur Anwendung bringt. Wild hat nun in seiner berühmten Schrift „Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches" den Nachweis geführt, dass jene Formel die Temperaturcurve durchaus nicht immer richtig darstelle, indem sie gerade die charakteristischen Züge verwische und die Linie in ihren Wendepunkten zu sehr abflache. Dem gegenüber ist das gewöhnliche graphische Verfahren vorzuziehen; allein dieses hat seinerseits wiederum den Nachteil, nur für je eine abhängige und unabhängige Veränderliche geeignet zu sein. Dies trifft in der Praxis für gewöhnlich nicht zu; so ist z. B. die Temperatur eines bestimmten Zeitmomentes zugleich von der Tagesstunde und vom Monate abhängig, und zur Darstellung muss man entweder auf eine Tabelle mit zwei Eingängen oder auf eine wirkliche Fläche zurückgreifen. Letzteres kann ganz in der Weise geschehen, wie die Situationszeichnung eine Terrain-Unebenheit durch „Isohypsen" zu veranschaulichen versteht; für meteorologische Aufgaben haben Lalanne, Brito Capello, Vogler und Scott diese „Höhenschichtendarstellung" nutzbar zu machen gesucht, und von Vogler rührt auch der hier adoptirte Name „Isoplethen" her. Die Tage werden gleichabständig auf der Ab-

scissenaxe, die Tagesstunden ebenso auf der Ordinatenaxe abgetragen, und in dieses rechteckige Diagramm zeichnet man die Curven ein, welche bestimmten aequidistanten Temperaturgraden entsprechen. Will man dann z. B. wissen, wie die Lufttemperatur am 4. Juli Nachmittags um 5 Uhr beschaffen war, so errichtet man in den diesen beiden Terminen entsprechenden Punkten Lote auf den Axen und sieht zu, welche Isoplethe durch den Schnittpunkt dieser Lote hindurchgeht. Herr Erck führt die Construction für eine Anzahl europäischer Städte wirklich aus und weist die Verwendbarkeit jener für mehrere klimatologische (auch phänologische) Probleme nach. Ein Hauptvorzug dieser Schichtencurven möchte der sein, dass sie es ermöglichen, unter Benützung der stündlichen Aufzeichnungen einer Normalstation die Terminbeobachtungen einer untergeordneten Station sicher auf vierundzwanzigstündige zu reduciren. Gr.

K. Weihrauch. Ein neuer Satz aus der Anemometrie. Met. Zeitschr. I. 291-293.

Je nachdem die Windrichtung in einen der vier Quadranten fällt, möge die Windgeschwindigkeit durch J_1, J_2, J_3, J_4 und der von der Windrichtung mit der positiven Abscissenaxe gebildete Winkel mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ bezeichnet werden. Für einen bestimmten Zeitabschnitt sollen n Aufzeichnungen vorliegen, dann ist das arithmetische Geschwindigkeitsmittel $s = \frac{1}{n}\Sigma J$ und das Mittel der positiven Componenten

$$\sigma = \frac{1}{n}[\Sigma(J_1 \cos\alpha_1 + J_4 \cos\alpha_4) + \Sigma(J_1 \sin\alpha_1 + J_2 \sin\alpha_2) + \Sigma(-J_2 \cos\alpha_2 - J_3 \cos\alpha_3) + \Sigma(-J_3 \sin\alpha_3 - J_4 \sin\alpha_4)].$$

Der Verfasser sucht eine Relation zwischen s und σ auszumitteln, indem er $\sigma = Ms$,

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\gamma + \cos\gamma)d\gamma : \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}; \quad s = \frac{\pi}{4}\sigma$$

setzt. Es ist also möglich, die Windcomponenten nach den vier Himmelsgegenden an Stelle der Geschwindigkeiten und Richtungs

differenzen zur Eruirung der anemometrischen Elemente zu verwenden. Gr.

O. Jesse. Die Höhe der Dunstschicht, durch welche die merkwürdigen Dämmerungserscheinungen der letzten Monate hervorgerufen worden sind. Met. Zeitschr. I. 127-137.

Das trigonometrische Verfahren, durch welches hier die Entfernung eines durch die Sonne gerade noch bestrahlten Punktes von der Erdoberfläche bestimmt wird, ist eine Erweiterung der bekannten Alhazen'schen Methode, die Mächtigkeit der Atmosphäre zu bestimmen. Es berechnet sich danach die Höhe der erwähnten lichtreflectirenden Dunstschicht auf annähernd 17 km. Gr.

H. Meyer. Ueber den jährlichen Gang der Luftfeuchtigkeit in Norddeutschland. Met. Zeitschr. II. 153-162.

K. Weihrauch. Ueber das Sättigungsdeficit. Met. Zeitschr. II. 260-261.

Die erstgenannte Abhandlung fällt hier nur insoweit in unseren Bereich, als sie sich mit der Definition und mathematischen Formulirung des Begriffs „Sättigungsdeficit“ beschäftigt. Darunter versteht man diejenige Dampfmenge, welche bei den obwaltenden Verhältnissen die Luft noch aufzunehmen imstande ist. Die psychrometrische Differenz sei δ, die Lufttemperatur t, und dieser Temperatur t entspreche die Spannkraft e_m des gesättigten Wasserdampfes; ferner seien b der Barometerstand, e die thatsächlich vorhandene Spannkraft, e_1 die dem gesättigten Dampfe bei der vom feuchten Thermometer angegebenen Temperatur entsprechende Spannkraft, α und β Constante ($\alpha = 7{,}4475$; $\beta = 234{,}69$): dann soll das Sättigungsdeficit gegeben sein durch den Ausdruck

$$e_1 - e + e_m \cdot 10^{-\frac{\alpha t}{\beta + t}} \cdot \left(10^{\frac{\alpha t}{\beta + t}} - 10^{\frac{\alpha (t - \delta)}{\beta + t - \delta}}\right).$$

Herr Weihrauch setzt, um das wahre Mittel der relativen

Feuchtigkeit zu bilden, $Q_w = \sum_1^n a_k : \sum_1^n s_k$, wo n die Anzahl der gemachten Beobachtungen, a_k die Werte der absoluten Feuchtigkeit und s_k die Werte des der bezüglichen Temperatur zugehörigen Spannungsmaximums vorstellen. Dann wäre der wahre Ausdruck für unsere Grösse

$$\sum_1^n a_k \cdot \frac{1 - Q_w}{Q_w},$$

wogegen sich die von H. Meyer gerechneten Werte als zu klein herausstellen. Der Verfasser weist darauf hin, dass er Q_w, da er dem Sättigungsdeficit von jeher, zumal auch in hygieinischer Beziehung, einen hohen Wert beimass, früher schon durch indirecte Betrachtungen herzuleiten versucht hat (Bull. de la soc. des natur. de Moscou, 1884). Gr.

Börgen. Die alte Frage nach dem offenen Polarmeere.

Met. Zeitschr. II. 145-147.

Die grosse Anzahl der für die Beantwortung dieser Frage ins Gewicht fallenden Grössen macht die folgende Zusammenstellung notwendig. Es bedeuten:

f_m und F_m die zu Anfang eines Winters resp. mit fest gewordenem und flüssigem Wasser bedeckten Areale,

F die gesamte „Polarmeer"-Fläche ($F = f_m + F_m$),

B die Gesamtbreite der abführenden Strömungen,

α die Maximaldicke, welche das Eis in einem Winter erlangt,

β den Bruchteil der Fläche neugebildeten Eises, welcher auf irgend eine Weise wieder zerstört wird,

a den Bruchteil des Jahres, während dessen keinerlei Neubildung von Eis stattfindet,

b die Dicke der durch die Sommerwärme weggeschmolzenen Eisschicht,

δ und ε gewisse constante Zahlen (etwa $= \frac{1}{2}$ zu setzen);

dann soll sein [$\alpha(n+1)$ ist die doppelte Dicke des alten Eises]

$$f_m = F - F_m$$

$$= \frac{(1-\beta)\left(1-\alpha\frac{B}{F}-\frac{b\varepsilon}{\alpha}\right)F}{\frac{B}{F}+\left(1-\beta-\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{B}{F}\right)\left(1-\alpha\frac{B}{F}-\frac{b\varepsilon}{\alpha}\right)+\left(1-(1-\alpha)\frac{B}{F}\right)\cdot\frac{2b\delta}{\alpha(n+1)}}.$$

Hieraus würde bei Einsetzung der den bisherigen Polarfahrten entnommenen Erfahrungswerte folgen, dass ein sehr grosser Teil der Polarzonen unaufhörlich mit Eis bedeckt sein muss, wie dies auch sonst jetzt allgemein angenommen wird. Gr.

Anhang.

G. S. Carr. A synopsis of elementary results in pure mathematics containing propositions, formulae, and methods of analysis, with abridged demonstrations. London. Fr. Hodgson Cambridge. Macmillan and Bowes. 1886 XXXVI u. 936 S mit 20 Taf. gr 8°.

Das jetzt vollständig vorliegende Werk, dessen erster Teil 1880 erschienen und das 1886 abgeschlossen ist, soll eine Synopsis der gebräuchlichsten Resultate aus dem gesamten Gebiete der reinen Mathematik sein. Als Frucht einer vierzehnjährigen Arbeit bezeichnet es der Verfasser in der Vorrede zum ersten Teile, mithin stellt es uns in seiner fertigen Gestalt das Ergebnis einer emsigen und sorgfältigen Sammelthätigkeit dar, welche während zwanzig Jahre neben dem Lehramte, zunächst zum Nutzen der Vorträge ausgeübt wurde. Das Werk soll nämlich in erster Linie den Gebrauch der gewöhnlichen Lehrbücher begleiten und ergänzen, dem Lernenden eine Uebersicht über den grossen Stoff erleichtern. Zu diesem Zwecke sind die hervorspringenden Punkte der Beweise lediglich angedeutet, oder die Herleitung ist auf bekannte Sätze zurückgeführt. Derartige Hülfsmittel sollen dem Lernenden die Beweise ins Gedächtnis zurückrufen, ohne dass er dieselben völlig durchzulesen braucht. Zweitens soll das Buch aber auch für Fortgeschrittenere ein Nachschlagewerk für alle Gebiete der reinen Mathematik sein. Diesem Zwecke dient besonders das umfangreiche Register, das in einem Zusatze zum obigen Titel wie folgt charakterisirt ist: Supple-

mented by an index to the papers on pure mathematics which are to be found in the principal journals and transactions of learned societies both English and foreign, of the present century. Der Inhalt ist in 14 Abschnitten behandelt: I. Mathematische Tabellen (die Einheiten im *CGS*-System, verschiedene physikalische und mathematische Constanten, Factorentabelle aller Zahlen von 1-99000, Werte der Gammafunction). II. Algebra (Arithmetik). III. Theorie der Gleichungen. IV. Ebene Trigonometrie. V. Sphärische Trigonometrie. VI. Elementare Geometrie. VII. Synthetische Behandlung der Kegelschnitte. VIII. Differentialrechnung. IX. Integralrechnung. X. Variationsrechnung. XI. Differentialgleichungen. XII. Rechnung mit endlichen Differenzen. XIII. Analytische Geometrie der Ebene. XIV. Analytische Geometrie des Raumes.

Die Sichtung des aufzunehmenden oder auszuschliessenden Stoffes ist natürlich sehr schwierig und wird stets von persönlichen Ansichten abhängen; ein nicht englischer Mathematiker dürfte manches vermissen, anderes entbehren zu können meinen. Indessen wird die innerhalb des gegebenen Rahmens getroffene Auswahl gebilligt, meistens die Fülle des wiedergegebenen Materials bewundert werden müssen. Daher ist das Werk in England von der Kritik mit grossem Wohlwollen aufgenommen worden, und hervorragende Mathematiker haben die Zuverlässigkeit gerühmt, obschon sie Versehen, die sich ab und zu eingeschlichen haben, daneben angezeigt haben.

Für weitere Kreise ist besonders das grosse Register zur Orientirung über die mathematische Litteratur unseres Jahrhunderts von hervorragendem Interesse. Das Verzeichnis der Zeitschriften, auf welche in den alphabetisch geordneten Artikeln verwiesen wird, umfasst 13 aus Grossbritannien, 1 aus Neu-Südwales, 2 aus Amerika, 4 aus Frankreich, 5 aus Deutschland, 3 aus Italien, 2 aus Russland, 2 aus Schweden, im ganzen also 32. Es ist mithin vornehmlich auf englische Leser Rücksicht genommen, dagegen sind viele der periodischen Schriften nicht englischer Akademien und gelehrter Gesellschaften, z. B. aus Göttingen, Leipzig, München, Wien, von der Berliner Akademie die

Abhandlungen nicht bearbeitet. Es wäre wünschenswert, dass für eine bereits in Aussicht gestellte zweite Auflage diese jetzt vernachlässigten wichtigen Denkschriften ebenfalls berücksichtigt würden. Eine andere Frage wäre es ferner, ob nicht neben dem blossen Verweise auf die Journalartikel, in welchen ein Gegenstand behandelt worden ist, für die termini technici eine kurze Erklärung im Register oder im Werke selbst zugefügt werden könnte, so dass sich dieses Register als ein Wörterbuch für mathematische Kunstausdrücke gebrauchen liesse. Manche der citirten englischen Werke, z. B. die Manchester Memoirs sind auf dem Festlande Europas sehr wenig verbreitet, Verweise auf sie also schwer nachlesbar. Vielleicht sind solche Wünsche für den Umfang des vorliegenden Werkes zu weitgehend, ihre Erfüllung würde jedoch bei allen Mathematikern grosse Befriedigung hervorrufen. In keiner Weise soll indessen ihr Aussprechen die Zweckmässigkeit des vorliegenden Werkes (für englische Leser vor allem) in Frage stellen. Lp.

F. Wallentin. Maturitätsfragen aus der Mathematik. Zum Gebrauche für die obersten Klassen der Gymnasien und Realschulen. 2te Aufl. Wien Carl Gerold's Sohn VIII u 200 S gr 8°

Die Aufgaben des in zweiter Auflage vorliegenden Buches sind den in den Jahren 1872-78 an den österreichischen Gymnasien und Realschulen gestellten schriftlichen Maturitätsfragen entnommen. Der Verfasser hat alle Aufgaben selbst gerechnet und die Resultate kurz oder, wo es das Verständnis zu erfordern schien, in extenso aufgenommen. Bei den logarithmischen Lösungen sind in der neuen Auflage neben den siebenstelligen Resultaten auch diejenigen angeführt, welche sich mit fünfstelligen Tafeln ergeben. Die Aufgaben sind in zwei Abschnitte verteilt: I. Arithmetik (461). II. Geometrie, wo Planimetrie (35), Trigonometrie (201), Stereometrie (205), analytische Geometrie (183) gesondert sind. Zum Schlusse ist ein Verzeichnis von Gruppen zu je vier Aufgaben zusammengestellt, die sich zur Bearbeitung bei der schriftlichen Prüfung eignen. Nach einem

einjährigen Gebrauche hat Referent nur an wenigen Stellen Versehen in den Aufgaben und Resultaten aufgefunden.

Lp.

H. S. H. SHAW. The theory of continuous calculating machines and of a mechanism of this class on a new principle. Phil. Trans CLXXVI. 367-402

Der Verfasser bemerkt, es gebe eine fast unbegrenzte Zahl von Anwendungen für einen Mechanismus, mittels dessen das Geschwindigkeitsverhältnis zwischen zwei rotirenden Teilen entweder in irgend einem Augenblick bestimmt oder nach irgend einer verlangten Art veränderlich gemacht werden könnte. Ein solcher Mechanismus würde zwei veränderliche Grössen numerisch behandeln lassen; denn mit ihm konnten die Operationen der Differentiation und der Integration mechanisch vollführt werden.

Der bisher allein bekannte Mechanismus scheint derjenige zu sein, der gewöhnlich als „Scheiben- und Roll-Mechanismus" angeführt wird mit seiner Abänderung, dem „Scheiben-Kugel- und Cylinder-Mechanismus", oder einem Apparat wie Kegel und Gürtelreifen, die wegen ihrer unvermeidlichen Ungenauigkeit und wegen anderer Gründe nicht beachtet zu werden brauchen. Der Verfasser hat einen „Kugel- und Roll-Mechanismus" ersonnen, der theoretisch wie folgt beschaffen ist: Man zeichne einen Kreis mit dem Centrum O, ziehe zwei zu einander rechtwinklige Radien Oa, Ob und verlängere sie bezw. bis A, B. Der Kreis stellt eine Kugel vor, welche um die Axe $x'Ox$ rotirt, und die Strecken aA, bB stellen Scheiben vor, senkrecht gegen die Zeichenebene, die um Axen in der Zeichenebene, durch ihre Mittelpunkte gelegt, rotiren. Die beiden Radien Oa, Ob sind immer senkrecht zu einander, aber die Neigung einer von ihnen, z. B. Oa, gegen Ox ist ein veränderlicher Winkel α, und da dieses sich so verhält, so stehen die Winkelgeschwindigkeiten der beiden von der rotirenden Kugel getriebenen Scheiben im Verhältnisse $\sin\alpha:\cos\alpha$. In dem wirklich ausgeführten Mechanismus, der in Grund- und Aufriss abgebildet ist, wird die Kugel völlig durch acht Rollen getragen, nämlich r

A, A', B, B', die von einem festen Rahmen I getragen werden und die Kugel an Punkten im Aequator berühren, und vier Rollen C, C', D, D', die durch einen beweglichen Rahmen F getragen werden und die Kugeln an Punkten in einem veränderlichen Meridian berühren: Die Kugel hat somit keine materielle Umdrehungsaxe, sondern sie rotirt um eine ideelle Axe, die ein veränderlicher Durchmesser in der Aequatorebene ist. Es findet also inbetreff der Kugel durchaus bloss rollende Berührung statt, und im allgemeinen ist die Reibung so weit entfernt, dass (wie der Verfasser erachtet) die geringsten Kräfte durch den Mechanismus wiedergegeben werden und Genauigkeit von Zahlresultaten gesichert ist. Cly. (Lp.)

J. Edmondson. Summary of a lecture on calculating machines before the Physical Society of London. March 28, 1885. Phil Mag XX. 15-18.

Eine kurze Beschreibung der Grundgedanken für die wichtigeren Rechenmaschinen, mit besonderer Bezugnahme auf die des Herrn M. Thomas de Colmar und der Verbesserungen an ihr. Gbs. (Lp.)

A. Steinhauser. Die Elemente des graphischen Rechnens. Wien. A Hölder 130 S.

Das Buch ist für Bau- und Maschinen-Techniker sowie zum Gebrauche an höheren Gewerbeschulen bestimmt. Es lehrt die Methoden des graphischen Rechnens in klarer, leicht verständlicher Darstellung und setzt höhere mathematische Kenntnisse nicht voraus. Das graphische Rechnen, welches darauf beruht, dass man eine Zahl immer durch das Längenverhältnis zweier Strecken oder auch durch eine Strecke darstellen kann, welche sich dann auf eine bestimmte andere als Längeneinheit bezieht, findet besonders Anwendung, wenn aus gegebenen geometrischen Grössen das Resultat geometrisch erhalten werden soll, und wenn aus gegebenen Masszahlen das Ergebnis durch Construction bequemer als durch Rechnung gefunden werden kann, und es dabei auf einen höheren Grad von Genauigkeit nicht ankommt. Nach

Behandlung der Grundoperationen, des Potenzirens und Radicirens entsteht das Bedürfnis nach einer „graphischen Logarithmentafel". Solche wird in der logarithmischen Spirale gefunden; denn diese hat die Eigenschaft, dass der log. eines Leitstrahls dargestellt wird durch den zum entsprechenden Polarwinkel gehörigen Bogen eines Kreises. Dann folgt die graphische Darstellung der Reihen, Proportionen, die Darstellung und Auflösung linearer und quadratischer Gleichungen, das Rechnen mit imaginären Zahlen, die Darstellung der Winkelfunctionen und die Grundaufgaben der graphischen Flächenberechnung.

Sbt.

Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung von L. Brill. Darmstadt.

Ein ausführlicher Katalog von über 160 durch die Verlagshandlung verkäuflichen Modellen algebraischer und transcendenter Flächen, deren Originale zum grössten Teile in der technischen Hochschule zu München gefertigt worden sind. Der Katalog ist einmal gemäss der Zeitfolge des Erscheinens der Modelle in Serien, dann nach der sachlichen Zusammengehörigkeit derselben systematisch geordnet. Vergl. F. d. M. XIV. 1882. 691.

Hch.

G. de Perrodil. Théorie de la règle logarithmique. Usage de la règle. Emploi des nombres primordiaux dans les calculs avec les tables et avec la règle. Paris Gauthier-Villars.

H. van Hyfte. Instruction sur la [illegible] réglettes de E. Péraux. Paris [illegible]

N. Herz. Siebenstellige Logarithmen [illegible] schen Functionen für jede Zeitsecun[illegible] Teubner. IV. u. 182 S.

C. F. Lindman. Femställiga logaritm-tabeller innehållande Briggska logaritmer för tal (till 12000) och goniometriska funktioner samt additions- och subtraktions-logaritmer jemte flera andra vid sifferräkningar nyttiga tabeller. Stereotyperad upplaga. Upsala Lundström 8°. XXVI u. 182 p.

Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tabellen, nebst einigen anderen Tafeln. E.

N. Ekholm, C. V. L. Charlier och K. L. Hagström. Fyrställiga logaritmisk-trigonometriska handtabeller, jemte några andra tabeller samt formler och konstanter för underlättande af sifferräkningar sammanställda. Upsala Almqvist & Wicksell. 8°. XXVIII u. 60 u. 2 S. u. 1 Tafel.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafeln, nebst einigen anderen Handtafeln und Formeln, z. B. solche die elliptischen Functionen betreffend. E.

J. Hoüel. Recueil de formules et de tables numériques. 3e éd. Paris. Gauthier-Villars.

E. Sang. On the need for decimal subdivisions in astronomy and navigation, and on tables requisite therefore. Edinb. Proc. XII 533-544. Cly.

E. Sang. On the construction of the canon of logarithmic sines. Edinb. Proc. XII 601-619. Cly.

G. Battaglini (relatore), L. Menabrea, E. Betti, U. Dini. Relazione sul concorso al premio Reale per la Matematica nell' anno 1883. Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 410-419. Se.

G. Perry. Premiers éléments de physiologie mathématique. Paris. Gauthier-Villars.

Namenregister.

Seite

Seite

Berichtigungen.

Seite	58	Zeile	11	von	unten	lies	Antomari statt Automari.
„	61	„	11	„	„	„	Mirman statt Mirmau.
„	85	„	13	„	oben	„	F. Mertens statt S. Mertens.
„	101	„	9	„	„	„	espletare statt expletare.
„	233	„	6	„	unten	„	Delft statt DELFT.
„	287	„	4	„	„	„	F. Gambardella statt J. Gambardella.
„	289	„	5	„	oben	„	Voraussetzung statt Veraussetzung.
„	352	„	5	„	„	„	zweiter partieller Ableitungen statt zweier partieller Ableitungen.
„	488	„	7	„	unten	„	primo statt prima.
„	683	„	5	„	oben	„	M. Nöther statt H. Nöther.

